2015年北京三帆中学初三上学期数学期中试卷

一、选择题（本大题共10小题，每小题只有唯一正确答案．每小题3分，共30分）

#1．抛物线$y=-3(x-2)^2+4$的开口方向和顶点坐标分别是（ ）．

A．向上，$(2,4)$　　B．向上，$(-2,4)$　　C．向下，$(2,4)$　　D．向下，$(-2,4)$

【答案】C

【解析】$\because -3<0$，$\therefore$开口向下．顶点坐标为$(2,4)$．故答案为C．

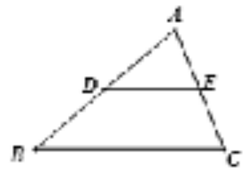
#2．已知，如图，在$\text{Rt}\triangle ABC$中，$\angle C=90°$，$BC=3$，$AC=4$，则$\sin B$的值是（ ）．

A．$\frac{4}{3}$　　B．$\frac{3}{4}$　　C．$\frac{3}{5}$　　D．$\frac{4}{5}$

【答案】D

【解析】$\sin B=\frac{AC}{AB}=\frac{4}{\sqrt{3^2+4^2}}=\frac{4}{5}$．

#3．如图，在$\triangle ABC$中，D、E分别是AB、AC边上的中点，连接DE，那么$\triangle ADE$与$\triangle ABC$的面积之比是（ ）．



A．$1:16$　　B．$1:9$　　C．$1:4$　　D．$1:2$

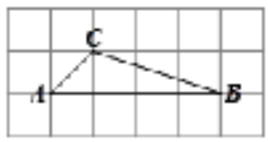
【答案】C

【解析】$\because \triangle ADE\backsim ABC$，

$\therefore \frac{AD}{AB}=\frac{1}{2}$，

则$\frac{S_{\triangle ADE}}{S_{\triangle ABC}}=\frac{1}{4}$．

#4．如图，A，B，C三点在正方形网络线的交点处，则$\tan B$的值为（ ）．



A．$\frac{1}{3}$　　B．3　　C．$\frac{\sqrt{10}}{3}$　　D．$\frac{\sqrt{10}}{10}$

【答案】A

【解析】从C点作AB垂线，则$\tan B=\frac{1}{3}$．

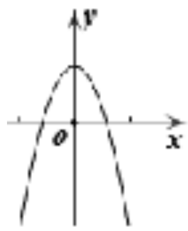
#5．已知方程$ax^2+bx+c=0$（$a\neq 0$）的解是$x_1=-5$，$x_2=3$，那么抛物线$y=ax^2+bx+c$（$a\neq 0$）与x轴的两个交点的坐标分别是（ ）．

A．$(0,5)$，$(0,-3)$　　B．$(-5,0)$，$(3,0)$　　C．$(0,-5)$，$(0,3)$　　D．$(5,0)$，$(-3,0)$

【答案】B

【解析】抛物线与x轴的交点需满足$ax^2+bx+c=0$，则所以交点坐标为$(-5,0)$，$(3,0)$．故答案为B．

#6．二次函数 $y=-3x^2+1$ 的图象如图所示，将其沿 x 轴翻折后得到的抛物线的解析式为（ ）．



A．$y=-3x^2-1$　　B．$y=3x^2$　　C．$y=3x^2+1$　　D．$y=3x^2-1$

【答案】D

【解析】将二次函数 $y=-3x^2+1$ 沿 x 轴翻折后，其顶点变为 $(0,-1)$，开口为 3，所以得到的解析式为 $y=3x^2-1$．故答案为D．

#7．某地下车库出口处安装了“两段式栏杆”，如图1所示，点 A 是栏杆转动的支点，点 E 是栏杆两段的联结点．当车辆经过时，栏杆 AEF 最多只能升起到如图2所示的位置，其示意图如图3所示（栏杆宽度忽略不计），其中 $AB\perp BC$，$EF\parallel BC$，$\angle AEF=143°$，$AB=AE=1.2$ 米，那么适合该地下车库的车辆限高标志牌为（参考数据：$\sin 37°\approx 0.60$，$\cos 37°\approx 0.80$，$\tan 37°\approx 0.75$）（ ）．

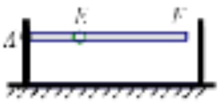


图1

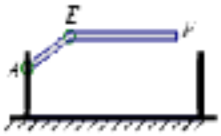


图2

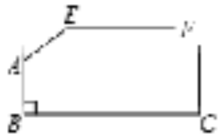


图3

A．

B．

C．

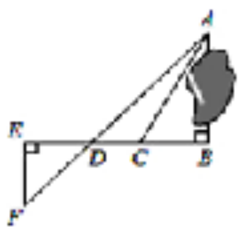
D．

【答案】B

【解析】高度 $h=AB+AE\cdot\cos(\angle AEF-90°)=1.2+1.2\cdot\cos 53°=1.2+1.2\cdot\sin 37°\approx 1.92$ 米，所以适合的限高为 2m．故答案为B．

#8．为了测量被池塘隔开的 A、B 两点之间的距离，根据实际情况，作出如图图形，其中 $AB\perp BE$，$EF\perp BE$，AF 交 BE 于 D，C 在 BD 上．有四位同学分别测量出以下四组数据：

①BC，$\angle ACB$；②CD，$\angle ACB$，$\angle ADB$；③EF，DE，BD；④DE，DC，BC．



能根据所测数据，求出 A、B 间距离的有（ ）．

A．1组　　B．2组　　C．3组　　D．4组

【答案】A

【解析】要求 A、B 间距离，只能用到 $\triangle DEF\backsim DBA$，且需要知道相似比．及一条已知边长．
所以符合条件的只有③．
故答案为A．

#9．若抛物线 $y=x^2-4x+4-t$（t 为实数）在 $0<x<3$ 的范围内与 x 轴有公共点，则 t 的取值范围为（ ）．

A．$0<t<4$　　B．$0\le t<4$　　C．$0<t<1$　　D．$t\ge 0$

【答案】A

【解析】抛物线$y=x^2-4x+4-t=(x-2)^2-t$，在$0<x<3$的范围内$y_{\min}=-t$，$x=0$时，$y_1=4-t$，$x=3$时，$y_2=1-t$，则要使抛物线与x轴有公共点，则需满足$\begin{cases}-t<0\\4-t>0\end{cases}$，即$0<t<4$．故答案为A．

#10．如图1，在等边$\triangle ABC$中，点E、D分别是AC、BC边的三等分点，点P为AB边上的一个动点，连接PE、PD、PC、DE．设$BP=x$，图1中某条线段的长为x，若表示y与x的函数关系的图象大致如图2所示，则这条线段可能是图1中的（ ）．

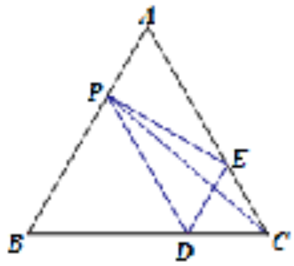


图1

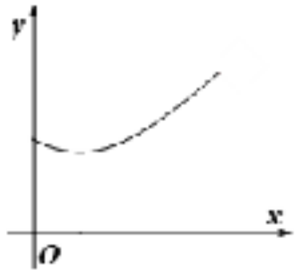


图2

A．线段PD　　B．线段PC　　C．线段PE　　D．线段DE

【答案】A

【解析】令等边$\triangle ABC$的边长为3．

$\because DE=\dfrac{1}{3}AB$为定值不变，所以排除．

而线段PC从CB减小至AB边的中垂线再变大至AC，所以排除．

在$\triangle PBD$中，$\cos B=\dfrac{PB^2+BD^2-PD^2}{2PB\cdot BD}=\dfrac{1}{2}$，

$\therefore PD=\sqrt{PB^2+BD^2-PB\cdot BD}=\sqrt{x^2+4-2x}=\sqrt{(x-1)^2+3}$，

在$(0,1)$单调递减，$(1,3)$单调递增，符合图象．

同理，在$\triangle APE$中，$PE=\sqrt{(3-x)^2+4-2(3-x)}=\sqrt{x^2-4x+7}=\sqrt{(x-2)^2+3}$，

在$(0,2)$单调递减，$(2,3)$单调递增，不太符合图象，所以排除．

故答案为A．

二、填空题（本大题共6小题，每小题3分，共18分）

#11．将二次函数$y=x^2-4x+9$化成$y=a(x-h)^2+k$的形式__________．

【答案】$y=(x-2)^2+5$

【解析】$y=x^2-4x+9=(x-2)^2+5$．

#12．在$\triangle ABC$中，$\angle C=90°$，$\tan A=\dfrac{1}{2}$，则$\sin A=$__________．

【答案】$\frac{\sqrt{5}}{5}$

【解析】$\tan A=\frac{1}{2}$，则 $\sin A=\frac{\tan A}{\sqrt{1+\tan^2 A}}=\frac{\frac{1}{2}}{\sqrt{1+\frac{1}{4}}}=\frac{\sqrt{5}}{5}$.

#13．若抛物线 $y=2(x-2)^2+k$ 过原点，则该抛物线与 x 轴的另一个交点坐标为__________.

【答案】$(4,0)$

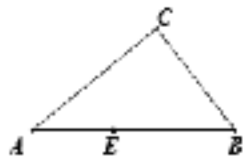
【解析】将原点坐标代入，可得 $k=-8$．令 $2(x-2)^2-8=0$，解得 $x_1=0$，$x_2=4$．即另一个交点坐标为 $(4,0)$．

#14．北京紫禁城是中国古代汉族宫廷建筑之精华．经测算发现，太和殿，中和殿，保和殿这三大殿的矩形宫院 $ABCD$（北至保和殿，南至太和门，西至弘义阁，东至体仁阁）与三大殿下的工字形大台基所在的矩形区域 $EFGH$ 为相似形，若比较宫院与台基之间的比例关系，可以发现接近于 $9:5$，取"九五至尊"之意．根据测量数据，三大殿台基的宽为 40 丈，请你估算三大殿官院的宽为__________丈．

【答案】72

【解析】官院与台基之间的比例关系接近于 $9:5$，则三大殿官院的宽为 $40\cdot\frac{9}{5}=72$ 丈．

#15．如图，在 $\triangle ABC$ 中，$AB=5$，$AC=4$，E 是 AB 上一点，$AE=2$，在 AC 上取一点 F，使以 A、E、F 为顶点的三角形与 $\triangle ABC$ 相似，则 AF 的长为__________.



【答案】$\frac{8}{5}$ 或 $\frac{5}{2}$．

【解析】当 $\triangle AEF\backsim ABC$ 时，$\frac{AF}{AC}=\frac{AE}{AB}=\frac{2}{5}$，$\therefore$ $AF=\frac{8}{5}$．

当 $\triangle AFE\backsim ABC$ 时，$\frac{AF}{AB}=\frac{AE}{AC}=\frac{2}{4}$，$\therefore$ $AF=\frac{5}{2}$．

#16．已知二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图象与 x 轴交于 $(1,0)$ 和 $(x_1,0)$，其中 $-2<x_1<-1$，与 y 轴交于正半轴上一点．下列结论：①$b>0$；②$ac<\frac{1}{4}b^2$；③$a>b$；④$-a<c<-2a$．其中正确结论的序号是__________.

【答案】②④

【解析】二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 过 $(1,0)$ 点和和 $(x_1,0)$，且 $-2<x_1<-1$，与 y 轴交于正半轴上一点，

$\therefore a<0$，$a+b+c=0$，$4a-2b+c<0$，$a-b+c>0$，$\Delta=b^2-4ac>0$

$\therefore b<0$, $ac<\frac{1}{4}b^2$, $\begin{cases} a+c>0 \\ 6a+3c<0 \\ 3a-3b<0 \end{cases}$,

$\therefore -a<c<-2a$, $a<b$.

故正确的结论有②④.

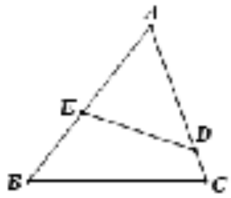
三、解答题（本大题共6题，共30分）

#17. 计算: $\sin 30^\circ-\sqrt{2}\sin 45^\circ+\tan 60^\circ\cdot\cos 30^\circ$.

【答案】 1

【解析】 $\sin 30^\circ-\sqrt{2}\sin 45^\circ+\tan 60^\circ\cdot\cos 30^\circ=\frac{1}{2}-\sqrt{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}+\sqrt{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{1}{2}-1+\frac{3}{2}=1$.

#18. 已知：如图，在 $\triangle ABC$ 中， D 是 AC 上一点， E 是 AB 上一点，且 $\angle AED=\angle C$.



@（1）求证: $\triangle AED\backsim\ ACB$.

【答案】证明见解析.

【解析】 $\because \angle A=\angle A$, $\angle AED=\angle C$,

$\therefore \angle ADE=\angle B$.

$\therefore \triangle AED\backsim\ ACB$.

@（2）若 $AB=6$, $AD=4$, $AC=5$, 求 AE 的长.

【答案】 $\frac{10}{3}$

【解析】 $\because \triangle AED\backsim\ ACB$,

$\therefore \frac{AE}{AC}=\frac{AD}{AB}$,

$\therefore AE=\frac{AD}{AB}\cdot AC=5\cdot\frac{4}{6}=\frac{10}{3}$.

#19. 在二次函数中 $y=ax^2+bx+c$ （ $a\neq 0$ ），函数 y 与自变量 x 的部分对应值如下表:

x	...	0	1	2	3	4	...
y	...	3	0	-1	0	m	...

@（1）求这个二次函数的解析式及 m 的值.

【答案】补全图见解析，结论依然成立.

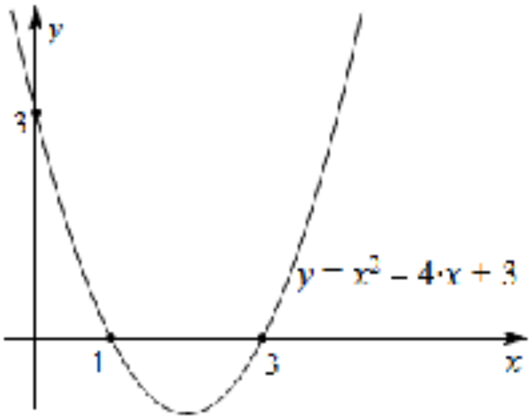
【解析】取几个值代入二次函数解析式中

$\begin{cases} c=3 \\ a+b+c=0 \\ 9a+3b+c=0 \end{cases}$, 解得 $\begin{cases} a=1 \\ b=-4 \\ c=3 \end{cases}$.

$\therefore y=x^2-4x+3$，

当 $x=4$ 时，$m=16-4\cdot4+3=3$．

@（2）在平面直角坐标系中，用描点法画出这个二次函数的图象（不用列表）．

【答案】

．

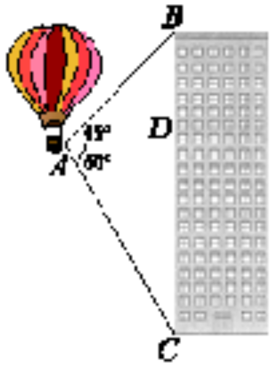
【解析】见答案．

@（3）当 $y<3$ 时，则 x 的取值范围是__________．

【答案】$(0,4)$

【解析】根据（2）中的图可知，x 的取值范围是 $(0,4)$．

#20．如图，热气球的探测器在点 A，从热气球看一栋高楼的顶部 B 的仰角为 $45°$，看这栋高楼底部 C 的俯角为 $60°$，热气球与高楼的水平距离 AD 为 30 米，求这栋楼的高度（$\sqrt{3}$ 取 1.73，结果精确到 0.1 米）．



【答案】

【解析】由题意，$AD\perp BC$ 于 D，即 $\angle BDA=\angle CDA=90°$，

$\because \angle BDA=90°$，$\angle BAD=45°$，$AD=30$，

$\therefore BD=AD\cdot\tan\angle BAD=30\times\tan45°=30$（米）．

$\because \angle CDA=90°$，$\angle CAD=60°$，$AD=30$，

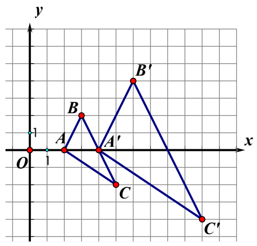
$\therefore CD=AD\cdot\tan\angle CAD=30\times\tan60°\approx51.9$（米），

$\therefore BC=BD+CD\approx81.9$（米）．

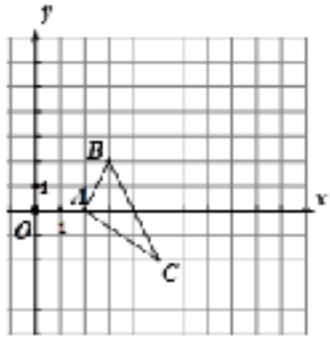
答：这栋楼的高度约为 81.9 米．

#21．如图，在平面直角坐标系中，$\triangle ABC$ 的顶点坐标分别为 $A(2,0)$，$B(3,2)$，$C(5,-2)$．以原点 O 为位似中心，在 y 轴的右侧将 $\triangle ABC$ 放大为原来的两倍得到 $\triangle A'B'C'$．

@（1）画出 $\triangle A'B'C'$．

【答案】

.



【解析】见答案.

@（2）分别写出 B 、 C 两点的对应点 B' 、 C' 的坐标.

【答案】 $B'(6,4)$ 、 $C'(10,-4)$.

【解析】见答案.

#22．已知：关于 x 的函数 $y=ax^2+(2a+1)x+a$ 的图象与 x 轴有且只有一个公共点，求实数 a 的值.

【答案】 $y=-5x+2200$.

【解析】 $y=0$ ，即 $ax^2+(2a+1)x+a=0$.

①当 $a=0$ 时， $x=0$ ，符合题意；

②当 $a\neq 0$ 时，由题意 $\Delta=0$ ，

$\Delta=(2a+1)^2-4a^2=4a+1$ ，

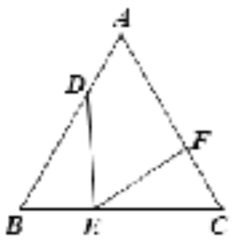
$4a+1=0$ ，解得 $a=-\dfrac{1}{4}$.

综上， a 的值为 0 或 $-\dfrac{1}{4}$.

四、解答题（本题共20分，每小题5分）

#23．如图，在等边 $\triangle ABC$ 中， D 、 E 、 F 分别为边 AB 、 BC 、 CA 上的点，且满足 $\angle DEF=60°$.

@（1）求证： $BE\cdot CE=BD\cdot CF$.



【答案】证明见解析.

【解析】∵等边 $\triangle ABC$ ，

∴ $\angle B=\angle C=60°$ ，

又∵ $\angle DEF=60°$ ，

∴ $\angle DEF=\angle B$ ，

∵ $\angle DEC$ 是 $\triangle DBE$ 的外角，

∴ $\angle DEC=\angle B+\angle BDE$ ，

即 $\angle DEF+\angle FEC=\angle B+\angle BDE$ ，

∵ $\angle DEF=\angle B$ ，

∴ $\angle BDE=\angle CEF$ ，

又∵ $\angle B=\angle C$ ，

$\therefore \triangle BDE \backsim$ CEF ,

$\therefore \dfrac{BD}{CE}=\dfrac{BE}{CF}$,

$\therefore BE\cdot CE=BD\cdot CF$.

@（2）若 $DE\perp BC$ 且 $DE=EF$ ，求 $\dfrac{BE}{EC}$ 的值.

【答案】$\dfrac{1}{2}$

【解析】$\because \triangle BDE \backsim$ CEF ,

$\therefore \dfrac{BD}{CE}=\dfrac{DE}{EF}$,

又 $\because DE=EF$ ，即 $\dfrac{DE}{EF}=1$,

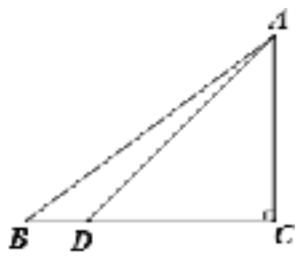
$\therefore BD=CE$,

$\because DE\perp BC$ 即 $\angle DEB=90^\circ$ ， $\angle B=60^\circ$,

$\therefore \dfrac{BE}{EC}=\dfrac{BE}{BD}=\cos B=\cos 60^\circ=\dfrac{1}{2}$,

即 $\dfrac{BE}{EC}=\dfrac{1}{2}$.

#24. 如图，在 $\mathrm{Rt}\triangle ABC$ 中， $\angle C=90^\circ$ ， $\sin B=\dfrac{3}{5}$ ，点 D 在 BC 边上， $DC=AC=6$.



@（1）求 AB 的值.

【答案】10

【解析】$\because \angle C=90^\circ$ ， $\sin B=\dfrac{3}{5}$ ， $AC=6$,

$\therefore AB=AC/\sin B=10$.

@（2）求 $\tan\angle BAD$ 的值.

【答案】G 点能落在$\odot O$ 上，此时 $x=2$.

【解析】过点 B 作 $BE\perp AD$ 交 AD 的延长线于点 E .

$\because \angle C=90^\circ$ ， $AC=6$ ， $AB=10$,

$\therefore BC=\sqrt{AB^2-AC^2}=8$,

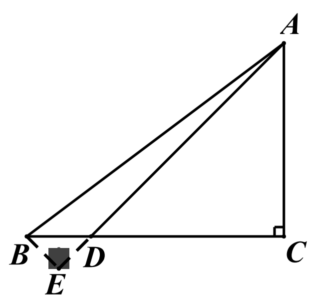
又 $\because CD=6$,

$\therefore BD=BC-CD=2$.

$\because \angle C=90^\circ$ ， $DC=AC=6$,

$\therefore \tan\angle ADC=AC/AD=1$ ， $AD=6\sqrt{2}$,

$\therefore \angle ADC=45^\circ$,



$\therefore \angle BDE = \angle ADC = 45°$

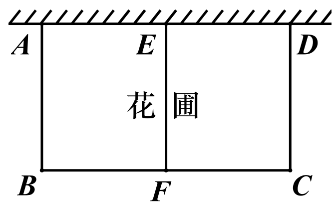
又$\because BD = 2$， $BE \perp AD$ 即 $\angle E = 90°$，

$\therefore BE = DE = BD \cdot \cos 45° = \sqrt{2}$，

$\therefore AE = 7\sqrt{2}$，

$\therefore \tan \angle BAD = \dfrac{BE}{AE} = \dfrac{1}{7}$．

#25．学校要围一个矩形花圃，其一边利用足够长的墙，另三边用篱笆围成，由于园艺需要，还要用一段篱笆将花圃分隔为两个小矩形部分（如图所示），总共36米的篱笆恰好用完（不考虑损耗）．设矩形垂直于墙面的一边AB的长为x米（要求$AB < AD$），矩形花圃$ABCD$的面积为S平方米．



@（1）求S与x之间的函数关系式，并直接写出自变量x的取值范围．

【答案】10

【解析】由题， $AB = x$， $BC = 36 - 3x$，

$S = AB \cdot BC = x(36 - 3x) = -3x^2 + 36x(0 < x < 9)$．

@（2）要想使矩形花圃$ABCD$的面积最大， AB边的长应为多少米?

【答案】AB边的长应为6米．

【解析】 $S = -3x^2 + 36x = -3(x-6)^2 + 108$，

$\because 0 < 6 < 9$，

$\therefore x = 6$时， S取得最大值108．

答：要想使矩形花圃$ABCD$的面积最大， AB边的长应为6米．

#26．定义：直线$y = ax + b\left(a \neq 0\right)$称作抛物线$y = ax^2 + bx\left(a \neq 0\right)$的关联直线．根据定义回答以下问题：

@（1）已知抛物线 $y = ax^2 + bx\left(a \neq 0\right)$ 的关联直线为 $y = x + 2$ ，则该抛物线的顶点坐标为______．

【答案】$(-1,-1)$

【解析】$a = 1$， $b = 2$，

$\therefore$抛物线为$y = x^2 + 2x = (x+1)^2 - 1$，

$\therefore$其顶点为$(-1,-1)$．

@（2）求证：抛物线$y = ax^2 + bx$与其关联直线一定有公共点．

【答案】证明见解析．

【解析】抛物线$y = ax^2 + bx$与$y = ax + b$相交，

$ax^2 + bx = ax + b$，

$ax^2 + \left(b - a\right)x - b = 0$，

$\therefore \Delta = (b-a)^2 + 4ab = (a+b)^2 \geq 0$．

∴抛物线 $y=ax^2+bx$ 与其关联直线一定有公共点.

@（3）当 $a=1$ 时，请写出抛物线 $y=ax^2+bx$ 与其关联直线所共有的特征（写出一条即可）.

【答案】见解析.

【解析】①抛物线 $y=x^2+bx$ 与其关联直线恒过点 $(1,1+b)$；

②抛物线 $y=x^2+bx$ 与其关联直线恒过点 $(-b,0)$；

③抛物线 $y=x^2+bx$ 与其关联直线恒有一个交点在 x 轴上；

④当 $x\geq -b/2$ 时，抛物线 $y=x^2+bx$ 与其关联直线均是从左到右呈上升趋势；

……

五、解答题（本题共22分，第27题7分，第28题7分，第29题8分）

#27．已知：抛物线 C_1 ：$y=2x^2+bx+6$ 与抛物线 C_2 关于 y 轴对称，抛物线 C_1 与 x 轴分别交于点 $A(-3,0)$，$B(m,0)$，顶点为 M .

@（1）求 b 和 m 的值.

【答案】$b=8$，$m=-1$.

【解析】∵抛物线 $y=2x^2+bx+6$ 过点 $A(-3,0)$，

∴ $0=18-3b+6$，

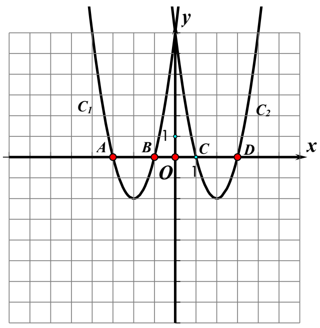
∴ $b=8$，

∴ C_1：$y=2x^2+bx+6$，

令 $y=0$，则 $2x^2+8x+6=0$，

解得 $x_1=-3$，$x_2=-1$，

∴ $m=-1$.



@（2）求抛物线 C_2 的解析式.

【答案】$y=2x^2-8x+6$.

【解析】∵ C_1：$y=2x^2+8x+6=2(x+2)^2-2$，

∴ $M(-2,-2)$，

∴点 M 关于 y 轴的对称点 $N(2,-2)$，

∴ C_2：$y=2(x-2)^2-2=2x^2-8x+6$.

@（3）在 x 轴，y 轴上分别有点 $P(t,0)$，$Q(0,-2t)$，其中 $t>0$，当线段 PQ 与抛物线 C_2 有且只有一个公共点时，求 t 的取值范围.

【答案】见解析.

【解析】由题意，点 $A(-3,0)$ 与 D，点 $B(-1,0)$ 与 C 关于 y 轴对称，

∴ $D(3,0)$，$C(1,0)$，

$\because P(t,0)$，$Q(0,-2t)$，

$\therefore PQ: y=2x-2t$

当 PQ 过点 C 时，即 P 与 C 重合时，$t=1$，

当 PQ 过点 D 时，即 P 与 D 重合时，$t=3$，

当直线 PQ 与抛物线 C_2 有且仅有一个公共点时，

即方程 $2x^2-8x+6=2x-2t$ 中，

$\Delta=0$，得 $t=\dfrac{13}{4}$，

综上，由图得，当 $1\le t<3$ 或 $t=\dfrac{13}{4}$ 时，PQ 与抛物线 C_2 有且仅有一个公共点．

#28．在 $\mathrm{Rt}\triangle ABC$ 中，$\angle ACB=90^\circ$，$\angle A=30^\circ$，D 为 AB 的中点，点 E 在线段 AC 上，点 F 在直线 BC 上，$\angle EDF=90^\circ$．

@（1）如图1，若点 E 与点 A 重合，点 F 在 BC 的延长线上，则此时 $\dfrac{DE}{DF}=$ __________．

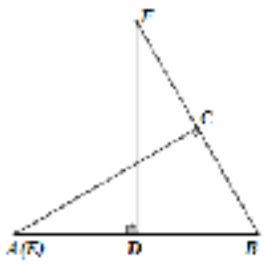


图1

【答案】$\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

【解析】在 $\mathrm{Rt}\triangle ABC$ 中，$AB=2BC=2BD$，

$\therefore DF=\sqrt{3}BD=\sqrt{3}DE$，

$\therefore \dfrac{DE}{DF}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$．

@（2）若点 E 在线段 AC 上运动，点 F 在线段 BC 上随之运动（如图2），请猜想在此过程中 $\dfrac{DE}{DF}$ 的值是否发生改变．若不变，请求出 $\dfrac{DE}{DF}$ 的值；若改变，请说明理由．

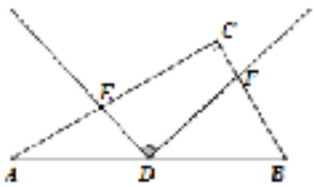


图2

【答案】不变，恒为 $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$．

【解析】猜想：在此过程中，$\dfrac{DE}{DF}$ 的值不变．

解：过点 D 作 $DM\perp AB$ 交 BC 的延长线于点 M．

$\therefore \angle MDA=\angle MDB=90^\circ$，即 $\angle 1+\angle 3=90^\circ$，

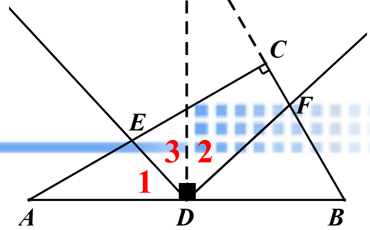
又 $\because \angle EDF=\angle 2+\angle 3=90^\circ$，

$\therefore \angle 1=\angle 2$．

$\because \angle ACB=\angle MDB=90^\circ$，

$\therefore \angle A=90^\circ-\angle B$，$\angle M=90^\circ-\angle B$，

$\therefore \angle A=\angle M$



$\therefore \triangle ADE \backsim \triangle MDF$，

$\therefore \dfrac{DE}{DF}=\dfrac{DA}{DM}$，

$\because D$ 为 AB 中点，

$\therefore DA=DB$，

$\therefore \dfrac{DA}{DM}=\dfrac{DB}{DM}=\tan M=\tan 30^{\circ}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，

$\therefore$在此过程中，$\dfrac{DE}{DF}$ 的值不变，恒为 $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$．

@（3）在（2）的条件下，在线段 EC 上取一点 G，在线段 CB 的延长线上取一点 H，其中 $\dfrac{EG}{FH}=k$，请问 k 为何值时，恒有 $\angle GDH=90^{\circ}$．请在图3中补全图形，直接写出符合题意的 k 值，并以此为条件，证明 $\angle GDH=90^{\circ}$．

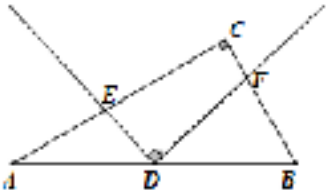
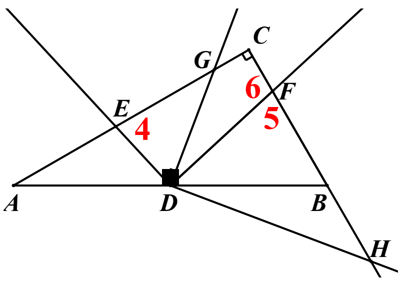


图3

【答案】$k=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

【解析】$k=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$．



证明：由（2）得 $\dfrac{DE}{DF}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}=k=\dfrac{EG}{FH}$

$\because$四边形 $CEDF$ 中，$\angle ACB=\angle EDF=90^{\circ}$，

$\therefore \angle 4+\angle 6=360^{\circ}-\angle ACB-\angle EDF=180^{\circ}$，

又$\because \angle 5+\angle 6=180^{\circ}$，

$\therefore \angle 4=\angle 5$，

$\therefore \triangle EGD \backsim \triangle FHD$，

$\therefore \angle EDG=\angle FDH$，

$\because \angle EDF=\angle EDG+\angle FDG=90^{\circ}$，

$\therefore \angle FDH+\angle FDG=90^{\circ}$，

即 $\angle GDH=90^{\circ}$．

#29．如图1，在平面直角坐标系中，有一张矩形纸片 $OABC$，已知 $O(0,0)$，$A(4,0)$，$C(0,m)$，其中 m 为常数且 $m\geq 2$，点 P 是 OA 边上的动点（与点 O、A 不重合）．现将 $\triangle PAB$ 沿 PB 翻折，得到 $\triangle PDB$；再在 OC 边上选取适当的点 E，将 $\triangle POE$ 沿 PE 翻折，得到 $\triangle PFE$，并使直线 PD、PF 重合．

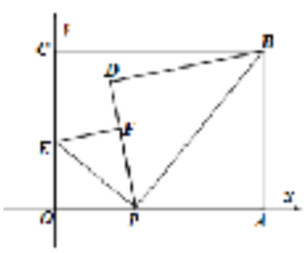


图1

@（1）设 $P(x,0)$，$E(0,y)$，求 y 关于 x 的函数关系式，并求 y 的最大值

（用含m的代数式表示）．

【答案】$\dfrac{4}{m}$

【解析】由题，$AB=OC=m$，$OA=4$，$\angle EOP=\angle PAB=90^\circ$，

$\therefore P(x,0)$，$E(0,y)$，

$\therefore OP=x$，$OE=y$，$AP=4-x$，

$\because$翻折的性质，

$\therefore \angle EPO+\angle APB=90^\circ$，

又$\because \angle EPO+\angle OEP=90^\circ$，

$\therefore \angle OEP=\angle APB$

$\therefore \triangle OEP\backsim \quad APB$，

$\therefore \dfrac{EO}{PA}=\dfrac{OP}{AB}$，$\dfrac{y}{4-x}=\dfrac{x}{m}$，

$\therefore y=\dfrac{x(4-x)}{m}=\dfrac{-x^2+4x}{m}$，

$\because y=\dfrac{-(x-2)^2+4}{m}$，

$\therefore x=2$时，y取得最大值$y=\dfrac{4}{m}$．

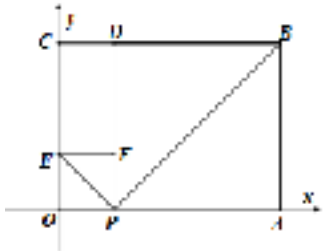


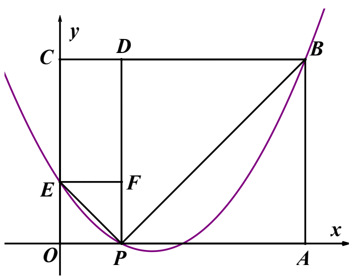
图2

@（2）当$m=3$时，若翻折后点D落在BC边上（如图2），求过E、P、B三点的抛物线的解析式．

【答案】$y=\dfrac{1}{2}x^2-\dfrac{3}{2}x+1$

【解析】由题$B(4,3)$，$\angle PBA=\dfrac{\angle ABC}{2}=45^\circ$，

易得$\triangle BAP$和$\triangle EOP$为等腰直角三角形，



$\therefore PA=AB=3$，

$\therefore OP=1$，

$\therefore OE=OP=1$，

$\therefore P(1,0)$，$E(0,1)$，

$\therefore$可设过E、P、B的抛物线为$y=ax^2+bx+1$，

$\because$过点$(4,3)$和$(1,0)$，

$\therefore$解得$a=\dfrac{1}{2}$，$b=-\dfrac{3}{2}$，

$\therefore y=\dfrac{1}{2}x^2-\dfrac{3}{2}x+1$．

@（3）在（2）的情况下，在该抛物线上是否存在点Q，使$\triangle PEQ$是以PE为直角边的直角三角形？若存在，求出点Q的坐标；若不存在，说明理由．

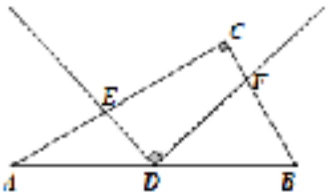


图3

【答案】点Q的坐标为$(4,3)$或$(5,6)$．

【解析】由题可知$\angle EPB=90^\circ$，$\therefore Q_1(4,3)$符合题意，

$\because EQ_2 \parallel BP$，$BP: y=x-1$，

$\therefore EQ_2: y=x+1$，

与抛物线$y=\frac{1}{2}x^2-\frac{3}{2}x+1$解析式联立求得$Q_2(5,6)$

综上：Q点的坐标是$(4,3)$或$(5,6)$．