# 2015年北京第三十五中学初三上学期数学期中试卷

## 一、选择题（本大题共10小题，每小题只有唯一正确答案．每小题3分，共30分）

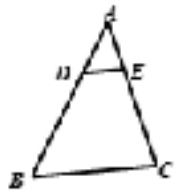
#1．抛物线 $y=-(x+2)^2-3$ 的顶点坐标是（ ）．

A．$(2,-3)$　　B．$(-2,3)$　　C．$(2,3)$　　D．$(-2,-3)$

【答案】D

【解析】抛物线的顶点为 $(-2,-3)$，故答案为D．

#2．如图，在 $\triangle ABC$ 中，若 $DE\parallel BC$，$AD:BD=1:2$，若 $\triangle ADE$ 的面积等于 $2$，则 $\triangle ABC$ 的面积等于（ ）．



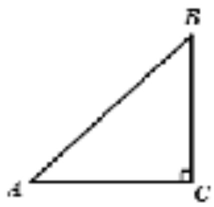

A．$6$　　B．$8$　　C．$12$　　D．$18$

【答案】D

【解析】$\because DE\parallel BC$，$\therefore \triangle ADE\backsim ABC$，则有 $\dfrac{S_{\triangle ADE}}{S_{\triangle ABC}}=(\dfrac{AD}{AB})^2=\dfrac{1}{9}$．

故 $S_{\triangle ABC}=9S_{ADE}=18$．故答案为D．

#3．如图，$\triangle ABC$ 中，$\angle C=90^\circ$，$BC=2$，$AB=3$，则下列结论正确的是（ ）．




A．$\sin A=\dfrac{\sqrt{5}}{3}$　　B．$\cos A=\dfrac{2}{3}$　　C．$\sin A=\dfrac{2}{3}$　　D．$\tan A=\dfrac{\sqrt{5}}{2}$

【答案】B

【解析】在 $\mathrm{Rt}\triangle ABC$ 中，$\sin A=\dfrac{BC}{AB}=\dfrac{2}{3}$，$\cos A=\sqrt{1-\sin^2 A}=\dfrac{\sqrt{5}}{3}$，$\tan A=\dfrac{\sin A}{\cos A}=\dfrac{2}{\sqrt{5}}$，故答案为C．

#4．若如图所示的两个四边形相似，则 $\angle\alpha$ 的度数是（ ）．


A．$87^\circ$　　B．$60^\circ$　　C．$75^\circ$　　D．$120^\circ$

【答案】A

【解析】两四边形相似，则各内角相等，且四边形内角和为 $360^\circ$，所以 $\angle\alpha=360^\circ-60^\circ-138^\circ-75^\circ=87^\circ$．故答案为A．

#5．已知 $2\sin\alpha=1$（$\alpha$ 为锐角），则 $\alpha$ 的度数为（ ）．

A．$30^\circ$　　B．$45^\circ$　　C．$15^\circ$　　D．$60^\circ$

【答案】C

【解析】$\because 2\sin\alpha=1$，$\therefore \sin\alpha=\dfrac{1}{2}$，即 $\alpha=2k\ +\dfrac{\pi}{6}$ 或 $2k\ +\dfrac{5}{6}$，

$\because \alpha$ 为锐角，$\therefore$ $\alpha=\dfrac{\pi}{6}$，即 $30^\circ$.

故答案为A.

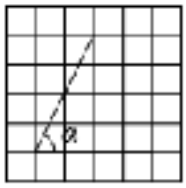
#6．已知二次函数 $y=2(x+1)(x-a)$，其中 $a>0$，若当 $x\le 2$ 时，$y$ 随 $x$ 增大而减小，当 $x\ge 2$ 时 $y$ 随 $x$ 增大而增大，则 $a$ 的值是（ ）.

A．3　　B．5　　C．7　　D．不确定

【答案】D

【解析】$y=2(x+1)(x-a)=2(x^2-ax+x-a)=2(x-\dfrac{a-1}{2})^2-2a-\dfrac{(a-1)^2}{2}$，由题意可知，对称轴为 $x=2$，故 $\dfrac{a-1}{2}=2$，则 $a=5$．故答案为B.

#7．将 $\angle\alpha$ 放置在正方形网格纸中，位置如图所示，则 $\tan\alpha$ 的值是（ ）.

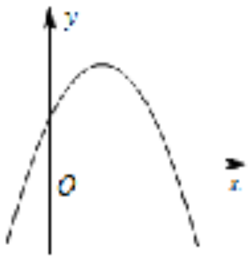


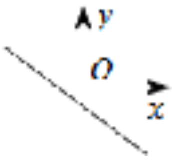

A．2　　B．$\dfrac{1}{2}$　　C．$\dfrac{\sqrt{5}}{2}$　　D．$\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$

【答案】A

【解析】数方格即可．$\tan\alpha=\dfrac{4}{2}=2$．故答案为A.

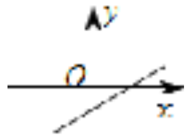
#8．已知函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图象如图所示，则函数 $y=ax+b$ 的图象是（ ）.




A．


B．


C．


D．

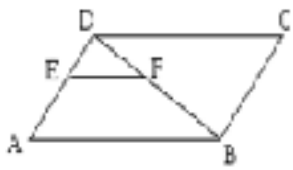

【答案】B

【解析】根据图中二次函数的图象可看出，$a<0$，$-\dfrac{b}{2a}>0$，即 $b>0$，

一次函数 $y=ax+b$，其斜率 $a<0$，函数单调递减，$b>0$，函数与 $y$ 轴的交点在 $x$ 轴上方.

故答案为B.

#9．如图，平行四边形 $ABCD$ 中，$EF \parallel AB$，$DE:EA=1:2$，$EF=4$，则 $CD$ 的长为（ ）.




A．$\dfrac{4}{3}$　　B．8　　C．12　　D．16

【答案】C

【解析】$\because EF \parallel AB$，$\therefore \triangle DEF \backsim \triangle DAB$，

$\therefore \dfrac{EF}{AB}=\dfrac{DE}{DA}=\dfrac{1}{3}$,

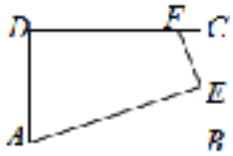
$\therefore AB=3EF=12$,

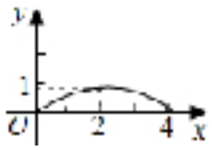
又四边形 $ABCD$ 为平行四边形,

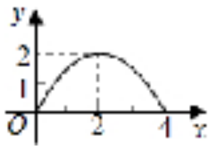
$\therefore AB=CD=12$.

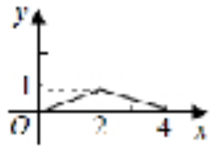
故答案为C.

#10. 如图，已知矩形 $ABCD$ 的长 $AB$ 为 $5$，宽 $BC$ 为 $4$．$E$ 是 $BC$ 边上的一个动点，$AE\perp EF$，$EF$ 交 $CD$ 于点 $F$．设 $BE=x$，$FC=y$，则点 $E$ 从点 $B$ 运动到点 $C$ 时，能表示 $y$ 关于 $x$ 的函数关系的大致图象是（ ）.

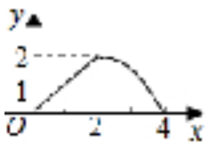



A. 

B. 

C. 

D .




【答案】A

【解析】$\because BC=4$，$BE=x$，

$\therefore CE=4-x$.

$\because AE\perp EF$，

$\therefore \angle AEB+\angle CEF=90^\circ$，

$\because \angle CEF+\angle CFE=90^\circ$，

$\therefore \angle AEB=\angle CFE$.

又 $\because \angle B=\angle C=90^\circ$，

$\therefore \mathrm{Rt}\triangle AEB\backsim \mathrm{Rt}\quad EFC$，

$\therefore \dfrac{AB}{CE}=\dfrac{BE}{CF}$，即 $\dfrac{5}{4-x}=\dfrac{x}{y}$，

整理得：$y=\dfrac{1}{5}(4x-x^2)=-\dfrac{1}{5}(x-2)^2+\dfrac{4}{5}$，

$\therefore y$ 关于 $x$ 的函数关系式为：$y=-\dfrac{1}{5}(x-2)^2+\dfrac{4}{5}$（$0\le x\le 4$），

由关系式可知，函数图象为一段抛物线，开口向下，顶点坐标为 $(2,\dfrac{4}{5})$，对称轴为直线 $x=2$.

故答案为A.

## 二、填空题（本大题共6小题，每小题3分，共18分）

#11．已知 $\frac{a+b}{b}=\frac{5}{2}$，则 $\frac{b}{a}=$ __________．

【答案】$\frac{3}{2}$

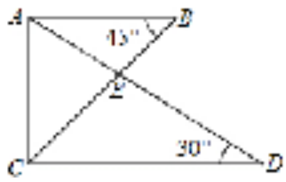
【解析】$\frac{a+b}{b}=\frac{a}{b}+1=\frac{5}{2}$，故 $\frac{a}{b}=\frac{3}{2}$．

#12．已知方程 $ax^2+bx+c=0$（$a\neq 0$）的解是 $x_1=5$，$x_2=-3$，那么抛物线 $y=ax^2+bx+c$（$a\neq 0$）与 $x$ 轴的两个交点的坐标分别是__________．

【答案】$(5,0)$、$(-3,0)$

【解析】抛物线与 $x$ 轴的两个交点即为方程 $ax^2+bx+c=0$ 的解，所以交点坐标为 $(5,0)$ 和 $(-3,0)$．

#13．将一副三角尺如图所示叠放在一起，则 $\frac{BE}{EC}$ 的值是__________．




【答案】$\frac{\sqrt{3}}{3}$

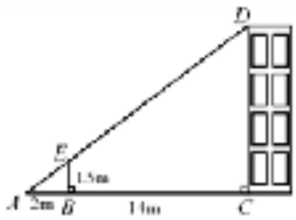
【解析】根据特殊三角形的性质可知，$AB=AC$，$CD=\sqrt{3}AC$，

由于 $AB\parallel CD$，$\therefore \triangle ABE\backsim\ DCE$，

$\therefore \frac{AB}{CD}=\frac{BE}{EC}=\frac{1}{\sqrt{3}}$．

即 $\frac{BE}{EC}=\frac{\sqrt{3}}{3}$．

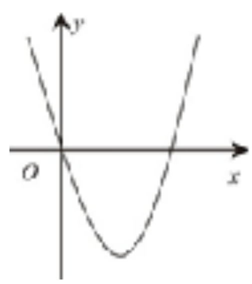
#14．如图，利用标杆 $BE$ 测量建筑物的高度，标杆 $BE$ 高 $1.5$ 米，测得 $AB=2$ 米，$BC=14$ 米，则楼高 $CD$ 为__________米．




【答案】12

【解析】根据相似可得：$\frac{BE}{CD}=\frac{AB}{AC}$，即 $\frac{1.5}{CD}=\frac{2}{2+14}=\frac{1}{8}$，则 $CD=12$ 米．

#15．如图，这个二次函数图象的表达式可能是__________．（只写出一个）



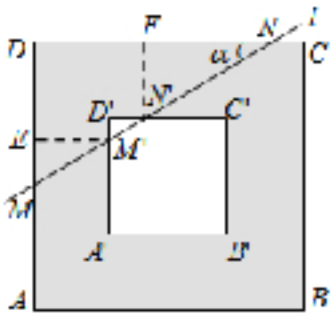

【答案】$y=x^2-2x$

【解析】二次函数开口向上，即 $a>0$，而该点经过原点，则 $c=0$，

又该函数对称轴在 $y$ 轴右侧，则 $b<0$．

可写出该二次函数的表达式可能为 $y=x^2-2x$．

#16．我们把对称中心重合，四边分别平行的两个正方形之间的部分叫做“方环形”，易知方环形四周的宽度相等．当直线 $l$ 与方环形的邻边相交时（如图），$l$ 分别交 $AD$、$A'D'$、$D'C'$、$DC$ 于 $M$、$M'$、




$N'$、$N$，$l$ 与 $DC$ 的夹角为 $\alpha$，那么 $\dfrac{MM'}{N'N}$ 的值为__________（用含 $\alpha$ 的三角比表示）．

【答案】$\tan\alpha$

【解析】$\because EM' \parallel CD$，

$\therefore \angle EM'M = \angle DNN' = \alpha$，

在 $\mathrm{Rt}\triangle FNN'$ 中，$\sin\alpha = \dfrac{FN'}{NN'}$，

$\therefore NN' = \dfrac{FN'}{\sin\alpha}$，

在 $\mathrm{Rt}\triangle EMM'$ 中，$\cos\alpha = \dfrac{EM'}{MM'}$，

$\therefore MM' = \dfrac{EM'}{\cos\alpha}$，

$\therefore \dfrac{MM'}{N'N} = \dfrac{EM'\cdot\sin\alpha}{FN'\cdot\cos\alpha}$，

而 $EM' = FN'$，

$\therefore \dfrac{MM'}{N'N} = \tan\alpha$．

三、解答题（本大题共13小题，共72分，第17-26题，每题5分，第27题7分，第28题7分，第29题8分，解答应写出必要的文字说明、证明过程或演算步骤）

#17．计算：$\tan 30° - \cos 60° \times \tan 45° + \sin 30°$．

【答案】$\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

【解析】$\tan 30° - \cos 60° \times \tan 45° + \sin 30° = \dfrac{\sqrt{3}}{3} - \dfrac{1}{2}\times 1 + \dfrac{1}{2} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$．

#18．如图，在 $\triangle ABC$ 中，$D$、$E$ 两点分别在 $AC$、$AB$ 两边上，$\angle ABC = \angle ADE$，$AB = 7$，$AD = 3$，$AE = 2.7$，求 $AC$ 的长．


【答案】$\dfrac{\sqrt{3}}{3}$．

【解析】在 $\triangle ABC$ 和 $\triangle ADE$ 中，

$\because \angle ABC = \angle ADE$，$\angle A = \angle A$，

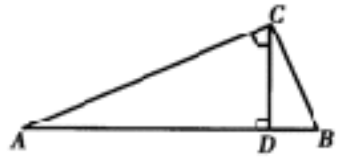
$\therefore \triangle ABC \backsim \triangle ADE$，

$\therefore \dfrac{AB}{AD}=\dfrac{AC}{AE}$，

$\therefore AC=\dfrac{AB\cdot AE}{AD}=\dfrac{7\times 2.7}{3}=6.3$．

#19．已知：如图，$\triangle ABC$ 中，$\angle ACB=90°$，$CD\perp AB$ 于 $D$，$AB=8$，$BC=3$．

求：$\sin\angle ACD$ 的值及 $AD$ 的长




【答案】$\dfrac{\sqrt{55}}{8}$，$\dfrac{55}{8}$．

【解析】在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中，$AC=\sqrt{AB^2-BC^2}=\sqrt{8^2-3^2}=\sqrt{55}$，

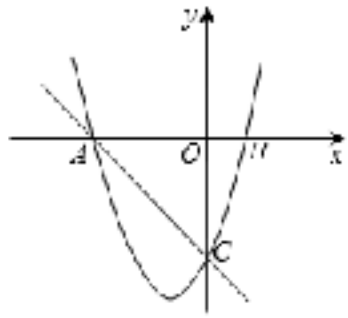
$\because \angle ACD+\angle BCD=\angle B+\angle BCD=90°$，

$\therefore \angle B=\angle ACD$，

$\therefore \sin\angle ACD=\sin B=\dfrac{AC}{AB}=\dfrac{\sqrt{55}}{8}$，

$AD=AC\cdot\sin\angle ACD=\sqrt{55}\cdot\dfrac{\sqrt{55}}{8}=\dfrac{55}{8}$．

#20．如图，二次函数 $y_1=x^2+bx+c$ 的图象与 $x$ 轴交于 $A$、$B$ 两点，与 $y$ 轴交于点 $C$，且点 $B$ 的坐标为 $(1,0)$，点 $C$ 的坐标为 $(0,-3)$，一次函数 $y_2=mx+n$ 的图象过点 $A$、$C$．




@（1）求二次函数的解析式．

【答案】$y_1=x^2+2x-3$．

【解析】点 $B$ 的坐标为 $(1,0)$，点 $C$ 的坐标为 $(0,-3)$，

代入到二次函数解析式中 $y_1=x^2+bx+c$，

即 $\begin{cases}0=1^2+b+c\\-3=c\end{cases}$，解得 $\begin{cases}b=2\\c=-3\end{cases}$，

故二次函数的解析式为 $y_1=x^2+2x-3$．

@（2）求二次函数的图象与 $x$ 轴的另一个交点 $A$ 的坐标．

【答案】$(-3,0)$．

【解析】令 $x^2+2x-3=0$，解得 $x_2=-3$，即另一个交点 $A$ 的坐标为 $(-3,0)$．

@（3）根据图象写出 $y_2<y_1$ 时，$x$ 的取值范围．

【答案】$x>1$ 或 $x<0$．

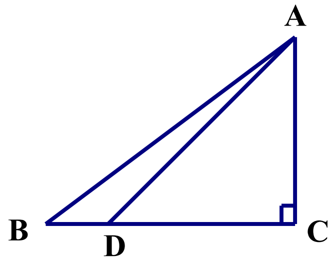
【解析】一次函数经过点 $A$、$C$，即 $\begin{cases}m+n=0\\n=-3\end{cases}$，

解得 $\begin{cases}m=3\\n=-3\end{cases}$，$\therefore$一次函数解析式为 $y_2=3x-3$，

当$y_2 < y_1$时，可令$3x-3<x^2+2x-3$，

解得$x>1$或$x<0$．

#21．如图，在$\mathrm{Rt}\triangle ABC$中，$\angle C=90^\circ$，$\sin B=\dfrac{3}{5}$，点$D$在$BC$边上，$DC=AC=6$，求$\tan\angle BAD$的值．




【答案】$\dfrac{1}{7}$．

【解析】在$\mathrm{Rt}\triangle ABC$中，$\because\sin B=\dfrac{3}{5}$，$\therefore\tan\angle BAC=\dfrac{4}{3}$，

又$DC=AC=6$，$\therefore\tan\angle CAD=1$，

$\therefore$ $$\tan\angle BAD=\tan(\angle BAC-\angle CAD)=\frac{\tan\angle BAC-\tan\angle CAD}{1+\tan\angle BAC\cdot\tan\angle CAD}=\frac{\frac{4}{3}-1}{1+\frac{4}{3}\cdot 1}=\frac{1}{7}$$．

#22．飞机着陆后滑行的距离$s$（单位：$m$）与滑行的时间$t$（单位：$s$）的函数关系式是$s=60t-1.5t^2$．飞机着陆后滑行多远才能停下来？飞机着陆后滑行多长时间能停下来？

【答案】飞机着陆后滑行$20s$后，滑出$600\mathrm{m}$才能停下来．

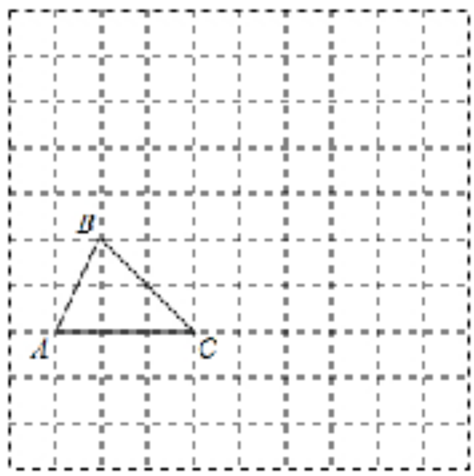
【解析】飞机要停下来，即$s$取最大值．

$s=60t-1.5t^2=-1.5(t^2-40t)=-1.5(t-20)^2+600$，

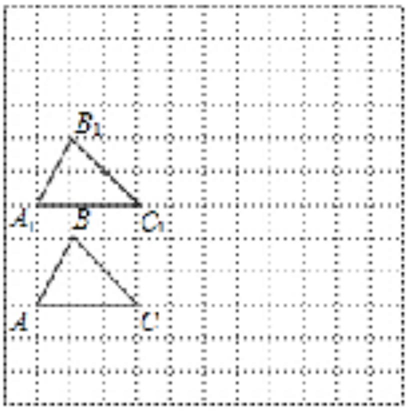
$\therefore$当$t=20$时，$s_{\max}=600$．

即飞机着陆后滑行$20s$后，滑出$600\mathrm{m}$才能停下来．

#23．如图，在边长为1个单位长度的小正方形组成的网格中，给出了格点$\triangle ABC$（顶点是网格线的交点）．



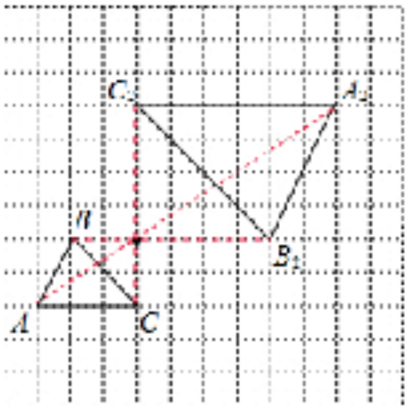

@（1）将$\triangle ABC$向上平移3个单位得到$\triangle A_1B_1C_1$，请画出$\triangle A_1B_1C_1$．




【答案】 图1

【解析】见答案图1.

@（2）请画一个格点$\triangle A_2B_2C_2$，使$\triangle A_2B_2C_2\backsim\triangle ABC$，且相似比不为1.

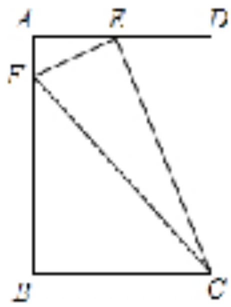



【答案】 如图2 .

【解析】见答案图2.

#24．如图，矩形$ABCD$中，$E$为$AD$中点，$EF\perp EC$交$AB$于点$F$，连接$FC$（$AB>AE$），$\triangle AEF$和$\triangle EFC$相似吗？若相似，证明你的结论；若不相似，请说明理由.

【答案】相似，证明见解析.




【解析】$\triangle AEF\backsim\triangle EFC$.

证明：延长$FE$与$CD$的延长线交于$G$，

$\because E$为$AD$中点，$AE=DE$，$\angle AEF=\angle GED$，

$\therefore \mathrm{Rt}\triangle AEF\cong\mathrm{Rt}\triangle DEG$.

$\therefore EF=EG$，

$\because CE=CE$，$\angle FEC=\angle CEG=90^\circ$，

$\therefore \mathrm{Rt}\triangle EFC\cong\mathrm{Rt}\triangle EGC$，

$\therefore \angle AFE=\angle EGC=\angle EFC$.

又$\because \angle A=\angle FEC=90^\circ$，

$\therefore \mathrm{Rt}\triangle AEF\cong\mathrm{Rt}\triangle ECF$.

#25．《九章算术》是中国传统数学最重要的著作，奠定了中国传统数学的基本框架．其中卷第九勾股，主要讲述了以测量问题为中心的直角三角形三边互求的关系．其中记载：“今有邑方二百步，各中开门．出东门一五步有木．问出南门几何步而见木？”译文：“今有正方形小城边长为 $200$ 步，各方中央开一城门．走出东门 $15$ 步处有树，问出南门多少步能见到树？”请你结合题意画出图形，并完成求解．

【答案】$\dfrac{2000}{3}$．

【解析】根据题意作出示意图，$BD=AD=BF=100$，$BC=15$，

则有 $\triangle EAD\backsim EFC$，

$\therefore \dfrac{EA}{EF}=\dfrac{AD}{CF}$，

$\therefore \dfrac{AE}{100+AE}=\dfrac{100}{115}$，

解得：$AE=\dfrac{2000}{3}$．

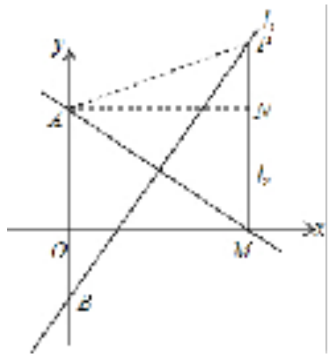
即出南门 $\dfrac{2000}{3}$ 步才能见到树．

#26．@（1）在平面直角坐标系中，点 $A$ 的坐标是 $(0,2)$．在 $x$ 轴上任取一点 $M$，完成下列作图步骤：

①连接 $AM$，作线段 $AM$ 的垂直平分线 $l_1$，过 $M$ 作 $x$ 轴的垂线 $l_2$，记 $l_1$、$l_2$ 的交点为 $P$．

②在 $x$ 轴上多次改变点 $M$ 的位置，用①的方法得到相应的点 $P$，把这些点用平滑的曲线连接起来．观察画出的曲线 $L$，猜想它是我们学过的哪种曲线．

【答案】$y=\dfrac{1}{4}x^2+1$，抛物线．




【解析】如图所示，

连接 $AP$，过点 $A$ 作 $AN\perp PM$，

$\because BP$ 是 $AM$ 的垂直平分线，

$\therefore AP=PM=y$．

$\because PM\perp x$ 轴，

$\therefore AN=x$，$P(x,y)$，$PN=y-2$，

$\therefore AN^2+PN^2=AP^2$，即 $x^2+(y-2)^2=y^2$，即 $y=\dfrac{1}{4}x^2+1$．

@（2）对于曲线 $L$ 上任意一点 $P$，线段 $PA$ 与 $PM$ 有什么关系？设点 $P$ 的坐标为 $(x,y)$，你能由 $PA$ 与 $PM$ 的关系得到 $x$、$y$ 满足的关系式吗？你能由此确定曲线 $L$ 是哪种曲线吗？你得出的结论与（1）中你的猜想一样吗？

【答案】$PA=PM$，$y=\dfrac{1}{4}x^2+1$，抛物线．

【解析】证明见第一问的解析．

#27．已知：抛物线 $y=ax^2-2(a-1)x+a-2(a>0)$．

@（1）求证：抛物线与 $x$ 轴有两个交点．

【答案】证明见解析．

【解析】$ax^2-2(a-1)x+a-2=0$，

$\therefore \Delta=[-2(a-1)]^2-4a(a-2)=4$，

即 $\Delta>0$．

$\therefore$抛物线与 $x$ 轴有两个交点．

@（2）设抛物线与 $x$ 轴有两个交点的横坐标分别为 $x_1$，$x_2$（其中 $x_1>x_2$）．若 $y$ 是关于 $a$ 的函数，且 $y=ax_2+x_1$，求这个函数的表达式．

【答案】$y=a-1(a>0)$．

【解析】由求根公式，得 $x=\dfrac{2(a-1)\pm 2}{2a}$，

$\therefore x=1$ 或 $x=1-\dfrac{2}{a}$．

$\because a>0$，$x_1>x_2$，

$\therefore x_1=1$，$x_2=1-\dfrac{2}{a}$．

$\therefore y=ax_2+x_1=a-1$．

即 $y=a-1(a>0)$ 为所求．

@（3）在（2）的条件下，结合函数的图象回答：若使 $y\le -3a^2+1$，则自变量 $a$ 的取值范围为__________．

【答案】$0<a\le\dfrac{2}{3}$．

【解析】作出函数图象，即可得到．

#28．对某一种四边形给出如下定义：有一组对角相等而另一组对角不相等的凸四边形叫做“等对角四边形”．

@（1）已知：如图1，四边形 $ABCD$ 是“等对角四边形”，$\angle A\ne\angle C$，$\angle A=70^\circ$，$\angle B=80^\circ$．则 $\angle C=$__________度，$\angle D=$__________度．

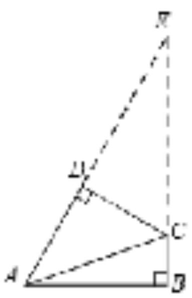
图1

【答案】$\angle C=130^\circ$，$\angle D=80^\circ$．

【解析】根据定义可知，$\angle B=\angle D=80^\circ$，$\angle C=360^\circ-2\cdot 80^\circ-\angle A=130^\circ$

@（2）在探究“等对角四边形”性质时：

小红画了一个“等对角四边形 $ABCD$”（如图2），其中 $\angle ABC=\angle ADC$，$AB=AD$，此时她发现 $CB=CD$ 成立．请你证明此结论．



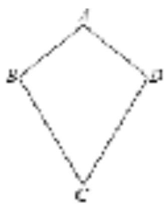


图2

【答案】证明见解析.

【解析】①如图2，连接 $BD$，

$\because AB=AD$，

$\therefore \angle ABD=\angle ADB$.

$\because \angle ABC=\angle ADC$，

$\therefore \angle ABC-\angle ABD=\angle ADC-\angle ADB$.

$\therefore \angle CBD=\angle CDB$.

$\therefore CB=CD$.

@（3）已知：在“等对角四边形 $ABCD$”中，$\angle DAB=60^\circ$，$\angle ABC=90^\circ$，$AB=5$，$AD=4$．求对角线 $AC$ 的长.

【答案】$2\sqrt{7}$ 或 $2\sqrt{13}$.

【解析】（I）如图，当 $\angle ADC=\angle ABC=90^\circ$ 时，延长 $AD$、$BC$ 相交于点 $E$，

$\because \angle ABC=90^\circ$，$\angle DAB=60^\circ$，$AB=5$，

$\therefore AE=10$.

$\therefore DE=AE-AD=10-4=6$.

$\because \angle EDC=90^\circ$，$\angle E=30^\circ$，

$\therefore CD=2\sqrt{3}$.

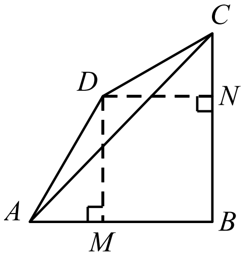
$\therefore AC=2\sqrt{7}$.

（II）如图，当 $\angle BCD=\angle DAB=60^\circ$ 时，过点 $D$ 作 $DM\perp AB$ 于点 $M$，$DN\perp BC$ 于点 $N$，

$\because DM\perp AB$，$\angle DAB=60^\circ$，$AD=4$，

$\therefore AM=2$，$DM=2\sqrt{3}$.

$\therefore BM=AB-AM=5-2=3$.




$\because$四边形 $BNDM$ 是矩形，

$\therefore DN=BM=3$，$BN=DM=2\sqrt{3}$.

$\because \angle BCD=60^\circ$，

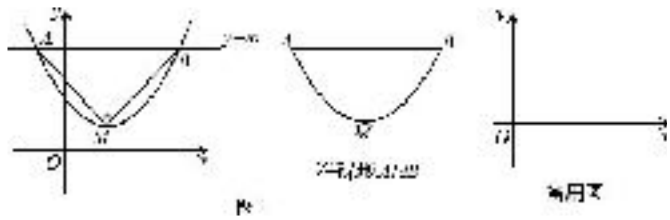
$\therefore CN=\sqrt{3}$.

$\therefore BC=CN+BN=3\sqrt{3}$.

$\therefore AC=2\sqrt{13}$.

即 $AC=2\sqrt{7}$ 或 $2\sqrt{13}$.

#29．如图1，抛物线 $y=ax^2+bx+c(a\neq 0)$ 的顶点为 $M$，直线 $y=m$ 与 $x$ 轴平行，且与抛物线交于点 $A$、$B$，若 $\triangle AMB$ 为等腰直角三角形，我们把抛物线上 $A$、$B$ 两点之间的部分与线段 $AB$ 围成的图形称为该抛物线对应的准蝶形，线段 $AB$ 称为碟宽，顶点 $M$ 称为碟顶，点 $M$ 到线段 $AB$ 的距离称为碟高.

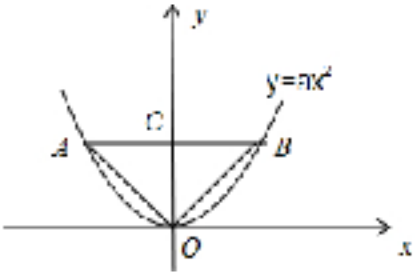


@（1）抛物线 $y=\frac{1}{2}x^2$ 对应的碟宽为__________；抛物线 $y=4x^2$ 对应的碟宽为__________；抛物线 $y=ax^2$（$a>0$）对应的碟宽为__________；抛物线 $y=a(x-2)^2+3(a>0)$ 对应的碟宽__________.

【答案】$4$，$\frac{1}{2}$，$\frac{2}{a}$，$\frac{2}{a}$.

【解析】$\because a>0$，

$\therefore y=ax^2$ 的图象大致如下：




其必过原点 $O$，记 $AB$ 为其碟宽，$AB$ 与 $y$ 轴的交点为 $C$，连接 $OA$、$OB$，

$\because \triangle OAB$ 为等腰直角三角形，$AB \parallel x$ 轴，

$\therefore OC\perp AB$，

$\therefore \angle AOC=\angle BOC=\frac{1}{2}\angle AOB=\frac{1}{2}\cdot 90^\circ=45^\circ$，

$\therefore \triangle ACO$ 与 $\triangle BCO$ 亦为等腰直角三角形，

$\therefore AC=OC=BC$，

$\therefore x_A=y_A$，$x_B=y_B$，代入 $y=ax^2$，

$\therefore A(-\frac{1}{a},\frac{1}{a})$，$B(\frac{1}{a},\frac{1}{a})$，$C(0,\frac{1}{a})$，

$\therefore AB=\frac{2}{a}$，$OC=\frac{1}{a}$，

即 $y=ax^2$ 的碟宽为 $\frac{2}{a}$.

①抛物线 $y=\frac{1}{2}x^2$ 对应的 $a=\frac{1}{2}$，得碟宽 $\frac{2}{a}$ 为 $4$；

②抛物线 $y=4x^2$ 对应的 $a=4$，得碟宽 $\frac{2}{a}$ 为 $\frac{1}{2}$；

③抛物线 $y=ax^2$（$a>0$），碟宽为 $\frac{2}{a}$；

④抛物线$y=a(x-2)^2-3(a>0)$可看成$y=ax^2$向右平移2个单位长度，再向上平移3个单位长度后得到的图形，

∵平移不改变形状、大小、放心，

∴抛物线$y=a(x-2)^2-3(a>0)$的准蝶形≌抛物线$y=ax^2$的准碟，

∵抛物线$y=ax^2$（$a>0$），碟宽为$\frac{2}{a}$，

∴抛物线$y=a(x-2)^2-3(a>0)$，碟宽为$\frac{2}{a}$．

@（2）若抛物线$y=ax^2-4ax-\frac{5}{3}(a>0)$对应的碟宽为6，且在$x$轴上，求$a$的值．

【答案】$a=\frac{1}{3}$．

【解析】∵$y=ax^2-4ax-\frac{5}{3}=a(x-2)^2-(4a+\frac{5}{3})$，

∴同（1），其碟宽为$\frac{2}{a}$，

∵$y=ax^2-4ax-\frac{5}{3}$的碟宽为6，

∴$\frac{2}{a}=6$，

解得$a=\frac{1}{3}$，

∴$y=\frac{1}{3}(x-2)^2-3$．

@（3）将抛物线$y_n=a_nx^2+b_nx+c_n(a_n>0)$的对应准蝶形记为$F_n$（$n=1$，2，3，…），定义$F_1$，$F_2$，…，$F_n$为相似准蝶形，相应的碟宽之比即为相似比．若$F_n$与$F_{n-1}$的相似比为$\frac{1}{2}$，且$F_n$的碟顶是$F_{n-1}$的碟宽的中点，现在将（2）中求得的抛物线记为$y_1$，其对应的准蝶形记为$F_1$．

@@①求抛物线$y_2$的表达式．

【答案】$2\sqrt{7}$或$2\sqrt{13}$．

【解析】①∵$F_1$的碟宽：$F_2$的碟宽$=2:1$，

∴$\frac{2}{a_1}=\frac{4}{a_2}$，

∵$a_1=\frac{1}{3}$，

∴$a_2=\frac{2}{3}$．

$\because y=\frac{1}{3}(x-2)^2-3$ 的碟宽 $AB$ 在 $x$ 轴上（$A$ 在 $B$ 左边），

$\therefore A(-1,0)$，$B(5,0)$，

$\therefore F_2$ 的碟顶坐标为 $(2,0)$，

$\therefore y_2=\frac{2}{3}(x-2)^2$．

②$\because F_n$ 的准蝶形为等腰直角三角形，

$\therefore F_n$ 的碟宽为 $2h_n$，

$\because 2h_n:2h_{n-1}=1:2$，

$\therefore h_n=\frac{1}{2}h_{n-1}=(\frac{1}{2})^2h_{n-2}=(\frac{1}{2})^3h_{n-3}=\boxed{?}=(\frac{1}{2})^{n-1}h_1$，

$\because h_1=3$，

$\therefore h_n=\frac{3}{2^{n-1}}$．

$\because h_n \parallel h_{n-1}$，且都过 $F_{n-1}$ 的碟宽中点，

$\therefore h_1$、$h_2$、$h_3$、…、$h_{n-1}$、$h_n$ 都在一条直线上，

$\because h_1$ 在直线 $x=2$ 上，

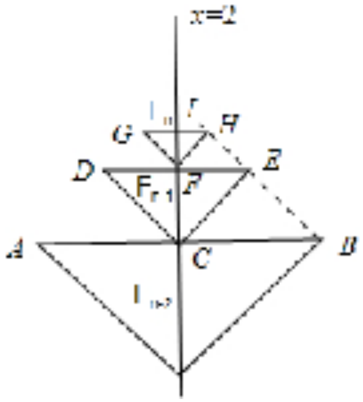
$\therefore h_1$、$h_2$、$h_3$、…、$h_{n-1}$、$h_n$ 都在直线 $x=2$ 上，

$\therefore F_n$ 的碟宽右端点横坐标为 $2+\frac{3}{2^{n-1}}$．

令，$F_1$，$F_2$，…，$F_n$ 的碟宽右端点在一条直线上，直线为 $y=-x+5$．

分析如下：

考虑 $F_{n-2}$，$F_{n-1}$，$F_n$ 情形，关系如图，




$F_{n-2}$，$F_{n-1}$，$F_n$ 的碟宽分别为 $AB$，$DE$，$GH$；$C$，$F$，$I$ 分别为其碟宽的中点，都在直线 $x=2$ 上，连接右端点 $BE$，$EH$．

$\because AB \parallel x$ 轴，$DE \parallel x$ 轴，$GH \parallel x$ 轴，

$\therefore AB \parallel DE$ $GH$，

$\therefore GH$ 平行相等于 $FE$，$DE$ 平行相等于 $CB$，

$\therefore$四边形 $GFEH$、四边形 $DCBE$ 都为平行四边形，

$\therefore HE \parallel GF$，$EB \parallel DC$，

$\because \angle GFI=\frac{1}{2}\cdot\angle GFH=\frac{1}{2}\cdot\angle DCE=\angle DCF$，

$\therefore GF \parallel DC$，

$\therefore HE \parallel EB$，

$\because HE$、$EB$ 都过 $E$ 点，

$\therefore HE$ 、 $EB$ 都在一条直线上，

$\therefore F_{n-2}$ ， $F_{n-1}$ ， $F_n$ 的碟宽右端点是在一条直线，

$\therefore F_1$ ， $F_2$ ， …， $F_n$ 的碟宽右端点是在一条直线．

$\because F_1 : y_1 = \frac{1}{3}(x-2)^2 - 3$ 准蝶形右端点坐标为 $(5,0)$ ，

$F_2 : y_2 = \frac{2}{3}(x-2)^2$ 准蝶形右端点坐标为 $(2+\frac{3}{2},\frac{3}{2})$ ，

$\therefore$ 待定系数可得过两点的直线为 $y=-x+5$ ，

$\therefore F_1$ ， $F_2$ ， …， $F_n$ 的碟宽右端点是在直线 $y=-x+5$ 上．