2015年北京第八中学初三上学期期中数学试卷

一、选择题（本大题共10小题，每小题只有唯一正确答案．每小题4分，共40分）

#1．如果 $\frac{a+2b}{b}=\frac{5}{2}$，那么 $\frac{a}{b}$ 的值是（ ）．

A．$\frac{1}{2}$　　B．2　　C．$\frac{1}{5}$　　D．

【答案】D

【解析】$\frac{a+2b}{b}=\frac{a}{b}+2=\frac{5}{2}$，所以 $\frac{a}{b}=\frac{1}{2}$．

#2．关于 x 的一元二次方程 $x^2+mx+4=0$ 有两个正整数根，则 m 可能取的值为（ ）．

A．$m>0$　　B．$m>4$　　C．-4，-5　　D．4，5

【答案】C

【解析】根据韦达定理可知，$-m>0$，即 $m<0$．故选 C．

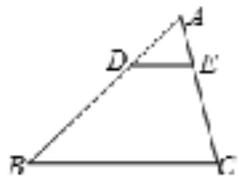
#3．将抛物线 $y=(x-1)^2+3$ 向左平移 1 个单位，向下平移 3 个单位后所得抛物线的解析式为（ ）．

A．$y=(x-2)^2$　　B．$y=(x-2)^2+6$　　C．$y=x^2+6$　　D．$y=x^2$

【答案】D

【解析】将抛物线 $y=(x-1)^2+3$ 向左平移 1 个单位得到 $y=x^2+3$，再向下平移 3 个单位后得到 $y=x^2$，故答案为D．

#4．如图，在 $\triangle ABC$ 中，$DE\parallel BC$，分别交 AB、AC 于点 D、E．若 $AD=1$，$DB=2$，则 $\triangle ADE$ 的面积与 $\triangle ABC$ 的面积的比等于（ ）．



A．$\frac{1}{2}$　　B．$\frac{1}{4}$　　C．$\frac{1}{8}$　　D．$\frac{1}{9}$

【答案】B

【解析】在 $\triangle ABC$ 中，$DE\parallel BC$，$\therefore \triangle ADE\backsim ABC$，此时 $\frac{AD}{AB}=\frac{AD}{AD+BD}=\frac{1}{3}$，则 $\frac{S_{\triangle ADE}}{S_{\triangle ABC}}=\frac{1}{9}$．故答案为D．

#5．某商店购进一种商品，单价为 30 元．试销中发现这种商品每天的销售量 P（件）与每件的销售价 x（元）满足关系：$P=100-2x$．若商店在试销期间每天销售这种商品获得 200 元的利润，根据题意，列方程为（ ）．

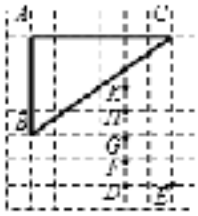
A．$30(100-2x)=x-200$　　B．$x(100-2x)-30x=200$

C．$30(100-2x)=200$　　D．$(x-30)(100-2x)=200$

【答案】D

【解析】每件商品的利润为（$x-30$）元，故总利润为 $P(x-30)=(100-2x)(x-30)=200$，故答案为D．

#6．如图，点 A、B、C、D、E、F、G、H、K 都是 7×8 方格纸中的格点，为使 $\triangle DEM\backsim\triangle ABC$，则点 M 所在位置应是 F、G、H、K 四点中的（ ）．

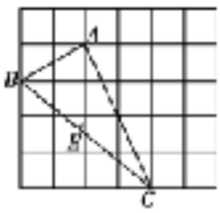


A．K　　B．H　　C．G　　D．F

【答案】B

【解析】按方格边长算，$AB=4$，$AC=6$，$BC=2\sqrt{13}$，$DE=2$，又 $\triangle DEM\backsim\triangle ABC$，$\therefore \dfrac{DE}{AB}=\dfrac{DM}{AC}=\dfrac{2}{4}$，$\therefore DM=3$．可从图中看出符合条件的点为 H．故答案为B．

#7．如图，在边长为1的小正方形组成的网格中，$\triangle ABC$ 的三个顶点均在格点上，E 为 BC 中点，则 $\sin\angle AEB$ 的值是（ ）．



A．$\dfrac{\sqrt{5}}{5}$　　B．$\dfrac{4}{5}$　　C．$\dfrac{3}{5}$　　D．$\dfrac{3}{4}$

【答案】B

【解析】$AB=\sqrt{5}$，$BE=\dfrac{1}{2}BC=\dfrac{\sqrt{3^2+4^2}}{2}=\dfrac{5}{2}$，$AE=\dfrac{5}{2}$，

在 $\triangle AEB$ 中，$\cos\angle AEB=\dfrac{AE^2+BE^2-AB^2}{2AE\cdot BE}=\dfrac{\dfrac{25}{4}+\dfrac{25}{4}-5}{2\cdot\dfrac{25}{4}}=\dfrac{3}{5}$，所以 $\sin\angle AEB=\dfrac{4}{5}$．

#8．若二次函数 $y=x^2+bx$ 的图象的对称轴是经过点 $(2,0)$ 且平行于 y 轴的直线，则关于 x 的方程 $x^2+bx=5$ 的解为（ ）．

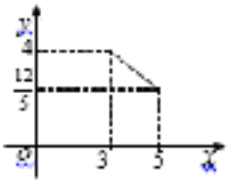
A．$x_1=0$，$x_2=4$　　B．$x_1=1$，$x_2=5$

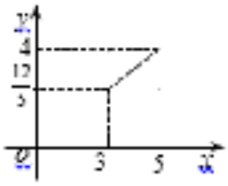
C．$x_1=1$，$x_2=-5$　　D．$x_1=-1$，$x_2=5$

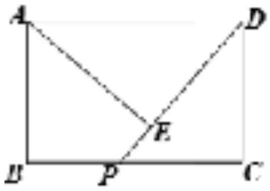
【答案】D

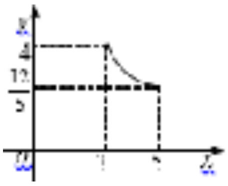
【解析】经过点 $(2,0)$ 且平行于 y 轴的直线为 $x=2$，即 $-\dfrac{b}{2}=2$，所以 $b=-4$，方程为 $x^2-4x=5$，解得 $x_1=-1$，$x_2=5$，故答案为D．

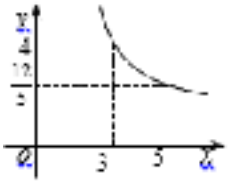
#9．如图，在矩形 $ABCD$ 中，$AB=3$，$BC=4$，点 P 在 BC 边上运动，连接 DP，过点 A 作 $AE\perp DP$，垂足为 E，设 $DP=x$，$AE=y$，则能反映 y 与 x 之间函数关系的大致图象是（ ）．

A．

B．



C．

D．

【答案】C

【解析】由题意可知$\triangle ADF \backsim \quad BEA$；

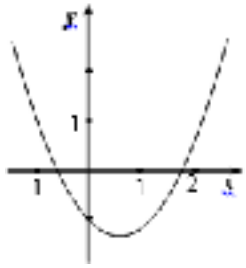
$\therefore \dfrac{x}{3}=\dfrac{4}{y}$；

$\therefore xy=12$，$y=\dfrac{12}{x}$，为反比例函数，

由于x最小应不$<AD$，最大不超过BD，所以$3\le x\le 5$．

故答案为C．

#10．如图是二次函数$y=ax^2+bx+c$（$a\ne 0$）在平面直角坐标系中的图象，根据图形判断①$b>0$；②$a-b+c<0$；③$2a+b>0$；④$b^2+8a>4ac$中正确的是（ ）．



A．①②　　B．①③　　C．③④　　D．②④

【答案】C

【解析】由图中可以看出，$a>0$，对称轴$0<x=-\dfrac{b}{2a}<1$，即$2a+b>0$且$b<0$，当$x=-1$时，$y=a-b+c>0$，二次函数与x轴有两个交点，可知$b^2-4ac>0$，即$b^2>4ac$，又$a>0$，所以$b^2+8a>4ac$，所以正确的是③④．故答案为C．

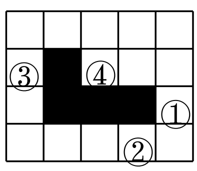
二、填空题（本大题共6小题，每小题4分，共24分）

#11．已知二次函数$y=2(x-3)^2+1$．当__________时，y随x的增大而减小．

【答案】$x\le 3$

【解析】要使y随x的增大而减小，必须在对称轴左侧，即$x\le 3$．

#12．在方格纸中，选择标有序号①②③④中的一个小正方形涂黑，使它与图中阴影部分组成的新图形构成中心对称图形，该小正方形的序号是__________．



【答案】②

【解析】要使新图形为中心对称图形，则只有②符合．

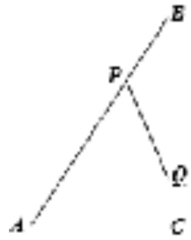
#13．如果关于x的一元二次方程$x^2+4x-m=0$没有实数根，那么m的取值范围是

________.

【答案】2

【解析】根据韦达定理可知，要使该一元二次方程没有实数根，$\Delta = 4^2 + 4m < 0$，即 $m < -4$.

#14．如图，$\mathrm{Rt}\triangle ABC$ 中，$\angle ACB = 90^\circ$，$AC = 6\mathrm{cm}$，$BC = 8\mathrm{cm}$，动点 P 从点 B 出发，在 BA 边上以每秒 $5\mathrm{cm}$ 的速度向点 A 匀速运动，同时动点 Q 从点 C 出发，在 CB 边上以每秒 $4\mathrm{cm}$ 的速度向点 B 匀速运动，运动时间为 t 秒（$0 < t < 2$），连接 PQ．若 $\triangle BPQ$ 与 $\triangle ABC$ 相似，则 t 的值为________.



【答案】1或 $\frac{32}{41}$

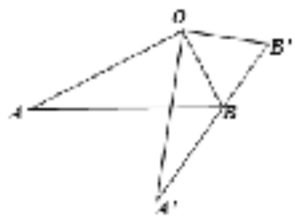
【解析】运动 t 秒后，$BP = 5t$，$CQ = 4t$，

当 $\triangle BPQ \backsim BAC$，$\therefore \frac{BP}{AB} = \frac{BQ}{BC}$，即 $\frac{5t}{10} = \frac{8-4t}{8}$，解得 $t = 1$；

当 $\triangle BPQ \backsim BCA$，$\therefore \frac{BP}{BC} = \frac{BQ}{BA}$，即 $\frac{5t}{8} = \frac{8-4t}{10}$，解得 $t = \frac{32}{41}$.

故答案为1或 $\frac{32}{41}$.

#15．如图，$\angle AOB = 90^\circ$，将 $\mathrm{Rt}\triangle OAB$ 绕点 O 按逆时针方向旋转至 $\mathrm{Rt}\triangle OA'B'$，使点 B 恰好落在边 $A'B'$ 上．已知 $\tan B = 2$，$OB = 5$，则 $BB' =$ ________.

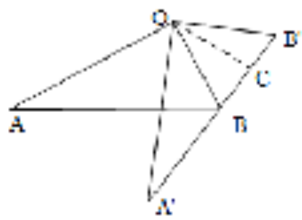


【答案】$2\sqrt{5}$

【解析】作 $OC \perp A'B'$ 于点 C，

在 $\mathrm{Rt}\triangle OB'C$ 中，$\tan B' = \tan B = 2$，则 $\cos B' = \frac{1}{\sqrt{5}}$，

又 $OB = 5$，$\therefore BB' = 2OB' \cdot \cos B' = 2\sqrt{5}$.



#16．在平面直角坐标系 xOy 中，直线 $x = 2$ 和抛物线 $y = ax^2$ 在第一象限交于点 A，过 A 作 $AB \perp x$ 轴于点 B．如果 a 取1，2，3，…，n 时对应的 $\triangle AOB$ 的面积为 S_1，S_2，S_3，…，S_n，那么 $S_1 =$ ________；$S_1 + S_2 + S_3 + \boxed{?} + S_n =$ ________.

【答案】4；$2n^2 + 2n$

【解析】直线 $x = 2$ 和抛物线 $y = ax^2$ 在第一象限交于点 $A(2, 4a)$，则 $S_i = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 4a = 4a$，

当 $a = 1$ 时，$S_1 = 4$；当 $a = n$ 时，$S_1 + S_2 + S_3 + \boxed{?} + S_n = 4(1 + 2 + 3 + \boxed{?} n) = 2n^2 + 2n$.

故答案为4，$2n^2 + 2n$.

三、解答题（共56分）

#17．计算：计算：$\sqrt{3}\cos30°+2^{-1}-\sqrt{2}\sin45°-(\sqrt{3}-1)^0$．

【答案】0．

【解析】$\sqrt{3}\cos30°+2^{-1}-\sqrt{2}\sin45°-(\sqrt{3}-1)^0=\sqrt{3}\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{1}{2}-\sqrt{2}\cdot\dfrac{\sqrt{2}}{2}-1=0$．

#18．解方程：$3x^2-x-1=0$．

【答案】$x_1=\dfrac{1+\sqrt{13}}{6}$，$x_2=\dfrac{1-\sqrt{13}}{6}$．

【解析】$\because a=3$，$b=-1$，$c=-1$，

$\therefore \Delta=b^2-4ac=13$，

$\therefore x=\dfrac{1\pm\sqrt{13}}{6}$，

即 $x_1=\dfrac{1+\sqrt{13}}{6}$，$x_2=\dfrac{1-\sqrt{13}}{6}$．

#19．如图，在$\triangle ABC$中，$AB=AC=8$，$BC=6$，点D为BC上一点，$BD=2$．过点D作射线DE交AC于点E，使$\angle ADE=\angle B$．求线段EC的长度．

【答案】$EC=1$．

【解析】$\because AB=AC$，

$\therefore \angle B=\angle C$，

又$\because \angle ADE+\angle CDE=\angle B+\angle BAD$，

$\therefore \angle BAD=\angle CDE$，

$\therefore \triangle ABD\backsim\ \ DCE$，

$\therefore \dfrac{AB}{DC}=\dfrac{BD}{EC}$，

$\therefore \dfrac{8}{4}=\dfrac{2}{EC}$，

$\therefore EC=1$．

#20．已知关于x的一元二次方程$x^2+2x+2k-4=0$有两个不相等的实数根．

@（1）求k的取值范围．

【答案】

【解析】根据题意得：$\Delta=4-4(2k-4)=20-8k>0$，

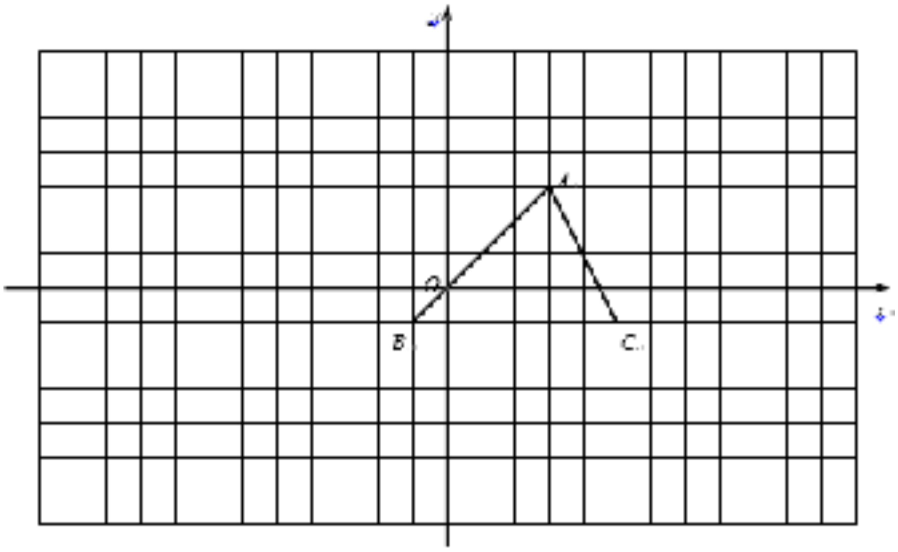
解得：$k<\dfrac{5}{2}$．

@（2）若k为正整数，且该方程的根都是整数，求k的值．

【答案】

【解析】若 k 为正整数，得到 $k=1$ 或 2 .

#21．如图，方格纸中的每个小方格都是边长为 1 的正方形，我们把以格点间连线为边的三角形称为格点三角形，图中的 $\triangle ABC$ 就是格点三角形．在建立平面直角坐标系后，点 B 的坐标为 $(-1,-1)$.



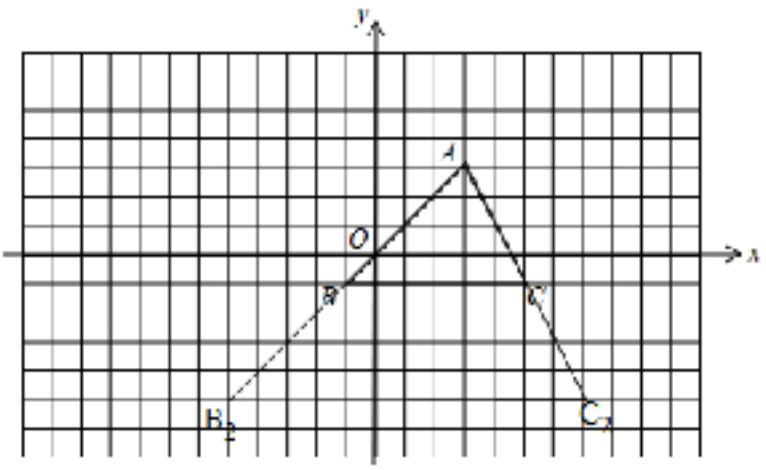
@（1）把 $\triangle ABC$ 绕点 A 按逆时针方向旋转 $90°$ 后得到 $\triangle AB_1C_1$ ，画出 $\triangle AB_1C_1$ 的图形并直接写出点 B_1 的坐标为__________.

【答案】$(7,-1)$.

【解析】见答案.

@（2）在现有坐标系下把 $\triangle ABC$ 以点 A 为位似中心放大，使放大前后对应边长的比为 $1:2$ ，画出 $\triangle AB_2C_2$.

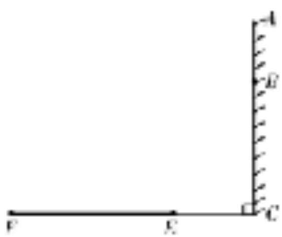
【答案】



.

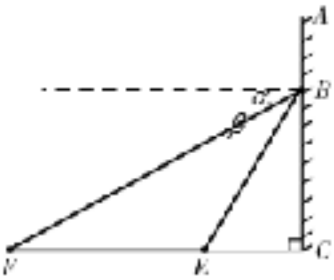
【解析】见答案.

#22．如图，小明住在一栋住宅楼 AC 上，他在家里的窗口点 B 处，看楼下一条公路的两侧点 F 和点 E 处（公路的宽为 EF ），测得俯角 α 、 β 分别为 $30°$ 和



$60°$，点 F、E、C 在同一直线上．

@（1）请你在图中画出俯角 α 和 β．

【答案】

．

【解析】见答案．

@（2）若小明家窗口到地面的距离 $BC=6$ 米，求公路宽 EF 是多少米？．（结果精确到 0.1 米；可能用到的数据 $\sqrt{3}\approx 1.73$）

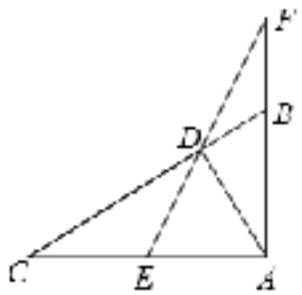
【答案】6.9．

【解析】由题意得：$\angle F=30°$，$\angle BEC=60°$，$BC\perp CF$，

$\therefore \tan F=\dfrac{BC}{CF}=\dfrac{6}{CF}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，$CF=6\sqrt{3}$，$\tan\angle BEC=\dfrac{BC}{CE}=\dfrac{6}{CE}=\sqrt{3}$，$CE=2\sqrt{3}$．

$\therefore EF=CF-CE=4\sqrt{3}\approx 6.9$（米）．

#23．已知在 $\triangle ABC$ 中，$\angle BAC=90°$，$AD\perp BC$ 于点 D，点 E 为 AC 中点，延长 ED、AB 交于点 F．求证：$\dfrac{AB}{AC}=\dfrac{DF}{FA}$．



【答案】证明见解析．

【解析】$\because AD\perp BC$，

$\therefore \angle ADB=\angle ADC=90°$，

$\because \angle BAC=90°$，

$\therefore \angle BAD+\angle CAD=90°$，

又 $\angle C+\angle CBA=90°$，

$\therefore \angle BAD=\angle C$，

$\because E$ 为 AC 中点，

$\therefore DE=AE=CE$，

$\therefore \angle C=\angle CDE$，

$\because \angle BDF=\angle CDE$，

$\therefore \angle BDF=\angle BAD$，

又 $\angle F=\angle F$，

$\therefore \triangle FDB\backsim \triangle FAD$，

$\therefore \dfrac{DF}{FA}=\dfrac{DB}{DA}$，

$\because \angle BAD=\angle C$，$\angle ADB=\angle BAC=90^\circ$，

$\therefore \triangle ADB \backsim \ \ CAB$，

$\therefore \dfrac{DB}{AB}=\dfrac{DA}{AC}$，

$\therefore \dfrac{AB}{AC}=\dfrac{DB}{DA}$，

$\therefore \dfrac{AB}{AC}=\dfrac{DF}{FA}$．

#24．已知：二次函数 $y=ax^2+bx+c$，y 与 x 的一些对应值如下表：

x	[?]	-1	0	1	2	3	4	[?]
ax^2+bx+c	[?]		3		-1		3	[?]

@（1）根据表格中的数据，确定二次函数解析式为．

【答案】$y=x^2-4x+3$．

【解析】当 $x=0$ 时，$y=c=3$；

当 $x=2$ 时，$y=4a+2b+c=-1$；

当 $x=4$ 时，$y=16a+4b+c=3$．

解得：$a=1$，$b=-4$，$c=3$．

故二次函数的解析式为 $y=x^2-4x+3$．

@（2）填齐表格中空白处的对应值并利用上表，用五点作图法，画出二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图象．

【答案】

x	[?]	-1	0	1	2	3	4	[?]
ax^2+bx+c	[?]	8	3	0	-1	0	3	[?]

【解析】将 x 的值代入即可．

@（3）当 $1<x<4$ 时，y 的取值范围是__________．

【答案】$-1\le y\le 3$．

【解析】二次函数的对称轴为 $x=2$，故最小值在 $x=2$ 时取到，为 $y=-1$．

而 $x=1$ 时，$y=0$；$x=4$ 时，$y=3$．

$\therefore$当 $1<x<4$ 时，y 的取值范围是 $-1\le y\le 3$．

@（4）设 $y=ax^2+bx+c$ 的图象与 x 轴的交点为 A、B 两点（A 点在 B 点左侧），与 y 轴交于点 C，P 点为线段 AB 上一动点，过 P 点作 $PE \parallel AC$ 交 BC 于 E，连结 PC，当 $\triangle PEC$ 的面积最大时，求 P 点的坐标．

【答案】$(2,0)$.

【解析】设 $P(m,0)$，则 $PB=3-m$，

$S_{\triangle PBC}=\frac{3}{2}(3-m)$，$S_{\triangle ABC}=3$，

$S_{\triangle PEC}=S_{\triangle PBC}-S_{\triangle PBE}=\frac{3}{4}(3-m)(3-m-2)=-\frac{3}{4}m^2+3m-\frac{9}{4}=-\frac{3}{4}(m-2)^2+\frac{3}{4}$，

$\therefore$ 当 $m=2$ 时，S 最大，

$\therefore P$ 点坐标为 $(2,0)$.

#25．阅读下面材料：

小明遇到下面一个问题：如图1所示，AD 是 $\triangle ABC$ 的角平分线，$AB=m$，$AC=n$，求 $\frac{BD}{DC}$ 的值．

小明发现，分别过 B、C 作直线 AD 的垂线，垂足分别为 E、F．通过推理计算，可以解决问题（如图2）．

图1

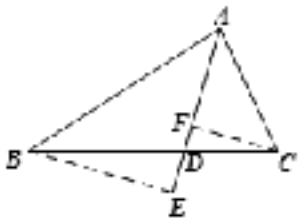


图2

@（1）请回答，$\frac{BD}{DC}=$ ＿＿＿＿＿＿.

【答案】$\frac{BD}{DC}=\frac{m}{n}$.

【解析】先证明 $\triangle BDF\backsim\triangle CDE$，得出 $\frac{BD}{DC}=\frac{BF}{CE}$，再证明 $\triangle ABF\backsim\triangle ACE$，再得出 $\frac{AB}{AC}=\frac{BF}{CE}$，即可得出 $\frac{BD}{DC}=\frac{AB}{AC}=\frac{m}{n}$.

@（2）参考小明思考问题的方法，解决问题：

如图3，四边形 $ABCD$ 中，$AB=2$，$BC=6$，$\angle ABC=60^\circ$，BD 平分 $\angle ABC$，$CD\perp BD$，AC 与 BD 相交于点 O.

$\frac{AO}{OC}=$ ＿＿＿＿＿＿，$\tan\angle DCO=$ ＿＿＿＿＿＿.

【答案】$\frac{1}{3}$，$\frac{\sqrt{3}}{2}$.

【解析】$\frac{AO}{OC}=\frac{AB}{BC}=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$；

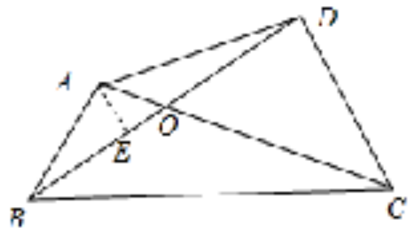
作 $AE\perp BD$ 于 E，如图所示：

$\because CD\perp BD$，$AE\perp BD$，

$\therefore AE \parallel CD$，

$\therefore \triangle AOE \backsim \triangle COD$，

$\therefore \frac{AE}{CD}=\frac{OE}{OD}=\frac{AO}{OC}=\frac{1}{3}$，



$\because CD=3$， $\therefore AE=1$，

$\because BD$ 平分 $\angle ABC=60°$，

$\therefore \angle ABD=\angle DBC=30°$，

$\therefore BD=3\sqrt{3}$，

$\because AB=2$，

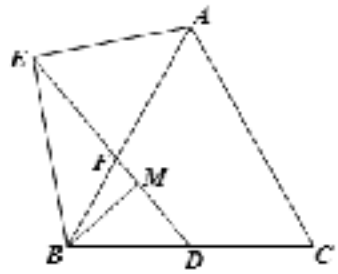
$\therefore BE=\sqrt{3}$，

$\therefore DE=2\sqrt{3}$，

$\therefore OD=2\sqrt{3}\times\frac{3}{4}=\frac{3\sqrt{3}}{2}$，

$\therefore \tan\angle DCO=\frac{OD}{CD}=\frac{\frac{3\sqrt{3}}{2}}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

#26．已知：在等边$\triangle ABC$中，点D为BC边的中点，点F在AB上，连结DF并延长到点E，使$\angle ABE=\angle DBM$，点M在线段DF上，且$\angle ABE=\angle DBM$.



@（1）如图，线段AE、MD之间的数量关系为__________；请证明你的结论.

【答案】$\frac{AE}{DM}=2$，证明见解析.

【解析】如图1，连接AD，

$\because AB=AC$，$BD=CD$，

$\therefore AD\perp BC$.

又$\because \angle ABC=45°$，

$\therefore BD=AB\cdot\cos\angle ABC$，即$AB=\sqrt{2}BD$.

$\because \angle BAE=\angle BDM$，$\angle ABE=\angle DBM$.

$\therefore \triangle ABE \backsim \triangle DBM$.

$\therefore \frac{AE}{DM}=\frac{AB}{DB}=2$.

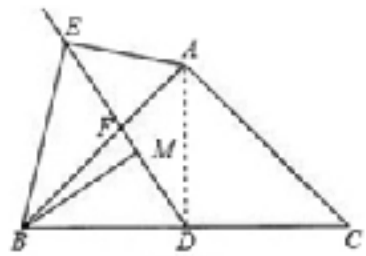


图1

@（2）在（1）的条件下，延长BM到P，使$MP=BM$，连接CP，若$AB=7$，$AE=2\sqrt{7}$，求$\tan\angle BCP$的值.

【答案】$\tan\angle BCP=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

【解析】如图2，连接AD、EP，过N作$NH\perp AC$，垂足为H，连接NH，

$\because AB=AC$，$\angle ABC=60^\circ$，

$\therefore\triangle ABC$是等边三角形，

又$\because D$为BC的中点，

$\therefore AD\perp BC$，$\angle DAC=30^\circ$，$BD=DC=\frac{1}{2}AB$，

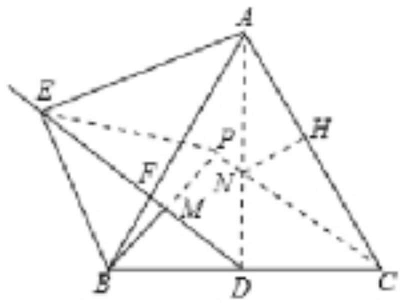


图2

$\because\angle BAE=\angle BDM$，$\angle ABE=\angle DBM$，

$\therefore\triangle ABE\backsim\triangle DBM$，

$\therefore\frac{BE}{BM}=\frac{AB}{DB}=2$，$\angle AEB=\angle DMB$，

$\therefore\frac{BE}{BM}=\frac{AB}{DB}=2$，$\angle AEB=\angle DMB$，

$\therefore EB=2BM$，

又$\because BM=MP$，

$\therefore EB=BP$，

$\because\angle EBM=\angle EBA+\angle ABM=\angle MBD+\angle ABM=\angle ABC=60^\circ$，

$\therefore\triangle BEP$为等边三角形，

$\therefore EM\perp BP$，

$\therefore\angle BMD=90^\circ$，

$\therefore\angle AEB=90^\circ$，

在$\mathrm{Rt}\triangle AEB$中，$AE=2\sqrt{7}$，$AB=7$，

$\therefore BE=\sqrt{AB^2-AE^2}=\sqrt{21}$，

$\therefore\tan\angle EAB=\frac{BE}{AE}=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

$\because D$为BC中点，M为BP中点，

$\therefore DM\parallel PC$，

$\therefore\angle MDB=\angle PCB$，

$\therefore\angle EAB=\angle PCB$，

$\therefore\tan\angle PCB=\frac{\sqrt{3}}{2}$.