2015-2016年北京市第三十一中学初三上学期数学期中试卷

一、选择题（本大题共10小题，每小题只有唯一正确答案．每小题2分，共20分）

1．下列函数中①$y=3x+1$；②$y=4x^2-3x$；③$y=\frac{4}{x^2}+x^2$；④$y=5-2x^2$，是二次函数的有（ ）．

A．②　　B．②③④　　C．②③　　D．②④

【答案】D

【解析】根据函数的定义可知，①是一次函数，②是二次函数，③是分式函数，④是二次函数．

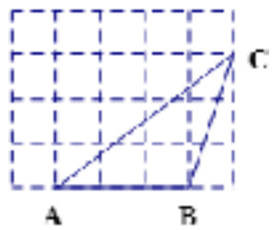
2．抛物线$y=(x-1)^2+2$的对称轴为（ ）

A．直线$x=1$　　B．直线$x=-1$　　C．直线$x=2$　　D．直线$x=-2$

【答案】A

【解析】抛物线的对称轴为$x-1=0$，即为直线$x=1$．

3．如图，在5×4的矩形网格中，每格小正方形的边长都是1，若$\triangle ABC$的三个顶点在图中相应的格点上，则$\sin A$的值为（ ）．

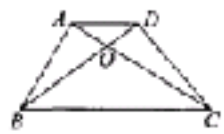


A．1　　B．$\frac{3}{4}$　　C．$\frac{3}{5}$　　D．$\frac{4}{5}$

【答案】C

【解析】过C点作垂线垂直于AB，$\therefore\sin A=\frac{3}{5}$．

4．如图，在梯形$ABCD$中，$AD\parallel BC$，对角线AC、BD相交于点O，若$AD=1$，$BC=3$，则$\frac{OA}{OC}$的值为（ ）．



A．$\frac{1}{2}$　　B．$\frac{1}{3}$　　C．$\frac{1}{4}$　　D．$\frac{1}{9}$

【答案】B

【解析】易知$\triangle AOD\backsim\triangle COB$，$\therefore\frac{AD}{BC}=\frac{AO}{CO}=\frac{1}{3}$．

5．ff8080814518d5240145213a40060ff6如图，为估算某河的宽度，在河对岸边选定一个目标点A，在近岸取点B，C，D，使得AB⊥BC，CD⊥BC，点E在BC上，并且点A，E，D在同一条直线上。若测得BE=20m，EC=10m，CD=20m，则河的宽度AB等于（　　）

A. 60m　　B. 40m　　C. 30m　　D. 20m

6．二次函数$y=kx^2-6x+3$的图象与x轴有交点，则k的取值范围是（ ）．

A．$k<3$　　B．$k<3$且$k\neq0$　　C．$k\le3$　　D．$k\le3$且$k\neq0$

【答案】D

【解析】$\because$二次函数$y=kx^2-6x+3$的图象与x轴有交点，

$\therefore$方程 $kx^2-6x+3=0$ （$k\neq0$）有实数根，
即 $\Delta=36-12k\geq0$， $k\leq3$，由于是二次函数，故 $k\neq0$，则 k 的取值范围 $k\leq3$ 且 $k\neq0$．

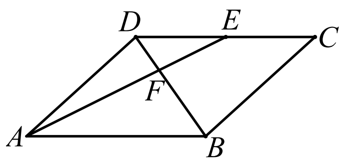
7．顶点为 $(-5,0)$，且开口方向、形状与函数 $y=-\frac{1}{3}x^2$ 的图象相同的抛物线是（ ）．

A．$y=\frac{1}{3}(x-5)^2$　　B．$y=-\frac{1}{3}x^2-5$　　C．$y=-\frac{1}{3}(x+5)^2$　　D．$y=\frac{1}{3}(x+5)^2$

【答案】C

【解析】与 $y=-\frac{1}{3}x^2$ 的图象开口方向、形状相同且顶点为 $(-5,0)$ 的抛物线是 $y=-\frac{1}{3}(x+5)^2$．

8．ff8080814d4b1ba8014d50ea53bf0673如图，平行四边形 $ABCD$ 中，E 为 DC 的中点，$\triangle DEF$ 的面积为2，则△ ABF 的面积为（ ）．



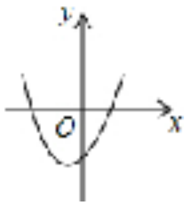
A．2　　B．4

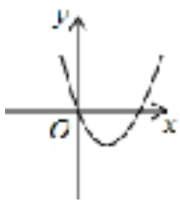
C．6　　D．8

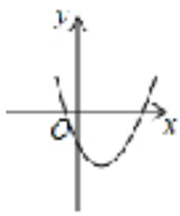
【答案】D

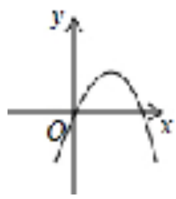
【解析】由图可知：$\triangle CEB\backsim$ CAD，$\therefore\frac{CB}{CD}=\frac{BE}{AD}$，即 $\frac{20}{40}=\frac{15}{AD}$，解得：$AD=30$ 米．

9．函数 $y=x^2+mx-2(m<0)$ 的图象是（ ）．

A．

B．

C．

D．

【答案】C

【解析】$\because$函数 $y=x^2+mx-2(m<0)$，

$\therefore$函数图象开口向上，函数对称轴一定在 y 轴右侧，且图象与 y 轴交于点 $(0,-2)$，

故符合题意的图象只有C．

10．若 m、n （$m<n$）是关于 x 的方程 $1-(x-a)(x-b)=0$ 的两个根，且 $a<b$，则 a、b、m、n 的大小关系是（ ）．

A．$m<a<b<n$　　B．$a<m<n<b$　　C．$a<m<b<n$　　D．$m<a<n<b$

【答案】A

【解析】 $1-(x-a)(x-b)=0$ 即为 $(x-a)(x-b)-1=0$，

令 $f(x)=(x-a)(x-b)-1$， $g(x)=(x-a)(x-b)$

$\therefore f(x)$ 的图象是 $g(x)$ 的图象向下平移1个单位

又 m、n 是 $f(x)$ 的两个零点，a、b 是 $g(x)$ 的两个零点；

$\therefore m<a<b<n$．

二、填空题（每题3分，共24分．请将答案写在题目的横线上）

11．若函数 $y=x^2-mx+m-2$ 的图象经过 $(3,6)$ 点，则 $m=$ __________．

【答案】$\frac{1}{2}$

【解析】将 $(3,6)$ 代入函数 $y=x^2-mx+m-2$，

即 $6=9-3m+m-2$，则 $m=\frac{1}{2}$．

12．抛物线图像 $y=-2x^2$ 经过平移得到抛物线图像 $y=-2x^2-4x-5$，平移方法是__________．

【答案】先向下平移 3 个单位，再向左平移 1 个单位

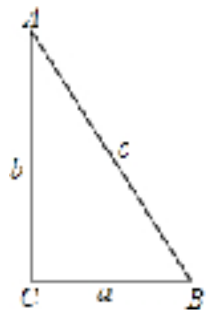
【解析】$y=-2x^2-4x-5=-2(x+1)^2-3$，故抛物线 $y=-2x^2$ 先向下平移 3 个单位，再向左平移 1 个单位即可得到 $y=-2x^2-4x-5$．

13．已知二次函数 $y=x^2-(m-4)x+2m-3$．当 $m=$ __________时，图象顶点在 y 轴上．

【答案】4

【解析】$\because$图象的对称轴是 y 轴，$\therefore \frac{m-4}{2}=0$，$\therefore m=4$．

14．在 $\mathrm{Rt}\triangle ABC$ 中，$\angle C=90°$，若 $a=9$，$b=12$，$\cos A=$ __________．



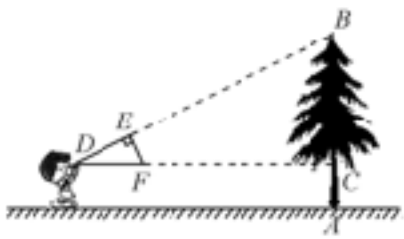
【答案】$\frac{4}{5}$

【解析】如图所示：

在 $\mathrm{Rt}\triangle ABC$ 中，$c=\sqrt{a^2+b^2}=15$，

$\therefore \cos A=\frac{b}{c}=\frac{12}{15}=\frac{4}{5}$．

15．ff8080814670afec0146935f1667264e如图，小明同学用自制的直角三角形纸板 DEF 测量树的高度 AB，他调整自己的位置，设法使斜边 DF 保持水平，并且边 DE 与点 B 在同一直线上．已知纸板的两条直角边 $DE=40\,\mathrm{cm}$，$EF=20\,\mathrm{cm}$，测得边 DF 离地面的高度 $AC=1.5\mathrm{m}$，$CD=8\mathrm{m}$，则树高 $AB=$ __________ m．



【答案】$(6,0)$

【解析】直线 AA' 与直线 OO' 的交点坐标为 $(6,0)$，所以位似中心的坐标为 $(6,0)$.

16．直线 $y=4x+1$ 与抛物线 $y=x^2+2x+k$ 有唯一交点，则 $k=$__________.

【答案】2

【解析】因为直线与抛物线只有唯一交点，

所以联立方程式得：$4x+1=x^2+2x+k$，该方程有唯一解，

即 $x^2-2x+k-1=0$，

$k-1=1$，所以 $k=2$.

17．ff8080814cdb1dea014cf8e54cbe2091如图，∠DAB＝∠CAE，要使△ABC∽△ADE，则补充的一个条件可以是__________（注：只需写出一个正确答案即可）.

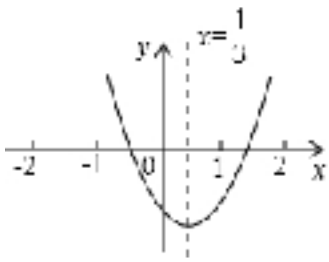
【答案】$x_1=\dfrac{3+\sqrt{7}}{2}$，$x_2=\dfrac{3-\sqrt{7}}{2}$

【解析】$\Delta=6^2-4\cdot 2=28$，

$\therefore x_1=\dfrac{6+\sqrt{28}}{4}=\dfrac{3+\sqrt{7}}{2}$，$x_2=\dfrac{6-\sqrt{28}}{4}=\dfrac{3-\sqrt{7}}{2}$.

18．小明从二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图象（如图）中观察得出了下面五条信息：①$c<0$；②$abc>0$；③$a-b+c>0$；④$2a-3b=0$；⑤$c-4b>0$.

你认为其中正确的信息是__________.



【答案】①②③⑤13·

【解析】∵抛物线开口方向向上，

$\therefore a>0$，

∵与 y 轴交点在 x 轴的下方，

$\therefore c<0$，

$\because -\dfrac{b}{2a}=\dfrac{1}{3}>0$，

$\therefore a>0$，

$\therefore b<0$，

$\therefore 2a-3b>0$，

$\therefore abc>0$，

∴①②是正确的，

对称轴 $x=-\dfrac{b}{2a}=\dfrac{1}{3}$，

$\therefore 3b=-2a$，

$\therefore 2a+3b=0$，

∴④是错误的；

当 $x=-1$，$y=a-b+c$，

而点 $(-1,a+b+c)$ 在第二象限，

$\therefore a-b+c>0$ 是正确的；

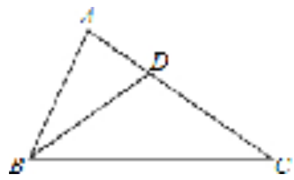
当 $x=2$ 时，$y=4a+2b+c=2\times(-3b)+2b+c=c-4b$，

而点 $(2,c-4b)$ 在第一象限，

$\therefore c-4b>0$．

三、解答题（本题共44分，19-22每小题5分，23-26每小题6分）

19．如图，在 $\triangle ABC$ 中，$\angle ABC=2\angle C$，BD 平分 $\angle ABC$，试说明：$AB^2=AD\cdot AC$．



【答案】证明见解析．

【解析】$\because BD$ 平分 $\angle ABC$，

$\therefore \angle ABC=2\angle 1=2\angle 2$．

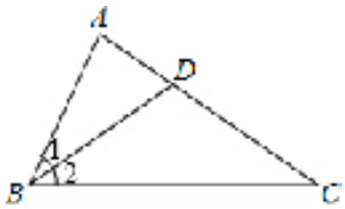
$\because \angle ABC=2\angle C$，

$\therefore 2\angle C=2\angle 1$，

$\therefore \angle C=\angle 1$．

$\because \angle A=\angle A$，

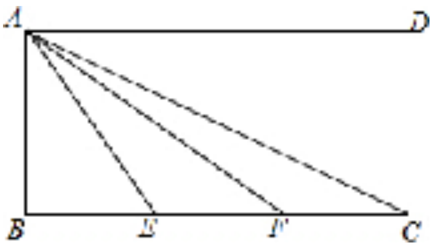
$\therefore \triangle ABD\backsim ACB$，



$\therefore \dfrac{AB}{AC}=\dfrac{AD}{AB}$，

$\therefore AB^2=AD\cdot AC$．

20．矩形 $ABCD$ 中，$BC=3AB$，E、F 是 BC 边的三等分点，连结 AE、AF、AC．问：图中是否存在非全等的相似三角形？请证明你的结论．



【答案】图中存在非全等的相似三角形，是 $\triangle EAF\backsim ECA$．

【解析】理由如下：

$\because$四边形 $ABCD$ 是矩形，

$\therefore \angle B=90^\circ$．

设 $AB=k$，则 $BC=3AB=3k$．

$\because E$、F 是 BC 边的三等分点，

$\therefore BE=EF=FC=\dfrac{1}{3}BC=k$．

由勾股定理，得 $AE=\sqrt{AB^2+BE^2}=\sqrt{2}k$，

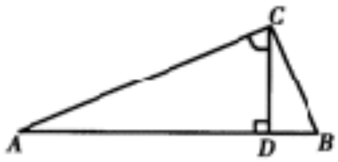
$AF=\sqrt{AB^2+BF^2}=\sqrt{5}k$，

$AC=\sqrt{AB^2+BC^2}=\sqrt{10}k$，

$\because \dfrac{AE}{CE}=\dfrac{\sqrt{2}k}{2k}=\dfrac{AF}{CA}=\dfrac{\sqrt{5}k}{\sqrt{10}k}$，

$\therefore \triangle EAF\backsim ECA$．

21．已知：如图，$\triangle ABC$ 中，$\angle ACB=90^\circ$，$CD\perp AB$ 于 D，$AD=9$，$BC=6$．求：$\tan\angle ACD$ 及 AC 的长．



【答案】$\sqrt{3}$，$6\sqrt{3}$

【解析】$\because \angle ACB=90^\circ$，$CD\perp AB$ 于 D，

$\therefore \triangle ACD\backsim CBD\quad ABC$，

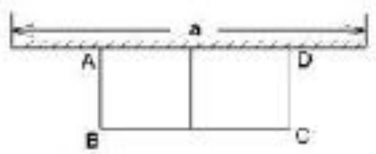
$\therefore \dfrac{AD}{AC}=\dfrac{CD}{BC}$，

令 $CD=x$，则 $AC=\sqrt{x^2+81}$，

$\therefore \dfrac{9}{\sqrt{x^2+81}}=\dfrac{x}{6}$，解得 $x=3\sqrt{3}$，即 $CD=3\sqrt{3}$，

$\therefore \tan\angle ACD=\dfrac{AD}{CD}=\dfrac{9}{3\sqrt{3}}=\sqrt{3}$，$AC=\sqrt{(3\sqrt{3})^2+9^2}=6\sqrt{3}$．

22．如图，有长为 24m 的篱笆，围成中间隔有一道篱笆的长方形的花圃，且花圃的长可借用一段墙体（墙体的最大可用长度 $a=10\text{m}$）．



@（1）如果所围成的花圃的面积为 45m^2，试求宽 AB 的长．

【答案】AB 长为 5 米．

【解析】设花圃的宽 $AB=x$ 米，知 BC 应为（$24-3x$）米，故面积 y 与 x 的关系式为 $y=x(24-3x)=-3x^2+24x$，

当 $y=45$ 时，$-3x^2+24x=45$，

解出 $x_1=3$，$x_2=5$，

当 $x_1=3$ 时，$BC=24-3\times3>10$，不合题意，舍去；

当 $x_2=5$ 时，$BC=24-3\times5=9$，符合题意故 AB 长为 5 米．

@（2）按题目的设计要求，能围成面积比 45m^2 更大的花圃吗?如果能，请求出最大面积，并说明围法；如果不能，请说明理由．

【答案】能围成面积比 45m^2 更大的矩形花圃，围成长为 10 米，宽为 $\dfrac{14}{3}$ 米的矩形花圃时，其面积最大为 $46\dfrac{2}{3}\text{m}^2$．

【解析】由（1）知，$y=-3x^2+24x=-3(x-4)^2+48$，

$\because 0<24-3x\le10$，

$\therefore \frac{14}{3} \le x < 8$.

由抛物线 $y=-3(x-4)^2+48$ 知，在对称轴 $x<4$ 的左侧，y 随 x 的增大而增大，当 $x>4$ 时，y 随 x 的增大而减小．

$\therefore$ 当 $x=\frac{14}{3}$ 时，$y=-3(x-4)^2+48$ 有最大值，且最大值为 $48-3\left(\frac{14}{3}-4\right)^2=46\frac{2}{3}\left(m^2\right)$，

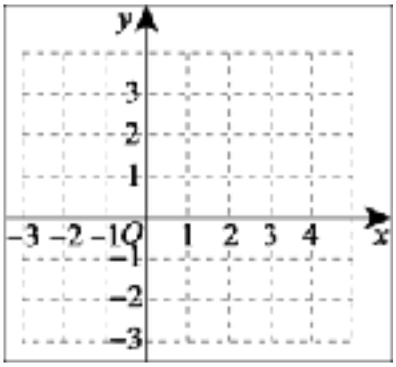
此时，$AB=\frac{14}{3}m$，$BC=10m$，即围成长为 10 米，宽为 $\frac{14}{3}$ 米的矩形花圃时，其面积最大为 $46\frac{2}{3}m^2$．

23．ff8080814d5651d1014d5860cdb200f2对于抛物线 $y=x^2-4x+3$．

（1）它与x轴交点的坐标为________，与y轴交点的坐标为______，

顶点坐标为________；

（2）在坐标系中利用描点法画出此抛物线；



x	…						…
y	…						…

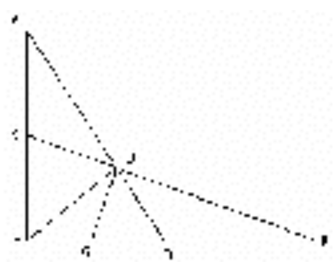
（3）利用以上信息解答下列问题：若关于x的一元二次方程 $x^2-4x+3-t=0$（t为实数）在 $-1<x<\frac{7}{2}$ 的范围内有解，则t的取值范围是__________．

24．8aac50a74e023208014e2a36e4e85651在平面直角坐标系 xOy 中，直线 $y=kx+b(k\ne 0)$ 与双曲线 $y=\frac{8}{x}$ 的一个交点为 $P(2,m)$，与x轴、y轴分别交于点A，B。

(1)求m的值；

(2)若 $PA=2AB$，求k的值．

25．如图，$\triangle ABC$ 是直角三角形，$\angle ACB=90°$，$CD\perp AB$ 于 D，E 是 AC 的中点，ED 的延长线与 CB 的延长线交于点 F．



@（1）求证：$FD^2=FB\cdot FC$．

【答案】证明见解析．

【解析】$\because E$ 是 $\mathrm{Rt}\triangle ACD$ 斜边中点，

$\therefore DE=EA$，

$\therefore \angle A=\angle ADE$，

$\because \angle BDF=\angle ADE$，

$\therefore \angle BDF=\angle A$，

$\because \angle FDC=\angle CDB+\angle BDF=90^\circ+\angle BDF$，$\angle FBD=\angle ACB+\angle A=90^\circ+\angle A$，

$\therefore \angle FDC=\angle FBD$，

$\because \angle F$ 是公共角，

$\therefore \triangle FBD\backsim FDC$．

$\therefore \dfrac{FB}{FD}=\dfrac{FD}{FC}$

$\therefore FD^2=FB\cdot FC$．

@（2）若 G 是 BC 的中点，连接 GD、GD 与 EF 垂直吗？并说明理由．

【答案】垂直，理由见解析．

【解析】$\because DG$ 是 $\mathrm{Rt}\triangle CDB$ 斜边上的中线，

$\therefore DG=GC$．

$\therefore \angle CDG=\angle DCG$．

由（1）得$\because \triangle FBD\backsim FDC$，

$\therefore \angle DCG=\angle BDF$，

$\therefore \angle CDG=\angle BDF$．

$\because \angle CDG+\angle BDG=90^\circ$，

$\therefore \angle BDG+\angle BDF=90^\circ$．

$\therefore DG\perp EF$．

26．ff80808146cd4fd00146dbd0b5750cc9阅读下面材料：

小腾遇到这样一个问题：如图1，在 $\triangle ABC$ 中，点 D 在线段 BC 上，$\angle BAD=75^\circ$，$\angle CAD=30^\circ$，$AD=2$，$BD=2DC$，求 AC 的长．

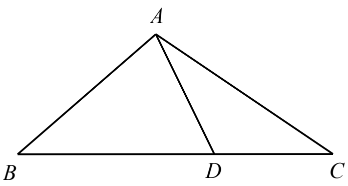


图1

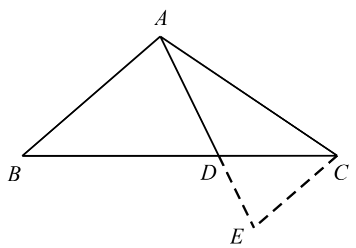


图2

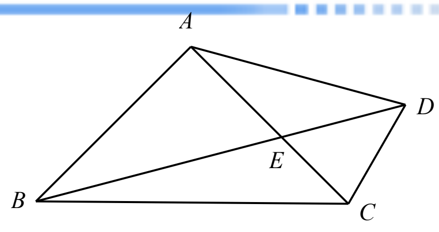


图3

小腾发现，过点 C 作 $CE \parallel AB$ ，交 AD 的延长线于点 E ，通过构造 $\triangle ACE$ ，经过推理和计算能够使问题得到解决（如图2）．

请回答：$\angle ACE$ 的度数为______，AC 的长为_______．

参考小腾思考问题的方法，解决问题：

如图3，在四边形 $ABCD$ 中，$\angle BAC = 90°$ ，$\angle CAD = 30°$ ，$\angle ADC = 75°$ ，AC 与 BD 交于点 E ，$AE = 2$ ，$BE = 2ED$ ，求 BC 的长．

27．已知抛物线 $y = mx^2 - 4mx + 4m - 2$ （m 是常数）．

@（1）求抛物线的顶点坐标．

【答案】$(2,-2)$

【解析】$y = mx^2 - 4mx + 4m - 2 = m(x-2)^2 - 2$ ，

$\therefore$ 抛物线的顶点为 $(2,-2)$ ．

@（2）若 $m > \frac{2}{5}$ ，且抛物线与 x 轴交于整数点（坐标为整数的点），求此抛物线的解析式．

【答案】$y = \frac{1}{2}x^2 - 2x$ 或 $y = 2x^2 - 8x + 6$ ．

【解析】令 $y = 0$ ，即 $m(x-2)^2 - 2 = 0$ ，

$\therefore$ $x = 2 \pm \sqrt{\frac{2}{m}}$ ，

要使交点为整数点，则 $\sqrt{\frac{2}{m}}$ 为整数，

又 $m > \frac{2}{5}$ ，$\therefore$ 当 $m = \frac{1}{2}$ 或 2 时，满足条件．

此时，抛物线的解析式为 $y = \frac{1}{2}x^2 - 2x$ 或 $y = 2x^2 - 8x + 6$ ．

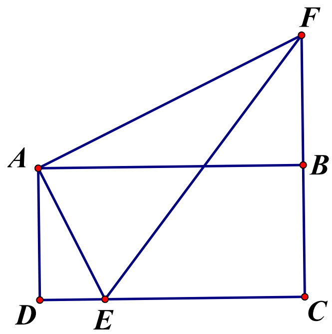
28．ff8080814670afea01468f700d9d22c9如图，在矩形ABCD中，E是CD边上任意一点（不与点C，D重合），作AF⊥AE交CB的延长线于点F．

（1）求证：ΔADE∽ΔABF

（2）连接EF，M为EF的中点，AB=4，AD=2，设DE=x，

①求点M到FC的距离（用含x的代数式表示）

②连接BM，设BM²=y，求y与x之间的函数关系式，并直接写出BM长度最的小值．



29．在平面直角坐标系 xOy 中，过点 $(0,2)$ 且平行于 x 轴的直线，与直线 $y=x-1$ 交于点 A，点 A 关于直线 $x=1$ 的对称点为 B，抛物线 $C_1: y=x^2+bx+c$ 经过点 A、B.

@（1）求点 A、B 的坐标.

【答案】$A(3,2)$，$B(-1,2)$

【解析】当 $y=2$，则 $2=x-1$，$\therefore x=3$，

$\therefore A(3,2)$，

$\because B$ 关于 $x=1$ 对称，

$\therefore B(-1,2)$.

@（2）求抛物线 C_1 的表达式及顶点坐标.

【答案】抛物线 C_1 的表达式为 $y=x^2-2x-1$，顶点坐标为 $(1,-2)$.

【解析】把 $(3,2)$，$(-1,2)$ 代入得：

$\begin{cases} 2=9+3b+c \\ 2=1-b+c \end{cases}$，解得 $\begin{cases} b=-2 \\ c=-1 \end{cases}$，

$\therefore y=x^2-2x-1=(x-1)^2-2$，

$\therefore$顶点坐标为 $(1,-2)$.

@（3）若抛物线 $C_2: y=ax^2(a\neq 0)$ 与线段 AB 恰有一个公共点，结合函数的图象，求 a 的取值范围.

【答案】$\frac{2}{9}\leq a<2$

【解析】当 C_1 过 A 点，B 点时为临界情况，

代入 $A(3,2)$，则 $9a=2$，$a=\frac{2}{9}$，

代入 $B(-1,2)$，则 $a=2$，

$\therefore \frac{2}{9}\leq a\leq 2$.