

2015-2016年北京市第五十六中学初三上学期数学期中试卷

一、选择题（本大题共10小题，每小题只有唯一正确答案，每小题2分，共20分）

1. 抛物线 $y = (x+2)^2 - 3$ 的对称轴是 () .

- A. 直线 $x = -3$ B. 直线 $x = 3$ C. 直线 $x = -2$ D. 直线 $x = 2$

【答案】 C

【解析】 对称轴为 $x+2=0$ ，即 $x=-2$.

2. 如图，在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $\angle ACB = 90^\circ$ ， $BC = 1$ ， $AB = 2$ ，则下列结论正确的是 () .

- A. $\sin A = \frac{\sqrt{3}}{2}$ B. $\tan A = \frac{1}{2}$ C. $\cos A = \frac{\sqrt{3}}{2}$ D. $\tan B = \sqrt{3}$



【答案】 C

【解析】 由图可知， $\sin A = \frac{BC}{AB} = \frac{1}{2}$ ， $\cos A = \frac{AC}{AB} = \frac{\sqrt{AB^2 - BC^2}}{AB} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ， $\tan A = \frac{BC}{AC} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

3. 将抛物线 $y = 3x^2 + 1$ 的图象向左平移2个单位，再向下平移3个单位，得到的抛物线是 () .

- A. $y = 3(x+2)^2 - 3$ B. $y = 3(x+2)^2 - 2$ C. $y = 3(x-2)^2 - 3$ D. $y = 3(x-2)^2 - 2$

【答案】 A

【解析】 将抛物线 $y = 3x^2 + 1$ 的图象向左平移2个单位，得到 $y = 3(x+2)^2$ ，再向下平移3个单位，得到 $y = 3(x+2)^2 - 3$.



4. 如图， F 是平行四边形 $ABCD$ 的边 CD 上的点， $FD = 2FC$ ，连结 AF 并延长交 BC 于 E ， $CE = 2$ ，则 AD 的长为 () .

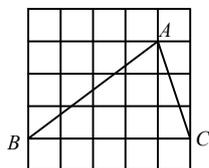
- A. 1 B. 2 C. 4 D. 6

【答案】 C

【解析】 \because 四边形 $ABCD$ 是平行四边形，
 $\therefore \triangle ADF \sim \triangle ECF$ ，
 $\frac{DF}{CF} = \frac{AD}{CE} = 2$ ，
 $\therefore AD = 2CE = 4$.

5. 如图，在边长为1的小正方形组成的网格中， $\triangle ABC$ 的三个顶点均在格点上，则 $\tan \angle ABC$ 的值为 () .

- A. $\frac{3}{5}$ B. $\frac{3}{4}$ C. $\frac{\sqrt{10}}{5}$ D. 1



【答案】 A

【解析】 ① $-(-2) = 2$; ② $-|-2| = -2$; ③ $-2^2 = -4$; ④ $-(-2)^2 = -4$.

8aac49074e023206014e439afa347105

6. 若关于 x 的二次函数 $y = kx^2 + 2x - 1$ 的图象与 x 轴仅有一个公共点, 则 k 的取值范围是

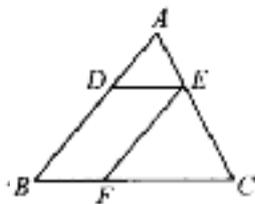
- A. $k = 0$ B. $k = -1$ C. $k > -1$ D. $k \neq 0$ 且 $k = -1$

【答案】 D

【解析】 若 $|a| = -a$, 则 $a = 0$ 或 a 为负数, 即 a 为非正数.

7. 如图, 小东用长为 3.2m 的竹竿做测量工具测量学校旗杆的高度, 移动竹竿, 使竹竿、旗杆顶端的影子恰好落在地面的同一点. 此时, 竹竿与这一点相距 8m 、与旗杆相距 22m , 则旗杆的高为 ().

- A. 12m B. 10m C. 8m D. 7m



【答案】 A

【解析】 根据相似的比例性质可知:

$$\frac{3.2}{h} = \frac{8}{22+8},$$

旗杆高 h 需满足:

$$\therefore h = 12\text{m}.$$

8. 如图, 已知 $DE \parallel BC$, $EF \parallel AB$, 现得到下列结论:

- ① $\frac{AE}{EC} = \frac{BF}{FC}$; ② $\frac{AD}{BF} = \frac{AB}{BC}$; ③ $\frac{EF}{AB} = \frac{DE}{BC}$; ④ $\frac{CE}{CF} = \frac{EA}{BF}$.

其中正确的比例式的个数有 ().

- A. 4个 B. 3个 C. 2个 D. 1个

【答案】 B

【解析】 $\because DE \parallel BC, EF \parallel AB,$

$$\therefore \triangle ADE \sim \triangle ABC, \triangle CEF \sim \triangle CAB, \triangle ADE \sim \triangle EFC,$$

$$\therefore \frac{CE}{CA} = \frac{CF}{CB}, \frac{AD}{AB} = \frac{DE}{BC}, \frac{EF}{AB} = \frac{CF}{CB}, \frac{CE}{AE} = \frac{CF}{DE},$$

\therefore 四边形 $BDEF$ 是平行四边形,

$$\therefore DE = BF, BD = EF,$$

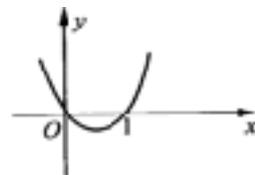
$$\therefore \frac{AE}{EC} = \frac{BF}{FC}, \frac{AD}{BF} = \frac{AB}{BC}, \frac{CE}{CF} = \frac{EA}{BF}, \frac{EF}{AB} = \frac{CE}{BC},$$

故正确的只有 3 个.

9. 右图为二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ 的图象, 下列各式中:

- ① $a > 0$, ② $a < 0$, ③ $c = 0$, ④ $c = 1$, ⑤ $a + b + c = 0$.

正确的只有 ().

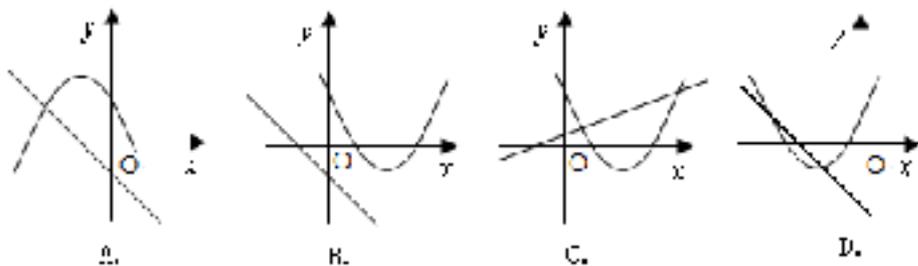


- A. ①④ B. ②③④ C. ③④⑤ D. ①③⑤

【答案】 D

【解析】 二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ 开口向上，且经过点 $(0,0)$ ， $(1,0)$ ，
 $\therefore a > 0$ ， $c = 0$ ， $a + b + c = 0$ ，
 故正确的有①③⑤.

10. 8aac50a750ebde0e0150f05788410b4d 在同一直角坐标系中，函数 $y = mx + m$ 和函数 $y = -mx^2 + 2x + 2$ (m 是常数，且 $m \neq 0$) 的图象可能是 ().



【答案】 A

【解析】 当 $y_1 > y_2$ 时， $-x^2 + 4x > 2x$ ，解得 $0 < x < 2$.

二、填空题 (每题3分，共18分. 请将答案写在题目的横线上)

11. 若函数 $y = x^{m-2}$ 是二次函数，则 $m =$ _____.

【答案】 4

【解析】 当函数 $y = x^{m-2}$ 是二次函数， $m - 2 = 2$ ， $\therefore m = 4$.

12. $\text{Rt}\triangle ABC$ ， $\angle ACB = 90^\circ$ ， $\angle A : \angle B = 1 : 2$ ，则 $\frac{AC}{AB} =$ _____.

【答案】 $\frac{\sqrt{3}}{2}$

【解析】 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $\angle B = 60^\circ$ ， $\therefore \frac{AC}{AB} = \cos A = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

13. 若二次函数 $\angle A = 30^\circ$ $y = x^2 + 2m - 1$ 的图象经过原点，则 m 的值是 _____.

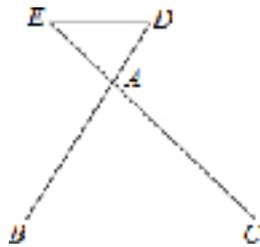
【答案】 $\frac{1}{2}$

【解析】 二次函数过原点 $(0,0)$ ，则 $2m - 1 = 0$ ，故 $m = \frac{1}{2}$.

14. 如图， $DE \parallel BC$ 交 BA 的延长线于 D ，交 CA 的延长线于 E ， $AD = 4$ ， $DE : BC = 1 : 2$ ，则 $AB =$ _____.

【答案】 6

【解析】 $\because DE \parallel BC$,
 $\therefore \angle B = \angle D, \angle C = \angle E$,
 $\therefore \triangle ABC \sim \triangle ADE$,
 $\frac{BC}{DE} = \frac{AB}{AD}$,
 $\therefore AD = 4, DB = 12, DE = 3$,
 $\frac{BC}{3} = \frac{12-4}{4}$,
 $\therefore BC = 6$.



15. 已知 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, 斜边 $AB = 2$, $\tan B = \frac{4}{3}$, 则 $AC =$ _____.

【答案】 $\frac{8}{5}$

【解析】 $AC = AB \cdot \sin B = 2 \cdot \frac{4}{5} = \frac{8}{5}$.

16. 二次函数 $y = \frac{2}{3}x^2$ 的图象如图所示, 点 A_0 位于坐标原点, 点 $A_1, A_2, A_3, \dots, A_{2010}$ 在 y 轴的正半轴上, 点 $B_1, B_2, B_3, \dots, B_{2011}$ 在二次函数 $y = \frac{2}{3}x^2$ 位于第一象限的图象上, 若 $\triangle A_0B_1A_1, \triangle A_1B_2A_2, \triangle A_2B_3A_3, \dots, \triangle A_{2010}B_{2011}A_{2011}$ 都为等边三角形, 则 $\triangle A_0B_1A_1$ 的边长 _____, $\triangle A_{2010}B_{2011}A_{2011}$ 的边长 = _____.

【答案】 1; 2011

【解析】 作 $B_1A \perp y$ 轴于 A , $B_2B \perp y$ 轴于 B , $B_3C \perp y$ 轴于 C .
 设等边 $\triangle A_0B_1A_1, \triangle A_1B_2A_2, \triangle A_2B_3A_3$ 中, $AA_1 = a, BA_2 = b, CA_3 = c$.

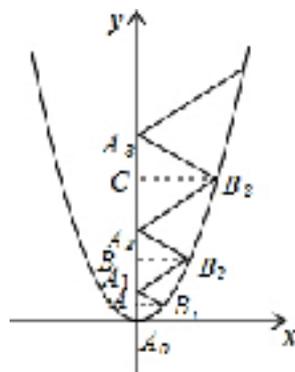
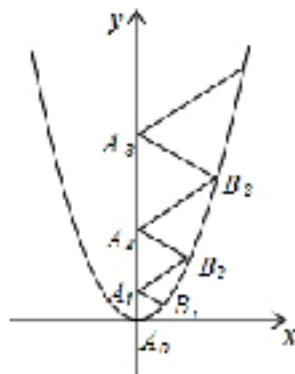
①等边 $\triangle A_0B_1A_1$ 中, $A_0A = a$, 所以 $B_1A = a \cdot \tan 60^\circ = \sqrt{3}a$,

代入解析式得: $\frac{2}{3} \times (\sqrt{3}a)^2 = a$,

解得 $a = 0$ (舍去) 或 $a = \frac{1}{2}$,

于是等边 $\triangle A_0B_1A_1$ 的边长为 $\frac{1}{2} \times 2 = 1$;

②等边 $\triangle A_2B_2A_1$ 中, $A_1B = b$, 所以 $BB_2 = b \cdot \tan 60^\circ = \sqrt{3}b$,



B_2 点坐标为 $(\sqrt{3}b, 1+b)$ ，代入解析式得： $1+b = \frac{2}{3} \times (\sqrt{3}b)^2$ ，

解得 $b = -\frac{1}{2}$ (舍去) 或 $b = 1$ ，

于是等边 $\triangle A_2B_2A_1$ 的边长为 $1 \times 2 = 2$ ；

③等边 $\triangle A_2B_3A_3$ 中， $A_2C = c$ ，所以 $CB_3 = c \cdot \tan 60^\circ = \sqrt{3}c$ ，

B_3 点坐标为 $(\sqrt{3}c, 3+c)$ ，代入解析式得： $3+c = \frac{2}{3} \times (\sqrt{3}c)^2$ ，

解得 $c = -1$ (舍去) 或 $c = \frac{3}{2}$ ，

于是等边 $\triangle A_3B_3A_2$ 的边长为 $\frac{3}{2} \times 2 = 3$ ；

于是 $\triangle A_{2010}B_{2011}A_{2011}$ 的边长为 2011。

三、解答题 (本题共72分)

17. 计算： $\cos 45^\circ + 3 \tan 30^\circ + \cos 30^\circ + 2 \sin 60^\circ$ 。

【答案】 $\frac{\sqrt{2} + 5\sqrt{3}}{2}$

【解析】原式 $= \frac{\sqrt{2}}{2} + 3 \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2} + 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{2} + 5\sqrt{3}}{2}$ 。

18. 若二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ 的图象最高点为 $(1, 3)$ 经过 $(-1, 0)$ 两点，求此二次函数的解析式。

【答案】 $y = -\frac{3}{4}x^2 + \frac{3}{2}x + \frac{9}{4}$

【解析】图象过点 $(1, 3)$ 、 $(-1, 0)$ ，对称轴为 $x = 1$ ，

$$\therefore \begin{cases} 3 = a + b + c \\ 0 = a - b + c \end{cases}, \quad -\frac{b}{2a} = 1,$$

$$\therefore a = -\frac{3}{4}, \quad b = \frac{3}{2}, \quad c = \frac{9}{4},$$

\therefore 此二次函数的解析式为 $y = -\frac{3}{4}x^2 + \frac{3}{2}x + \frac{9}{4}$ 。

19. ff80808149990d4b0149db5d38037363如图, 在 4×4 的正方形网格中, $\triangle ABC$ 和 $\triangle DEF$ 的顶点都在边长为1的小正方形的顶点上.

(1) 填空: $\angle ABC =$ _____ $^\circ$, $BC =$ _____;

(2) 判断 $\triangle ABC$ 与 $\triangle DEF$ 是否相似, 并证明你的结论.

【答案】 $2 + 3\sqrt{3}$

【解析】原式 $= 3 - 1 + 4\sqrt{3} - \sqrt{3} = 2 + 3\sqrt{3}$.

20. 已知二次函数的解析式是 $y = x^2 - 2x - 3$.

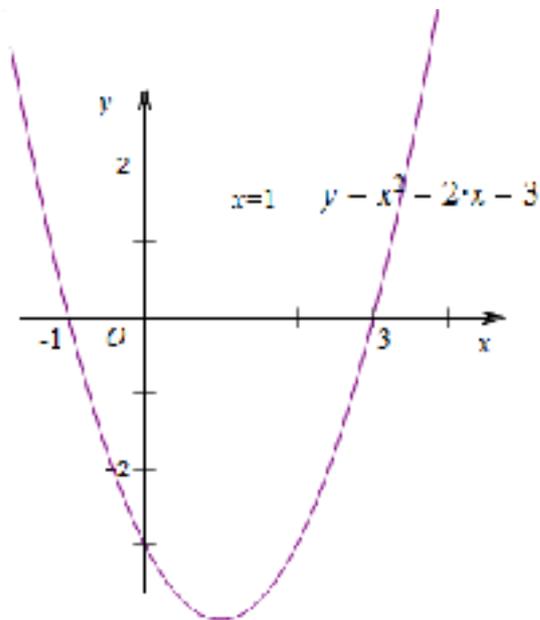
@ (1) 用配方法将 $y = x^2 - 2x - 3$ 化成 $y = a(x-h)^2 + k$ 的形式.

【答案】 $y = (x-1)^2 - 4$

【解析】 $y = x^2 - 2x - 3 = (x-1)^2 - 4$.

@ (2) 在直角坐标系中, 用五点法画出它的图象.

【答案】



【解析】 见答案.

@ (3) 利用图象求当 x 为何值时, 函数值 $y < 0$.

【答案】 $-1 < x < 3$

【解析】 令 $y < 0$, 即 $x^2 - 2x - 3 < 0$,

解得 $-1 < x < 3$.

21. 已知: 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle BAC = 120^\circ$, $AB = 10$, $AC = 5$. 求: $\sin \angle ACB$ 的值.

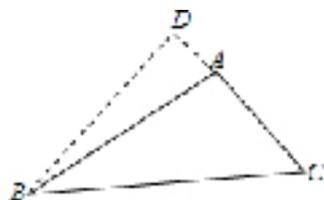
【答案】 $\frac{\sqrt{21}}{7}$

【解析】 作 $BD \perp AC$ 于 D , 如图,

$\therefore \angle BAC = 120^\circ$,

$\therefore \angle BAD = 60^\circ$,

在 $\text{Rt}\triangle ABD$ 中, $\angle ABD = 30^\circ$, $AB = 10$,



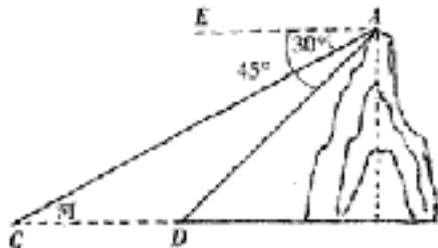
$$\therefore AD = \frac{1}{2}AB = 5, \quad BD = \sqrt{3}AD = 5\sqrt{3},$$

$$\therefore CD = AC + AD = 5 + 5 = 10,$$

在 $\text{Rt}\triangle BCD$ 中, $BC = \sqrt{BD^2 + CD^2} = 5\sqrt{7},$

$$\therefore \sin \angle ACB = \frac{BD}{BC} = \frac{5\sqrt{3}}{5\sqrt{7}} = \frac{\sqrt{21}}{7}.$$

22. 已知: 如图, 河旁有一座小山, 从山顶 A 处测得河对岸点 C 的俯角为 30° , 测得岸边点 D 的俯角为 45° , 又知河宽 CD 为 50m . 现需从山顶 A 到河对岸点 C 拉一条笔直的缆绳 AC , 求山的高度及缆绳 AC 的长 (答案可带根号).



【答案】 缆绳 AC 的长为 $20(\sqrt{3}+1)$ 米.

【解析】 过点 A 作 $AB \perp CD$ 于 B , 设 $AC = x$, 则 $\angle ACB = 30^\circ$, $\angle ADB = 45^\circ$,

在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中,

$$AB = AC \sin \angle ACB = x \sin 30^\circ = \frac{x}{2},$$

$$BC = AC \cos \angle ACB = x \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}x,$$

在 $\text{Rt}\triangle ABD$ 中, $\therefore \angle ADB = 45^\circ$,

$$\therefore BD = AB = \frac{x}{2},$$

又 $\because CD = 20$,

$$\therefore BC - BD = 20, \text{ 即 } \frac{\sqrt{3}}{2}x - \frac{1}{2}x = 20,$$

解之得: $x = 20(\sqrt{3}+1)$,

答: 缆绳 AC 的长为 $20(\sqrt{3}+1)$ 米.

23. 如图, $\triangle ABC$ 中, $EF \parallel BC$, $FD \parallel AB$, $AE = 12$, $BE = 18$, $AF = 14$, $CD = 24$, 求线段 FC 、 EF 的长.

【答案】 $FC = 21$, $EF = 16$.

【解析】 $\because EF \parallel BC$, $FD \parallel AB$,

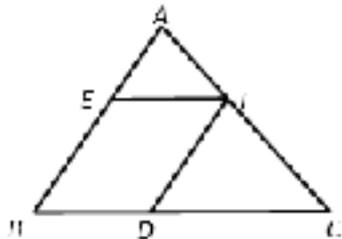
\therefore 四边形 $EBDF$ 是平行四边形,

$$\therefore EF = BD, \quad DF = BE = 18,$$

$$\because AE = 12, \quad BE = 18, \quad \therefore AB = 30,$$

设 $EF = x$,

$\therefore EF \parallel BC$, $FD \parallel AB$,



$$\therefore \triangle AEF \sim \triangle ABC \sim \triangle FDC,$$

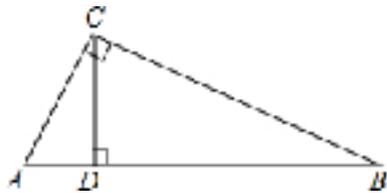
$$\frac{EF}{DC} = \frac{AE}{DF}, \text{ 即 } \frac{x}{24} = \frac{12}{18},$$

$$\text{解得 } x = 16, \text{ 即 } EF = 16.$$

$$\text{又 } \triangle AEF \sim \triangle FDC, \therefore \frac{AF}{FC} = \frac{AE}{FD},$$

$$\therefore FC = 21.$$

24. 已知: 如图, 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle ACB = 90^\circ$, $CD \perp AB$ 于 D , 若 $AD = 2$, $DB = 8$, 求 AC 、 BC 、 CD .



【答案】 $AC = 2\sqrt{5}$, $BC = 4\sqrt{5}$, $CD = 4$.

【解析】 \therefore 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle ACB = 90^\circ$, $CD \perp AB$,

$$\therefore \angle ADC = \angle BDC = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle A + \angle ACD = 90^\circ, \angle ACD + \angle BCD = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle A = \angle BCD,$$

$$\therefore \triangle ACD \sim \triangle CBD,$$

$$\therefore AD : CD = CD : BD,$$

$$\therefore CD = \sqrt{AD \cdot BD} = \sqrt{2 \times 8} = 4,$$

在 $\text{Rt}\triangle ACD$ 中, $AC = \sqrt{AD^2 + CD^2} = 2\sqrt{5}$,

在 $\text{Rt}\triangle BCD$ 中, $BC = \sqrt{CD^2 + BD^2} = 4\sqrt{5}$.

25. 抛物线 $y = -x^2 + (m-1)x + m$.

@ (1) 求证无论 m 为何值这条抛物线都与 x 轴至少有一个交点.

【答案】 证明见解析.

【解析】 $\Delta = (m-1)^2 + 4m = (m+1)^2 \geq 0$,

\therefore 无论 m 为何值这条抛物线都与 x 轴至少有一个交点.

@ (2) 求它与 x 轴交点坐标 A 、 B 和与 y 轴的交点 C 的坐标. (用含 m 的代数式表示点坐标)

【答案】 $A(m, 0)$, $B(-1, 0)$, $C(0, m)$.

【解析】 令 $y = 0$, $x = 0$,

可得: $x_1 = m$, $x_2 = -1$, $y = m$,

$$\therefore A(m, 0), B(-1, 0), C(0, m).$$

@ (3) $S_{\triangle ABC} = 3$, 求抛物线的解析式.

【答案】 抛物线的解析式为 $y = -x^2 - 4x - 3$ 或 $y = -x^2 + x + 2$.

【解析】 $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}(m+1) \cdot m = 3$,

解得： $m = -3$ 或 $m = 2$ ，

\therefore 抛物线的解析式为 $y = -x^2 - 4x - 3$ 或 $y = -x^2 + x + 2$ 。

26. 已知，如图，在菱形 $ABCD$ 中， $AE \perp BC$ 于点 E ， $BE = 12$ ，

$$\sin D = \frac{5}{13}.$$

@ (1) 求菱形的边长.

【答案】 13

【解析】 \because 在菱形 $ABCD$ 中， $AE \perp BC$ 于点 E ， $BE = 12$ ，

$$\sin D = \frac{5}{13},$$

$$\therefore \sin D = \sin B = \frac{5}{13},$$

\therefore 设 $AE = 5x$ ， $AB = 13x$ ，

$$\therefore 12^2 + (5x)^2 = (13x)^2,$$

解得： $x = \pm 1$ (负数舍去)，

$\therefore AB = 13$ ， $AE = 5$ ，

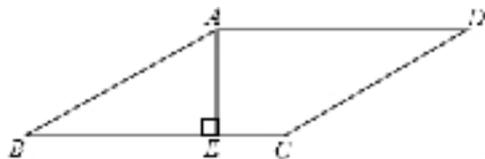
即菱形的边长为 13.

@ (2) 求菱形的面积.

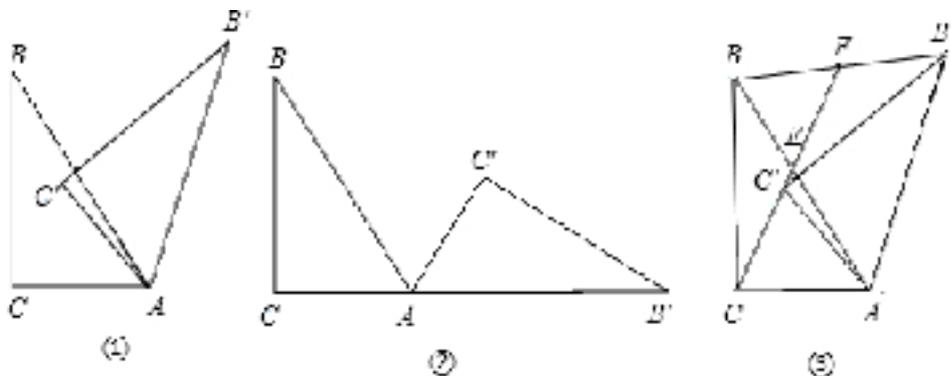
【答案】 65

【解析】 $\because AB = BC = 13$ ， $AE = 5$ ，

\therefore 菱形的面积为： $13 \times 5 = 65$ 。



27. 如图①， $\triangle ABC$ ， $\angle ACB = 90^\circ$ ， $\angle ABC = \alpha$ ，将 $\triangle ABC$ 绕点 A 顺时针旋转得 $\triangle AB'C'$ ，设旋转的角度是 β 。



@ (1) 如图②，当 $\beta =$ _____ (用含 α 的代数式表示) 时，点 B' 恰好落在 CA 的延长线上.

【答案】 $\beta = 90^\circ + \alpha$

【解析】 $\because \angle ABC = \alpha$ ，

$$\therefore \angle BAC = 90^\circ - \alpha,$$

$$\therefore \beta = 90^\circ + \alpha.$$

@ (2) 如图③, 连结 BB' 、 CC' , CC' 的延长线交斜边 AB 于点 E , 交 BB' 于点 F . 请写出图中两对相似三角形_____ , _____ (不含全等三角形, 用现有字母表示).

【答案】 ① $\triangle ABB' \sim \triangle ACC'$, ② $\triangle ACE \sim \triangle FBE$.

【解析】 证明①: $\because \triangle ABC$ 绕点 A 顺时针旋转角 β 得到 $\triangle AB'C'$,

$$\therefore \angle CAC' = \angle BAB' = \beta, AC = AC', AB = AB',$$

$$\therefore \frac{AC}{AB} = \frac{AC'}{AB'}$$

$$\therefore \triangle ABB' \sim \triangle ACC';$$

证明②: $\because \triangle ABC$ 绕点 A 顺时针旋转角 β 得到 $\triangle AB'C'$,

$$\therefore \angle CAC' = \angle BAB' = \beta, AC = AC', AB = AB',$$

$$\therefore \angle ACC' = \angle ABB' = \frac{180^\circ - \beta}{2},$$

$$\text{又 } \angle AEC = \angle FEB,$$

$$\therefore \triangle ACE \sim \triangle FBE.$$

28. 如图所示, 已知抛物线 $y = x^2 - 1$ 与 x 轴交于 A 、 B 两点, 与 y 轴交于点 C .

@ (1) 求 A 、 B 、 C 三点的坐标.

【答案】 $A(-1, 0)$, $B(1, 0)$, $C(0, -1)$.

【解析】 令 $y = 0$, 得 $x^2 - 1 = 0$, 得 $x = \pm 1$,

$$\text{令 } x = 0, y = -1,$$

$$\therefore A(-1, 0), B(1, 0), C(0, -1).$$

@ (2) 过点 A 作 $AP \parallel CB$ 交抛物线于点 P , 求四边形 $ACBP$ 的面积.

【答案】 4

【解析】 $\because OA = OB = OC = 1$,

$$\therefore \angle BAC = \angle ACO = \angle BCO = 45^\circ,$$

$$\therefore AP \parallel CB,$$

$$\therefore \angle PAB = 45^\circ,$$

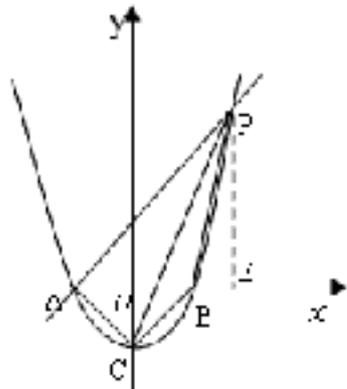
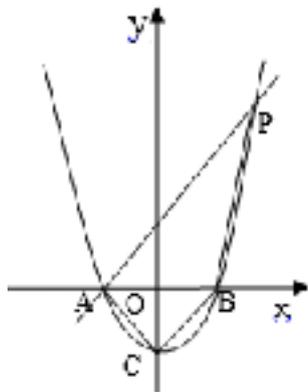
过点 P 作 $PE \perp x$ 轴于 E , 则 $\triangle APE$ 为等腰直角三角形,

$$\text{令 } OE = a, \text{ 则 } PE = a + 1,$$

$$\therefore P(a, a + 1),$$

\because 点 P 在抛物线 $y = x^2 - 1$ 上,

$$\therefore a + 1 = a^2 - 1,$$

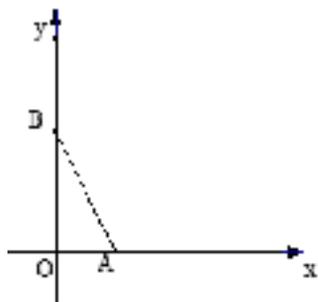


解得 $a_1 = 2$, $a_2 = -1$ (不合题意, 舍)

$\therefore PE = 3$,

\therefore 四边形 $ACBP$ 的面积 $S = \frac{1}{2}AB \cdot OC + \frac{1}{2}AB \cdot PE = \frac{1}{2} \times 2 \times 1 + \frac{1}{2} \times 2 \times 3 = 4$

29. 如图, 在直角坐标系中, O 为坐标原点, 二次函数 $y = x^2 + mx + 2$ 的图象与 x 轴的正半轴交于点 A , 与 y 轴的正半轴交于点 B , 且 $OA:OB = 1:2$. 设此二次函数图象的顶点为 D .



@ (1) 求这个二次函数的解析式.

【答案】 $y = x^2 - 3x + 2$

【解析】 令 $x = 0$, 则 $y = 2$, 故 B 点为 $(0, 2)$, 即 $OB = 2$,
 $\therefore OA:OB = 1:2$,

$\therefore OA = 1$, 即 A 点为 $(1, 0)$,

$\therefore 1 + m + 2 = 0$, 解得 $m = -3$,

\therefore 二次函数的解析式为 $y = x^2 - 3x + 2$.

@ (2) 将 $\triangle OAB$ 绕点 A 顺时针旋转 90° 后, 点 B 落到点 C 的位置. 将上述二次函数图象沿 y 轴向上或向下平移后经过点 C . 请直接写出点 C 的坐标和平移后所得图象的函数解析式.

【答案】 $C(3, 1)$, $y = x^2 - 3x + 1$.

【解析】 见答案.

@ (3) 设 (2) 中平移后所得二次函数图象与 y 轴的交点为 B_1 , 顶点为 D_1 . 点 P 在平移后的二次函数图象上, 且满足 $\triangle PBB_1$ 的面积是 $\triangle PDD_1$ 面积的 2 倍, 求点 P 的坐标.

【答案】 点 P 的坐标为 $(1, -1)$ 或 $(3, 1)$.

【解析】 令 $x = 0$, 则 $y = 1$, 即点 B_1 的坐标为 $(0, 1)$,

令 $x = \frac{3}{2}$, 则 $y = -\frac{5}{4}$, 即点 D_1 的坐标为 $(\frac{3}{2}, -\frac{5}{4})$.

而点 D_1 的坐标为 $(\frac{3}{2}, -\frac{1}{4})$,

$\therefore S_{\triangle PBB_1} = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot x_P = \frac{x_P}{2}$, $S_{\triangle PDD_1} = \frac{1}{2} \cdot |\frac{3}{2} - x_P| \cdot 1 = \frac{|3 - 2x_P|}{4}$,

$\therefore \frac{x_P}{2} = 2 \cdot \frac{|3 - 2x_P|}{4}$,

解得: $x_P = 1$ 或 3 ,

$\therefore y_P = -1$ 或 1 ,

即点 P 的坐标为 $(1, -1)$ 或 $(3, 1)$.