2015北京海淀初三上期中数学试卷

一、选择题（本题共30分，每小题3分）

下面各题均有四个选项，其中只有一个是符合题意的．请将正确选项前的字母填在表格中相应的位置.

1．一元二次方程 $2x^2-x-3=0$ 的二次项系数、一次项系数、常数项分别是（ ）．

A．2，1，3　　B．2，1，-3　　C．2，-1，3　　D．2，-1，-3

2．下列图形是中心对称图形的是（ ）．

A．　　B．　　C．　　D．

3．二次函数 $y=-(x+1)^2-2$ 的最大值是（ ）．

A．-2　　B．-1　　C．1　　D．2

4．已知⊙O 的半径是 4，OP 的长为 3，则点 P 与⊙O 的位置关系是（ ）．

A．点 P 在圆内　　B．点 P 在圆上　　C．点 P 在圆外　　D．不能确定

5．将抛物线 $y=x^2$ 沿 y 轴向下平移 2 个单位，得到的抛物线的解析式为（ ）．

A．$y=x^2+2$　　B．$y=x^2-2$　　C．$y=(x+2)^2$　　D．$y=(x-2)^2$

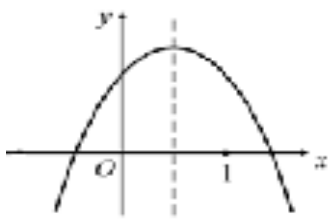
6．已知扇形的半径为 6，圆心角为 $60°$，则这个扇形的面积为（ ）．

A．9　　B．6　　C．3　　D．π

7．用配方法解方程 $x^2+4x=3$，下列配方正确的是（ ）．

A．$(x-2)^2=1$　　B．$(x-2)^2=7$　　C．$(x+2)^2=7$　　D．$(x+2)^2=1$

8．已知二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图象如图所示，则下列选项中不正确的是（ ）．



A．$a<0$

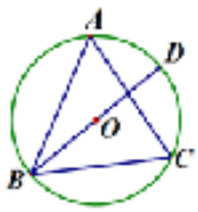
B．$c>0$

C．$0<-\dfrac{b}{2a}<1$

D．$a+b+c<0$

9．如图，$\triangle ABC$ 内接于⊙O，BD 是⊙O 的直径．若 $\angle DBC=33°$，则 $\angle A$ 等于（ ）．

A．$33°$　　B．$57°$



C. 67°　　D. 66°

10．小明乘坐摩天轮转一圈，他离地面的高度 y（米）与旋转时间 x（分）之间的关系可以近似地用二次函数来刻画．经测试得出部分数据如下表：

x / 分	[illegible]	2.66	3.23	3.46	[illegible]
y / 米	[illegible]	69.16	69.62	68.46	[illegible]

下列选项中，最接近摩天轮转一圈的时间的是（ ）．

A．7 分　　　　B．6.5 分

C．6 分　　　　D．5.5 分

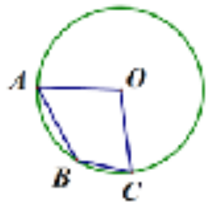
二、填空题（本题共18分，每小题3分）

11．方程 $(x-1)(x-2)=0$ 的解为__________．

12．请写出一个开口向上且经过 $(0,1)$ 的抛物线的解析式__________．

13．若二次函数 $y=2x^2-5$ 的图象上有两个点 $A(2,a)$、$B(3,b)$，则 a __________ b（填"$<$"或"$=$"或"$>$"）．

14．如图，A、B、C 三点在⊙O 上，$\angle AOC=100°$，则 $\angle ABC=$__________°．

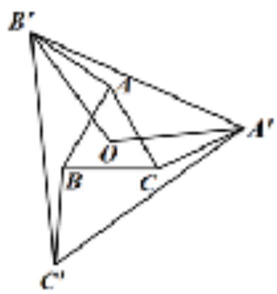


15．用一块直径为 4 米的圆桌布平铺在对角线长为 4 米的正方形桌面上（如示意图），若四周下垂的最大长度相等，则这个最大长度 x 为______米（$\sqrt{2}$ 取 1.4）．

16．如图，O 是边长为 1 的等边 $\triangle ABC$ 的中心，将 AB、BC、CA 分别绕点 A、点 B、点 C 顺时针旋转 α（$0°<\alpha<180°$），得到 AB'、BC'、CA'，连接 $A'B'$、$B'C'$、$A'C'$、OA'、OB'．

(1) $\angle A'OB'=$__________°．

(2) 当 $\alpha=$__________°时，$\triangle A'B'C'$ 的周长最大．



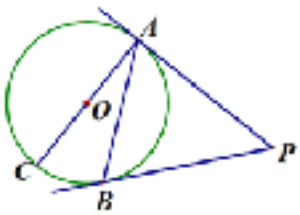
三、解答题（本题共72分，第17~26题，每小题5分，第27题7分，第28题7分，第29题8分）

17．解方程：$x^2 = 3x - 2$．

18.若抛物线 $y=x^2+3x+a$ 与 x 轴只有一个交点，求实数 a 的值.

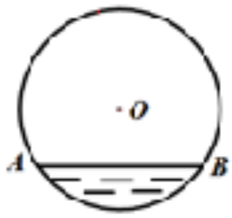
19.已知点 $(3,0)$ 在抛物线 $y=-3x^2+(k+3)x-k$ 上，求此抛物线的对称轴.

20.如图，AC 是$\odot O$ 的直径，PA，PB 是$\odot O$ 的切线，A，B 为切点，$\angle BAC=25^\circ$．求 $\angle P$ 的度数.



21.已知 $x=1$ 是方程 $x^2-5ax+a^2=0$ 的一个根，求代数式 $3a^2-15a-7$ 的值.

22．一圆柱形排水管的截面如图所示，已知排水管的半径为 1m，水面宽 AB 为 1.6m．由于天气干燥，水管水面下降，此时排水管水面宽变为 1.2m，求水面下降的高度.



23．已知关于x的方程$3x^2-(a-3)x-a=0(a>0)$．

（1）求证：方程总有两个不相等的实数根．

（2）若方程有一个根大于2，求a的取值范围．

24．在设计人体雕像时，若使雕像的上部（腰以上）与下部（腰以下）的高度的比等于下部与全部（全身）的高度比，则可以增加视觉美感．按此比例，如果雕像的高为2m，那么它的下部应设计为多高（$\sqrt{5}$取2.2）．

25．已知AB是$\odot O$的直径，AC、AD是$\odot O$的弦，$AB=2$，$AC=\sqrt{2}$，$AD=1$，求$\angle CAD$的度数．

26．抛物线$y_1=x^2+bx+c$与直线$y_2=-2x+m$相交于$A(-2,n)$、$B(2,-3)$两点．

（1）求这条抛物线的解析式．

（2）若$-4\leqslant x\quad 1$，则y_2-y_1的最小值为________．

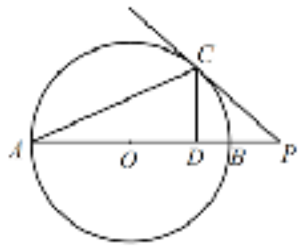
27．如图，AB 为⊙O 的直径，C 为⊙O 上一点，$CD \perp AB$ 于点 D．P 为 AB 延长线上一点，$\angle PCD = 2\angle BAC$．

（1）求证：CP 为⊙O 的切线．

(2) $BP = 1$，$CP = \sqrt{5}$．

①求⊙O 的半径；

②若 M 为 AC 上一动点，则 $OM + DM$ 的最小值为__________．



28．**探究活动：**

利用函数 $y=(x-1)(x-2)$ 的图象（如图1）和性质，探究函数 $y=\sqrt{(x-1)(x-2)}$ 的图象与性质．

下面是小东的探究过程，请补充完整：

（1）函数 $y=\sqrt{(x-1)(x-2)}$ 的自变量x的取值范围是___________；

（2）如图 2，他列表描点画出了函数 $y=\sqrt{(x-1)(x-2)}$ 图象的一部分，请补全函数图象；

图1

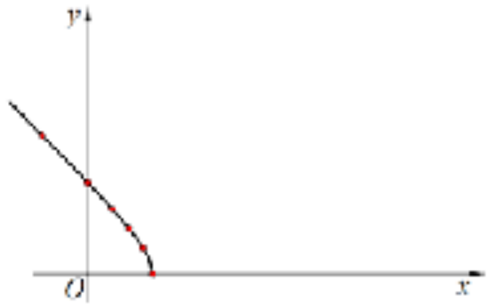


图2

解决问题：

设方程 $\sqrt{(x-1)(x-2)}-\frac{1}{4}x-b=0$ 的两根为 x_1、x_2，且 $x_1<x_2$，方程 $x^2-3x+2=\frac{1}{4}x+b$ 的两根为 x_3、x_4，且 $x_3<x_4$．若 $1<b<\sqrt{2}$，则 x_1、x_2、x_3、x_4 的大小关系为__________（用"<"连接）．

29．在平面直角坐标系xOy中，半径为1的$\odot O$与x轴负半轴交于点A，点M在$\odot O$上，将点M绕点A顺时针旋转60°得到点Q．点N为x轴上一动点（N不与A重合），将点M绕点N顺时针旋转60°得到点P．PQ与x轴所夹锐角为α．

（1）点M的横坐标为$\frac{1}{2}$，点N与点O重合，则$\alpha=$________$^\circ$．

（2）若点M、点Q的位置如图2所示，请在x轴上任取一点N，画出直线PQ，并求α的度数；

（3）当直线PQ与$\odot O$相切时，点M的坐标为________．

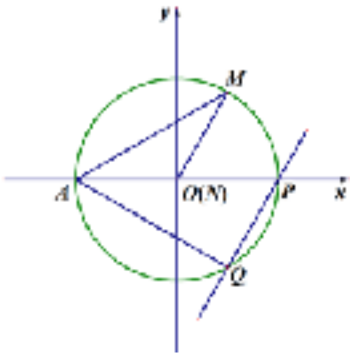


图1

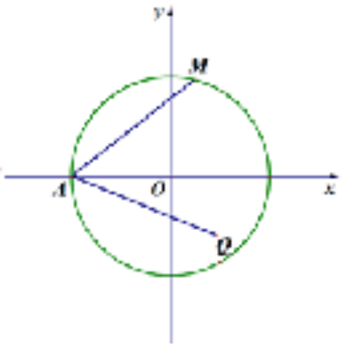
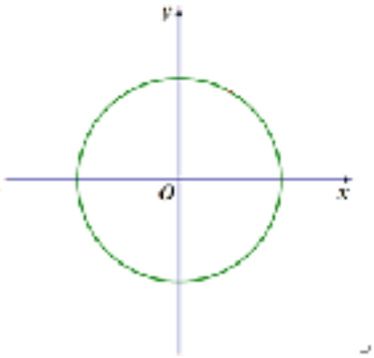


图2



备用图

2015北京海淀初三上期中数学试卷答案

一、选择题（本题共30分，每小题3分）

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
答案	D	A	A	A	B	B	C	D	B	C

二、填空题（本题共18分，每小题3分）

题号	11	12	13	14	15	16
答案	$x_1=1$，$x_2=2$	$y=x^2+1$（答案不唯一）	$<$	130	0.6	120，150

三、解答题（本题共72分，第17~26题，每小题5分，第27题7分，第28题7分，第29题8分）

17．解：$x^2-3x+2=0$，

$(x-1)(x-2)=0$．

$\therefore x-1=0$ 或 $x-2=0$．

$\therefore x_1=1$，$x_2=2$．

18．解：$\because$抛物线 $y=x^2+3x+a$ 与 x 轴只有一个交点，

$\therefore \Delta=0$，

即 $9-4a=0$．

$\therefore a=\dfrac{9}{4}$．

19．解：$\because$点 $(3,0)$ 在抛物线 $y=-3x^2+(k+3)x-k$ 上，

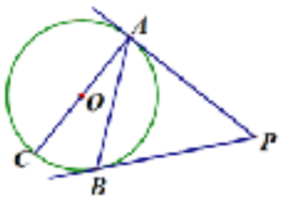
$\therefore 0=-3\times3^2+3(k+3)-k$，

$\therefore k=9$．

$\therefore$抛物线的解析式为 $y=-3x^2+12x-9$．

$\therefore$对称轴为 $x=2$．

20．解：$\because PA$，PB 是$\odot O$的切线，



$\therefore PA=PB$．

$\therefore \angle PAB=\angle PBA$．

$\because AC$ 为$\odot O$的直径，

$\therefore CA\perp PA$．

$\therefore \angle PAC=90^\circ$．

$\because \angle BAC = 25^\circ$,

$\therefore \angle PAB = 65^\circ$.

$\therefore \angle P = 180^\circ - 2\angle PAB = 50^\circ$.

21．解：$\because x = 1$ 是方程 $x^2 - 5ax + a^2 = 0$ 的一个根，

$\therefore 1 - 5a + a^2 = 0$,

$\therefore a^2 - 5a = -1$.

$\therefore$ 原式 $= 3(a^2 - 5a) - 7 = -10$.

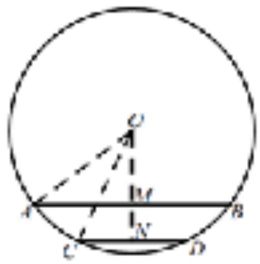
22．解：如图，下降后的水面宽 CD 为 1.2m，连接 OA，OC，过点 O 作 $ON \perp CD$ 于 N，交 AB 于 M.

$\therefore \angle ONC = 90^\circ$.

$\because AB \parallel CD$,

$\therefore \angle OMA = \angle ONC = 90^\circ$.

$\because AB = 1.6$，$CD = 1.2$,



$\therefore AM = \dfrac{1}{2}AB = 0.8$，$CN = \dfrac{1}{2}CD = 0.6$.

在 $\text{Rt}\triangle OAM$ 中，

$\because OA = 1$,

$\therefore OM = \sqrt{OA^2 - AM^2} = 0.6$.

同理可得 $ON = 0.8$.

$\therefore MN = ON - OM = 0.2$.

答：水面下降了 0.2 米.

23．（1）证明：$\Delta = (a-3)^2 - 4 \times 3 \times (-a) = (a+3)^2$.

$\because a > 0$,

$\therefore (a+3)^2 > 0$.

即 $\Delta > 0$.

$\therefore$ 方程总有两个不相等的实数根.

（2）解方程，得 $x_1 = -1$，$x_2 = \dfrac{a}{3}$

$\because$ 方程有一个根大于 2，

$\therefore \dfrac{a}{3} > 2$.

$\therefore a > 6$.

24．解：如图，雕像上部高度 AC 与下部高度 BC 应有 $AC : BC = BC : 2$，

即 $BC^2=2AC$.

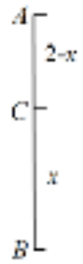
设 BC 为 xm .

依题意，得 $x^2=2(2-x)$.

解得 $x_1=-1+\sqrt{5}$ ， $x_2=-1-\sqrt{5}$ （不符合题意，舍去）.

$\sqrt{5}-1\approx1.2$.

答：雕像的下部应设计为 1.2m .



25．解：如图1，当点 D 、 C 在 AB 的异侧时，连接 OD 、 BC .

$\because AB$ 是$\odot O$ 的直径，

$\therefore\angle ACB=90^\circ$.

在 $\text{Rt}\triangle ACB$ 中，

$\because AB=2$ ， $AC=\sqrt{2}$ ，

$\therefore BC=\sqrt{2}$.

$\therefore\angle BAC=45^\circ$.

$\because OA=OD=AD=1$ ，

$\therefore\angle BAD=60^\circ$.

$\therefore\angle CAD=\angle BAD+\angle BAC=105^\circ$.

当点 D 、 C 在 AB 的同侧时，如图 2 ，同理可得 $\angle BAC=45^\circ$ ， $\angle BAD=60^\circ$.

$\therefore\angle CAD=\angle BAD-\angle BAC=15^\circ$.

$\therefore\angle CAD$ 为 15° 或 105° .

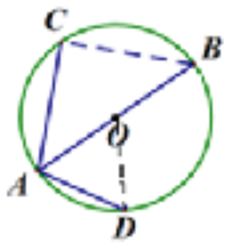


图 1

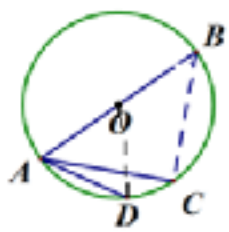


图 2

26．解：（1） $\because$直线 $y_2=-2x+m$ 经过点 $B(2,-3)$ ，

$\therefore -3=-2\times2+m$.

$\therefore m=1$.

$\because$直线 $y_2=-2x+m$ 经过点 $A(-2,n)$ ，

$\therefore n=5$.

$\because$抛物线 $y_1=x^2+bx+c$ 过点 A 和点 B ，

$\therefore\begin{cases}5=4-2b+c\\-3=4+2b+c\end{cases}$ ，

$\therefore$解得 $\begin{cases}b=-2\\c=-3\end{cases}$.

$\therefore y_1=x^2-2x-3$.

（2） -12 .

27. （1）证明：连接OC.

$\because \angle PCD=2\angle BAC$，$\angle POC=2\angle BAC$，

$\therefore \angle POC=\angle PCD$.

$\because CD\perp AB$ 于点 D，

$\therefore \angle ODC=90^\circ$.

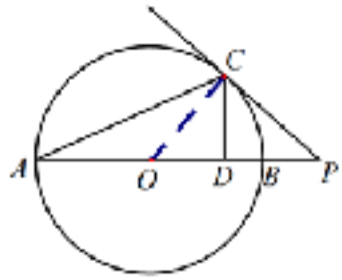
$\therefore \angle POC+\angle OCD=90^\circ$.

$\therefore \angle PCD+\angle OCD=90^\circ$.

$\therefore \angle OCP=90^\circ$.

$\therefore$ 半径 $OC\perp CP$.

$\therefore CP$ 为$\odot O$的切线.



（2）①设$\odot O$的半径为r.

在$\text{Rt}\triangle OCP$中，$OC^2+CP^2=OP^2$.

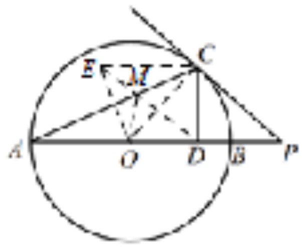
$\because BP=1$，$CP=\sqrt{5}$，

$\therefore r^2+(\sqrt{5})^2=(r+1)^2$.

解得$r=2$.

$\therefore \odot O$的半径为2.

② $\dfrac{2\sqrt{14}}{3}$.



过点O作AC的对称点E，连结CE、CO、CD，

线段ED与线段AC交于M点，

由轴对称可知，$CO=CE$，$\angle OCA=\angle ECA$，

$OM+DM$的最小值即为ED.

$\angle ECD=\angle ACD+\angle ECA=90^\circ$，

在$\text{Rt}\triangle OCP$中，$OC=2$，$OP=3$，$CP=\sqrt{5}$，

$$CD=\frac{OC\cdot PC}{OP}=\frac{2\sqrt{5}}{3}.$$

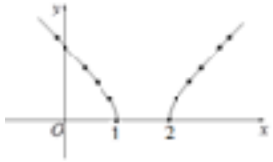
在$\text{Rt}\triangle ECD$中，由勾股定理可得，

$$DE=\sqrt{CD^2+CE^2}=\sqrt{(\frac{2\sqrt{5}}{3})^2+2^2}=\frac{2\sqrt{14}}{3}.$$

即$OM+DM$的最小值为$\dfrac{2\sqrt{14}}{3}$.

28. 解：（1）$x\le 1$或$x\ge 2$.

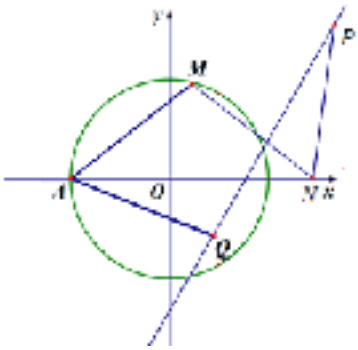
（2）如图所示：



$x_1 < x_3 < x_4 < x_2$.

29. 解：（1）60.

（2）



.

连接MQ，MP．记MQ，PQ分别交x轴于E，F．

$\because$将点M绕点A顺时针旋转$60°$得到点Q，将点M绕点N顺时针旋转$60°$得到点P，

$\therefore \triangle MAQ$和$\triangle MNP$均为等边三角形．

$\therefore MA = MQ$，$MN = MP$，$\angle AMQ = \angle NM = 60°$．

$\therefore \angle AMN = \angle QMP$．

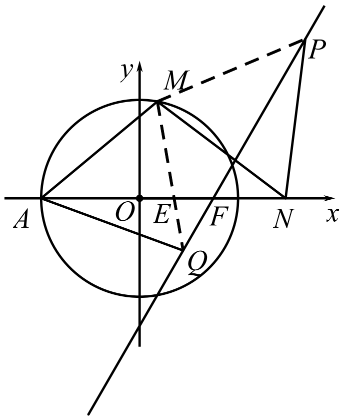
$\therefore \triangle MAN \cong \triangle MQP$．

$\therefore \angle MAN = \angle MQP$．

$\because \angle AEM = \angle QEF$，

$\therefore \angle QFE = \angle AMQ = 60°$．

$\therefore \alpha = 60°$．



（3）$(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2})$或$(-\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2})$．

连结OK，过M作$ME \perp x$轴于E，

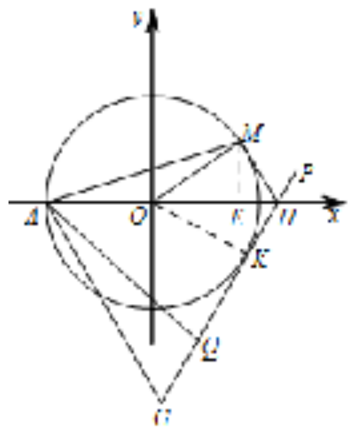
由（2）可知，α始终等于$60°$，

直线PQ与x轴交于H，以AH为边向下构建等边$\triangle AHG$，

$\angle MAH = \angle QAG$，

在$\triangle MAH$和$\triangle QAG$中，

$$\begin{cases} AM = AQ \\ \angle MAH = \angle QAG \\ AH = AG \end{cases}$$，



$\therefore \triangle MAH \cong \triangle QAG$（SAS），

$\therefore \angle AHM = \angle AGQ = 60^\circ$．

$\because PQ$ 与 $\odot O$ 相切，

$\therefore OK \perp PQ$，$OK = 1$．

在 $\mathrm{Rt}\triangle OKH$ 中，$\angle OHK = 60^\circ$，

$\therefore OH = \frac{2\sqrt{3}}{3}$．

设 $EH = x$，则 $ME = \sqrt{3}x$，$OE = \frac{2\sqrt{3}}{3} - x$，

在 $\mathrm{Rt}\triangle OME$ 中，由勾股定理可知，

$(\frac{2\sqrt{3}}{3} - x)^2 + (\sqrt{3}x)^2 = 1^2$，

解得 $x = \frac{\sqrt{3}}{6}$．

$\therefore OE = \frac{\sqrt{3}}{2}$，$ME = \frac{1}{2}$，

即 $M(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2})$．

同理 $M(-\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2})$．

$\therefore$当直线 PQ 与 $\odot O$ 相切时，点 M 的坐标为 $(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2})$ 或 $(-\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2})$．

2015北京海淀初三上期中数学试卷部分答案解析

一、选择题（本题共30分，每小题3分）

1. 【答案】D

【解析】一元二次方程 $2x^2-x-3=0$ 的二次项系数是 2、一次项系数 -1、常数项分别是 -3.

2. 【答案】A

【解析】依据中心对称图形的定义可知，只有图形 A 是中心对称图形.

3. 【答案】A

【解析】二次函数 $y=-(x+1)^2-2$ 的最大值是为 -2.

4. 【答案】A

【解析】已知⊙O 的半径是 4， OP 的长为 3， $OP<R$， 则点 P 在⊙O 内.

5. 【答案】B

【解析】将抛物线 $y=x^2$ 沿 y 轴向下平移 2 个单位，得到的抛物线的解析式为 $y=x^2-2$.

6. 【答案】B

【解析】已知扇形的半径为 6， 圆心角为 $60°$， 则这个扇形的面积为 $S=\frac{60\ \times\ ^2}{360}=6$.

7. 【答案】C

【解析】用配方法解方程 $x^2+4x=3$， $x^2+4x+4=3+4$， $(x+2)^2=7$.

8. 【答案】D

【解析】依题可知， $a<0$， $b>0$， $c>0$， $0<-\frac{b}{2a}<1$， $a+b+c>0$.

9. 【答案】B

【解析】连结 DC，

∵ BD 是⊙O 的直径，

∴ $\angle BCD=90°$.

∵ $\angle DBC=33°$，

∴ $\angle A=\angle BDC=90°-\angle DBC=57°$.

10. 【答案】C

【解析】依表格可知，二次函数的对称轴接近 3，所以摩天轮转一圈最接近的时间为 6 分钟.

二、填空题（本题共18分，每小题3分）

11. 【答案】 $x_1=1$， $x_2=2$

【解析】方程 $(x-1)(x-2)=0$ 的解为 $x_1=1$， $x_2=2$.

12. 【答案】 $y=x^2+1$ （答案不唯一）

【解析】开口向上且经过$(0,1)$的抛物线的解析式$y=x^2+1$（答案不唯一），$a>0$，$c=1$即可.

13. 【答案】$<$

【解析】若二次函数$y=2x^2-5$的图象上有两个点$A(2,a)$、$B(3,b)$，开口向上，对称轴为y轴，点B离对称轴更远，则$a<b$.

14. 【答案】130

【解析】$\because \angle AOC=100^\circ$，$\therefore \overset{\frown}{AC}$所对的圆周角为$50^\circ$，

$\therefore \angle ABC=130^\circ$.

15. 【答案】0.6

【解析】依题可知，正方形的对角线即为圆桌的直径4，

$\therefore$正方形的边长为$2\sqrt{2}$，圆心到正方形的边心距为$\sqrt{2}$，

即$x=2-\sqrt{2}\approx 0.6$.

16. 【答案】120，150

【解析】（1）连接OA、OB、OC、OC'.

依题可知，$AB=AB'=BC=BC'=CA=CA'$，

$\angle BAB'=CBC'=ACA'=\alpha$.

$\because O$是等边$\triangle ABC$的中心，

$\therefore OA=OB=OC$，$\angle OAB=\angle OBC=\angle OCA=30^\circ$，

$\angle AOB=\angle BOC=\angle AOC=120^\circ$，

$\triangle OAB'\cong\triangle OBC'\cong\triangle OCA'$，

$\therefore \angle AOB'=\angle COA'$，

$\therefore \angle A'OB'=\angle AOC=120^\circ$.

（2）$\triangle OAB'\cong\triangle OBC'\cong\triangle OCA'$，

$\therefore OA'=OB'=OC'$，$\angle A'OB'=\angle A'OC'=\angle B'OC'=120^\circ$，

$\therefore \triangle A'B'C'$为等边三角形.

$\triangle A'B'C'$周长最大，OB'要最大，

当且仅当O、A、B'三点共线时，OB'最大，

$\angle OAB+\angle BAB'=180^\circ$，

即$\alpha=150^\circ$.

OB'最大值为$OA+AB'=OA+AB=1+\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，$\triangle A'B'C'$的周长最大值为$3+\sqrt{3}$.