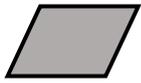


2015-2016学年北京市人大附中初二上学期期中数学试题

一、选择题：（每小题3分，共30分）

1. 下列四个图形中不是轴对称图形的是（ ）。



A.



B.



C.



D.

2. 若分式 $\frac{x-4}{x+2}$ 的值为0，则 x 的值为（ ）。

A. -2

B. 4

C. -2 或 4

D. 无法确定

3. 在下列运算中，正确的是（ ）。

A. $a^5 + a^5 = 2a^5$

B. $(a^2)^3 = a^5$

C. $a^6 \div a^2 = a^3$

D. $a^2 \cdot a^3 = a^6$

4. 在直角坐标系中，点 $M(1,2)$ 关于 y 轴对称的点的坐标为（ ）。

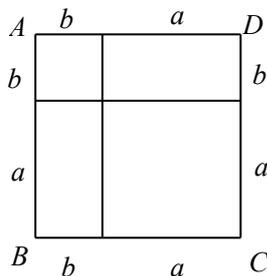
A. (1,-2)

B. (2,-1)

C. (-1,2)

D. (-1,-2)

5. 如图，通过计算正方形 $ABCD$ 的面积，可以说明下列哪个等式成立（ ）。



A. $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

B. $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

C. $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$

D. $a(a-b) = a^2 - ab$

6. 若 $x+p$ 与 $x+2$ 的乘积中不含 x 的一次项，则 p 的值为（ ）。

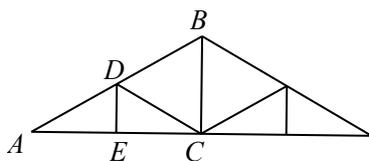
A. 2

B. -2

C. 1

D. 0

7. 右图是屋架设计图的一部分，点 D 是斜架 AB 的中点，立柱 BC ， DE 分别垂直横梁 AC ， $AB = 8\text{cm}$ ， $\angle A = 30^\circ$ ，则 DE 等于（ ）。



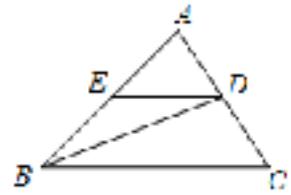
A. 1cm

B. 2cm

C. 3cm

D. 4cm

8. 如图， BD 是 $\triangle ABC$ 的角平分线， $DE \parallel BC$ ， DE 交 AB 于 E ，若 $AB = BC$ ，则下列结论中错误的是（ ）。



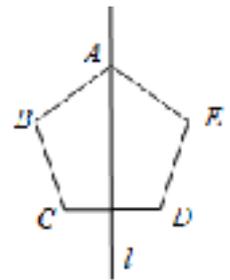
- A. $BD \perp AC$ B. $\angle A = \angle EDA$ C. $2AD = BC$ D. $BE = ED$

9. 将一个等腰直角三角形对折后再对折，得到如图所示的图形，然后将阴影部分剪掉，把剩余部分展开后的平面图形是 () .



- A. B. C. D.

10. 如图所示，在正五边形的对称轴直线 l 上找点 P ，使得 $\triangle PCD$ 、 $\triangle PDE$ 均为等腰三角形，则满足条件的点 P 有 () .



- A. 4个 B. 5个 C. 6个 D. 7个

二、填空题：(19题后两空各一分，其余每空2分，共20分)

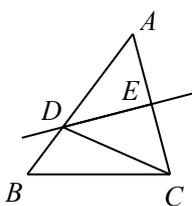
11. 计算 $(\pi - 3)^0$ 的结果是_____.

12. 如果分式 $\frac{1}{x-5}$ 有意义，那么 x 的取值范围是_____.

13. $3^{2016} \times \left(\frac{1}{3}\right)^{2015} =$ _____.

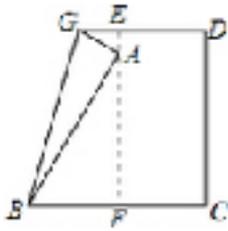
14. 已知 $x + y = 7$ ， $xy = 7$ ，则 $x^2 + y^2$ 的值是_____.

15. 如图， $\triangle ABC$ 中， DE 是 AC 的垂直平分线， $AB = 6\text{cm}$ ， $BC = 4\text{cm}$ ，则 $\triangle BCD$ 的周长为_____.



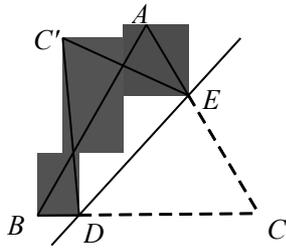
16. 如图，将正方形纸片对折，折痕为 EF ，展开后继续折叠，使点 A 落在 EF 上，折痕为 GB ，则 $\angle ABG$

的度数为_____.



17. 如图, 等边 $\triangle ABC$ 中, $AB=5$, D 、 E 分别是 BC 、 AC 上的点, 将 $\triangle EDC$ 沿直线 DE 翻折后, 点 C 落在点 C' 处, 且点 C' 在 $\triangle ABC$ 的外部, 则图中阴影部分的

周长为_____.



18. 对于实数 a , b , c , d , 规定一种运算 $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$, 如 $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 1 \times 2 - 0 \times 2 = -2$, 那么当 $\begin{vmatrix} x+1 & x+2 \\ x-3 & x-1 \end{vmatrix} = 27$ 时, 则 $x =$ _____.

19. 平面直角坐标系中有一点 $A(1,1)$ 对点 A 进行如下操作:

第一步, 做点 A 关于 x 轴的对称点 A_1 , 延长线段 AA_1 到点 A_2 , 使得 $2A_1A_2 = AA_1$;

第二步, 做点 A_2 关于 y 轴的对称点 A_3 , 延长线段 A_2A_3 到点 A_4 , 使得 $2A_3A_4 = A_2A_3$;

第三步, 做点 A_4 关于 x 轴的对称点 A_5 , 延长线段 A_4A_5 到点 A_6 , 使得 $2A_5A_6 = A_4A_5$;

.....

则点 A_2 的坐标为_____, 点 A_{2015} 的坐标为_____;

若点 A_n 的坐标恰好为 $(4^m, 4^m)$ (m, n 均为正整数), 请写出 m 和 n 的关系式_____.

三、简答题: (每小题4分, 共28分)

20. 计算: (1) $x^4 \div x^2 + (x+6)(x-3)$; (2) $(2x+y)(2x-y) + (x+2y)^2$.

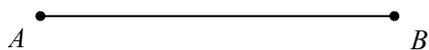
21. 分解因式: (1) $5ax^2 - 5ay^2$; (2) $9m^2n - 6mn + n$.

22. 先化简, 再求值:

(1) $(a^2b - 2ab^2 - b^3) \div b - (a+b)(3a+b)$, 其中 $a=1.5$, $b=-1$.

(2) $(2x+1)^2 - x(x-1) + (x+2)(x-2)$, 其中 $4x^2 + 5x - 1 = 0$.

23. 尺规作图: 请做出线段 AB 的垂直平分线 CD , 并说明作图依据.

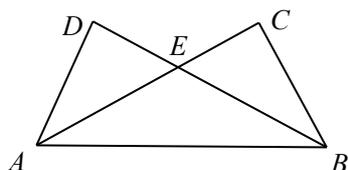


结论：_____；

作图依据：_____。

四、解答题：（每小题4分，共12分）

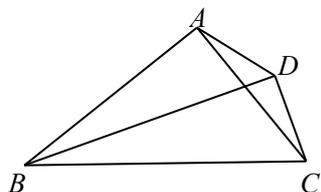
24. 如图， $AD = BC$ ， AC 与 BD 相交于点 E ，且 $AC = BD$ ，求证： $AE = BE$ 。



25. 列方程解应用题：

如果一个正方形的边长增加4厘米，那么它的面积就增加40平方厘米，则这个正方形的边长是多少？

26. 如图，在 $\triangle ABC$ 中， BD 为 $\angle ABC$ 的平分线， $CD \perp BD$ 于 D ，且 $\angle DAC = \angle DCA$ ，请判断 AB 和 AC 的位置关系，并证明。



27. 阅读理解应用

待定系数法：设某一多项式的全部或部分系数为未知数，利用当两个多项式为恒等式时，同类项系数相等的原理确定这些系数，从而得到待求的值。

待定系数法可以应用到因式分解中，例如问题：因式分解 $x^3 - 1$ 。

因为 $x^3 - 1$ 为三次多项式，若能因式分解，则可以分解成一个一次多项式和一个二次多项式的乘积。

故我们可以猜想 $x^3 - 1$ 可以分解成 $x^3 - 1 = (x - 1)(x^2 + ax + b)$ ，展开等式右边得：

$x^3 + (a - 1)x^2 + (b - a)x - b$ ，根据待定系数法原理，等式两边多项式的同类项的对应系数相等， $a - 1 = 0$ ， $b - a = 0$ ， $-b = -1$ ，可以求出 $a = 1$ ， $b = 1$ 。

所以 $x^3 - 1 = (x - 1)(x^2 + x + 1)$ 。

(1) 若 x 取任意值，等式 $x^2 + 2x + 3 = x^2 + (3 - a)x + 3$ 恒成立，则 $a =$ _____；

(2) 已知多项式 $3x^3 + x^2 + 4x - 4$ 有因式 $3x - 2$ ，请用待定系数法求出该多项式的另一因式；

(3) 因式分解： $x^3 - 2x^2 - 2x + 1$ 。

28. 已知，点 D 是 $\triangle ABC$ 内一点，满足 $AD = AC$ 。

(1) 已知 $\angle CAD = 2\angle BAD$, $\angle ABD = 30^\circ$.

①如图1, 若 $\angle BAC = 60^\circ$, $\angle ACB = 80^\circ$, 请判断 BD 和 CD 的数量关系
(直接写出答案)

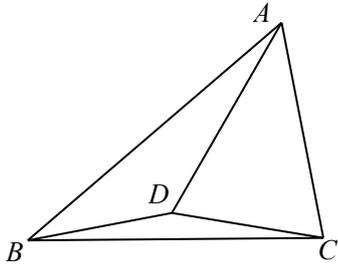


图1

②如图2 当 $\angle BAC \neq 60^\circ$, $\angle ACB \neq 80^\circ$ 时, 请问①的结论还成立吗? 并说明理由.

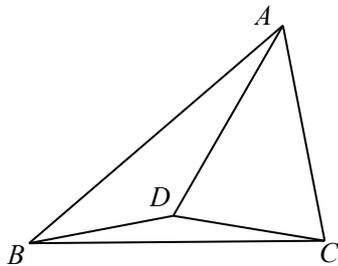


图2

(2) 如图3, 若 $\angle ACB = 2\angle ABC$, $BD = CD$, 试证明 $\angle CAD = 2\angle BAD$.

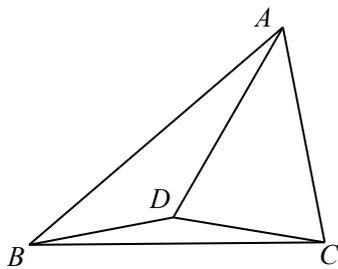


图3



2015-2016学年北京市人大附中初二上学期期中数学试题解析

一、选择题：（每小题3分，共30分）

1. 下列四个图形中不是轴对称图形的是（ ）.



A.



B.



C.

【答案】A

【解析】平行四边形不是轴对称图形.

2. 若分式 $\frac{x-4}{x+2}$ 的值为0, 则 x 的值为（ ）.

A. -2

B. 4

C. -2 或 4

D. 无法确定

【答案】B

【解析】 $x-4=0$, $x+2 \neq 0$, $\therefore x=4$.

3. 在下列运算中, 正确的是（ ）.

A. $a^5 + a^5 = 2a^5$

B. $(a^2)^3 = a^5$

C. $a^6 \div a^2 = a^3$

D. $a^2 \cdot a^3 = a^6$

【答案】A

【解析】幂的乘方底数不变指数相乘, $(a^2)^3 = a^6$, 故 B 错误;

同底数幂的除法底数不变指数相减, $a^6 \div a^2 = a^4$, 故 C 错误;

同底数幂的乘法底数不变指数相加, $a^2 \cdot a^3 = a^5$, 故 D 错误;

所以选 A.

4. 在直角坐标系中, 点 $M(1,2)$ 关于 y 轴对称的点的坐标为（ ）.

A. (1,-2)

B. (2,-1)

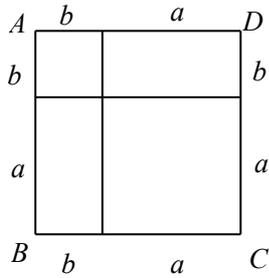
C. (-1,2)

D. (-1,-2)

【答案】C

【解析】两点关于 y 轴对称，纵坐标相同，横坐标互为相反数。∴点 $M(1,2)$ 关于 y 轴对称的点的坐标为 $(-1,2)$ 。

5. 如图，通过计算正方形 $ABCD$ 的面积，可以说明下列哪个等式成立（ ）。



A. $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

B. $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

C. $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$

D. $a(a-b) = a^2 - ab$

【答案】A

【解析】由图可知，正方形 $ABCD$ 的面积为 $(a+b)^2$ ，由两个面积为 ab 的矩形和两个面积分别为 a^2 ， b^2 的正方形组成，∴得 $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ 。

6. 若 $x+p$ 与 $x+2$ 的乘积中不含 x 的一次项，则 p 的值为（ ）。

A. 2

B. -2

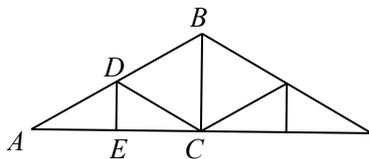
C. 1

D. 0

【答案】B

【解析】 $(x+p)(x+2) = x^2 + (p+2)x + 2p$ ， $x+p$ 与 $x+2$ 的乘积中不含 x 的一次项，∴ $p+2=0$ ， $p=-2$ 。

7. 右图是屋架设计图的一部分，点 D 是斜架 AB 的中点，立柱 BC ， DE 分别垂直横梁 AC ， $AB=8\text{cm}$ ， $\angle A=30^\circ$ ，则 DE 等于（ ）。



A. 1cm

B. 2cm

C. 3cm

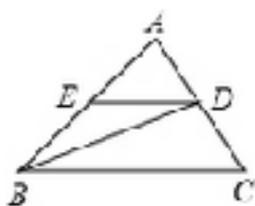
D. 4cm

【答案】B

【解析】∵ BC ， DE 分别垂直横梁 AC ，
∴ $BC \parallel DE$
∵点 D 是斜架 AB 的中点，

$$\begin{aligned} \therefore DE &= \frac{1}{2}BC, \\ \therefore AB &= 8\text{cm}, \quad \angle A = 30^\circ, \\ \therefore BC &= 4\text{cm}, \\ \therefore DE &= 2\text{cm}. \end{aligned}$$

8. 如图, BD 是 $\triangle ABC$ 的角平分线, $DE \parallel BC$, DE 交 AB 于 E , 若 $AB = BC$, 则下列结论中错误的是 ().



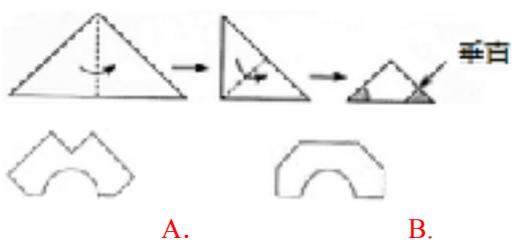
- A. $BD \perp AC$ B. $\angle A = \angle EDA$ C. $2AD = BC$ D. $BE = ED$

【答案】C

【解析】 $\because BD$ 是 $\triangle ABC$ 的角平分线, $AB = BC$,
 $\therefore AD = DC$, $BD \perp AC$ (三线合一), $\angle A = \angle C$
 $\because DE \parallel BC$,
 $\therefore \angle ADE = \angle C$, $\angle EDB = \angle DBC$,
 $\therefore \angle A = \angle EDA$,
 $\therefore BD$ 平分 $\angle ABC$,
 $\therefore \angle ABD = \angle DBC$,
 $\therefore \angle ADB = \angle EDB$,
 $\therefore EB = ED$.

若 $2AD = BC$, 则 $AC = BC$, 条件不充分, 与题意不符, 故 C 错.

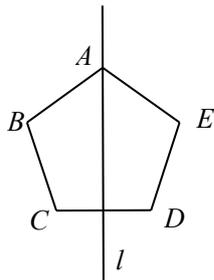
9. 将一个等腰直角三角形对折后再对折, 得到如图所示的图形, 然后将阴影部分剪掉, 把剩余部分展开后的平面图形是 ().



【答案】A

【解析】左侧阴影是一个圆心角为 45° 的扇形, 展开后是半圆, 右侧阴影为等腰直角三角形, 展开后是直角, 故选 A.

10. 如图所示，在正五边形的对称轴直线 l 上找点 P ，使得 $\triangle PCD$ 、 $\triangle PDE$ 均为等腰三角形，则满足条件的点 P 有 ()。



A. 4个

B. 5个

C. 6个

D. 7个

【答案】 B

【解析】 \because 点 P 在对称轴直线 l 上，

$\therefore PC = PD$ ，此时 $\triangle PCD$ 为等腰三角形，

作 DE 的垂直平分线交直线 l 于一点 P ，此时 $PE = PD$ ，

分别以 D ， E 为圆心， DE 长为半径作圆，交直线 l 于四点，此时 $\triangle PCD$ 、 $\triangle PDE$ 均为等腰三角形，

\therefore 满足条件的点 P 有 5 个。

二、填空题：（19题后两空各一分，其余每空2分，共20分）

11. 计算 $(\pi - 3)^0$ 的结果是_____。

【答案】 1

【解析】 任何非零实数的 0 次幂均为 1。

12. 如果分式 $\frac{1}{x-5}$ 有意义，那么 x 的取值范围是_____。

【答案】 $x \neq 5$

【解析】 分式 $\frac{1}{x-5}$ 有意义，即 $x-5 \neq 0$ ， $x \neq 5$ 。

13. $3^{2016} \times \left(\frac{1}{3}\right)^{2015} =$ _____。

【答案】 3

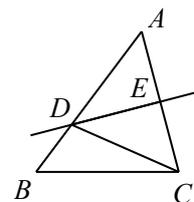
【解析】 $3^{2016} \times \left(\frac{1}{3}\right)^{2015} = 3 \times 3^{2015} \times \left(\frac{1}{3}\right)^{2015} = 3 \times \left(3 \times \frac{1}{3}\right)^{2015} = 3$ 。

14. 已知 $x + y = 7$ ， $xy = 7$ ，则 $x^2 + y^2$ 的值是_____。

【答案】 35

【解析】 $\because x + y = 7$,
 $\therefore (x + y)^2 = 7^2 = 49$,
 $\therefore x^2 + y^2 = (x + y)^2 - 2xy = 49 - 2 \times 7 = 35$

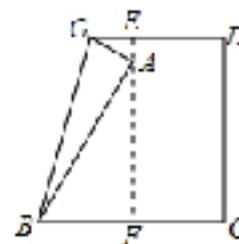
15. 如图, $\triangle ABC$ 中, DE 是 AC 的垂直平分线, $AB = 6\text{cm}$, $BC = 4\text{cm}$, 则 $\triangle BCD$ 的周长为 _____.



【答案】 10cm

【解析】 $\because DE$ 是 AC 的垂直平分线,
 $\therefore DC = DA$,
 $\therefore \triangle BCD$ 的周长为 $BC + BD + CD = BC + BD + AD = BC + AB = 4 + 6 = 10(\text{cm})$

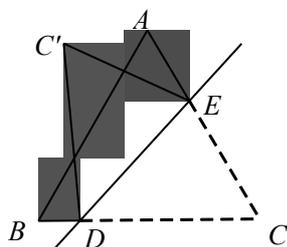
16. 如图, 将正方形纸片对折, 折痕为 EF , 展开后继续折叠, 使点 A 落在 EF 上, 折痕为 GB , 则 $\angle ABG$ 的度数为 _____.



【答案】 15°

【解析】 $\because AF \perp BC$, $BF = \frac{1}{2} AB$,
 $\therefore \angle BAF = 30^\circ$,
 $\therefore \angle ABF = 60^\circ$,
 $\therefore \angle ABG = \frac{1}{2}(90^\circ - 60^\circ) = 15^\circ$.

17. 如图, 等边 $\triangle ABC$ 中, $AB=5$, D 、 E 分别是 BC 、 AC 上的点, 将 $\triangle EDC$ 沿直线 DE 翻折后, 点 C 落在点 C' 处, 且点 C' 在 $\triangle ABC$ 的外部, 则图中阴影部分的周长为_____.



【答案】 15

【解析】 \because 点 C' 和点 C 关于 DE 对称,

$$\therefore CE = C'E, \quad C'D = CD,$$

\therefore 阴影部分的周长即是 $\triangle ABC$ 的周长.

$$\therefore \text{周长为 } 5 \times 3 = 15.$$

18. 对于实数 a , b , c , d , 规定一种运算 $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$, 如 $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = 1 \times (-2) - 0 \times 2 = -2$, 那么当

$$\begin{vmatrix} (x+1)(x+2) \\ (x-3)(x-1) \end{vmatrix} = 27$$

时, 则 $x =$ _____.

【答案】 22

【解析】 由题意得: $(x+1)(x-1) - (x-3)(x+2) = 27$,

$$\therefore x^2 - 1 - x^2 + x + 6 = 27,$$

$$\therefore x = 22$$

19. 平面直角坐标系中有一点 $A(1,1)$ 对点 A 进行如下操作:

第一步, 做点 A 关于 x 轴的对称点 A_1 , 延长线段 AA_1 到点 A_2 , 使得 $2A_1A_2 = AA_1$;

第二步, 做点 A_2 关于 y 轴的对称点 A_3 , 延长线段 A_2A_3 到点 A_4 , 使得 $2A_3A_4 = A_2A_3$;

第三步, 做点 A_4 关于 x 轴的对称点 A_5 , 延长线段 A_4A_5 到点 A_6 , 使得 $2A_5A_6 = A_4A_5$;

.....

则点 A_2 的坐标为_____, 点 A_{2015} 的坐标为_____;

若点 A_n 的坐标恰好为 $(4^m, 4^m)$ (m, n 均为正整数), 请写出 m 和 n 的关系式_____.

【答案】 $(1, -2)$; $(2^{504}, 2^{505})$; $m = n$.

【解析】 由题意得: $A_1(1, -1)$, $A_2(1, -2)$, $A_3(-1, -2)$, $A_4(-2, -2)$, $A_5(-2, 2)$, $A_6(-2, 4)$, $A_7(2, 4)$, $A_8(4, 4)$,

$$\therefore 2015 \div 8 = 251 \text{ 余 } 7,$$

\therefore 点 A_{2015} 为第 252 循环组的第一象限的倒数第二个点,

$$\therefore A_{2015}(2^{504}, 2^{505}),$$

点 A_n 的坐标恰好为 $(4^m, 4^n)$ (m 、 n 均为正整数),

$$\therefore m = n.$$

故答案为: $(1, -2)$; $(2^{504}, 2^{505})$; $m = n$.

三、简答题: (每小题4分, 共28分)

20. 计算: (1) $x^4 \div x^2 + (x+6)(x-3)$.

(2) $(2x+y)(2x-y) + (x+2y)^2$.

【答案】

【解析】 (1) $x^4 \div x^2 + (x+6)(x-3)$
 $= x^2 + x^2 + 3x - 18$
 $= 2x^2 + 3x - 18$.

(2) $(2x+y)(2x-y) + (x+2y)^2$
 $= 4x^2 - y^2 + x^2 + 4xy + 4y^2$
 $= 5x^2 + 4xy + 3y^2$.

21. 分解因式: (1) $5ax^2 - 5ay^2$.

(2) $9m^2n - 6mn + n$.

【答案】

【解析】 (1) $5ax^2 - 5ay^2$
 $= 5a(x+y)(x-y)$

(2) $9m^2n - 6mn + n$
 $= n(3m-1)^2$

22. 先化简, 再求值:

(1) $(a^2b - 2ab^2 - b^3) \div b - (a+b)(3a+b)$, 其中 $a=1.5$, $b=-1$.

【答案】

【解析】 $= a^2 - 2ab - b^2 - 3a^2 - ab - 3ab - b^2$
 $= -2a^2 - 6ab - 2b^2$

代入 $a=1.5$, $b=-1$,

原式 $= -2 \times 1.5^2 - 6 \times 1.5 \times (-1) - 2 \times (-1)^2$
 $= -4.5 + 9 - 2$

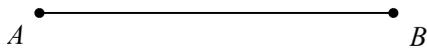
= 2.5

(2) $(2x+1)^2 - x(x-1) + (x+2)(x-2)$, 其中 $4x^2 + 5x - 1 = 0$.

【答案】

【解析】 原式 $= 4x^2 + 4x + 1 - x^2 + x + x^2 - 4$
 $= 4x^2 + 5x - 3$
 $= 1 - 3$
 $= -2$

23. 尺规作图：请做出线段 AB 的垂直平分线 CD , 并说明作图依据.

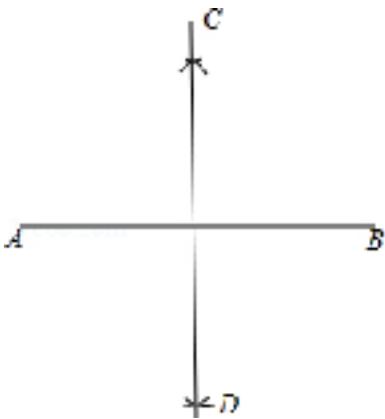


结论：_____；

作图依据：_____.

【答案】

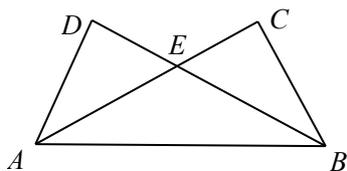
【解析】



作图依据：与一条线段两个端点距离相等的点，在这条线段的垂直平分线上.

四、解答题：（每小题4分，共12分）

24. 如图， $AD = BC$, AC 与 BD 相交于点 E , 且 $AC = BD$, 求证： $AE = BE$.



【答案】

【解析】 证明：在 $\triangle ABD$ 和 $\triangle BAC$ 中，

$$\begin{cases} AD = BC \\ AB = BA \\ AC = BD \end{cases},$$

$$\therefore \triangle ABD \cong \triangle BAC \text{ (SSS)}$$

$$\therefore \angle BAC = \angle ABD$$

$$\therefore AE = BE.$$

25. 列方程解应用题:

如果一个正方形的边长增加4厘米,那么它的面积就增加⁴⁰平方厘米,则这个正方形的边长是多少?

【答案】 3厘米.

【解析】 设这个正方形的边长是 x 厘米,

由题意得:

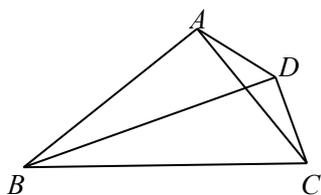
$$(x+4)^2 - x^2 = 40$$

解得:

$$x = 3,$$

\therefore 这个正方形的边长是3厘米.

26. 如图,在 $\triangle ABC$ 中, BD 为 $\angle ABC$ 的平分线, $CD \perp BD$ 于 D ,且 $\angle DAC = \angle DCA$,请判断 AB 和 AC 的位置关系,并证明.



【答案】

【解析】 $AB \perp AC$.

证明: $\because BD$ 为 $\angle ABC$ 的平分线,

$$\therefore \angle ABD = \angle DBC,$$

$$\therefore CD \perp BD,$$

$$\therefore \angle BDC = \angle BDE = 90^\circ,$$

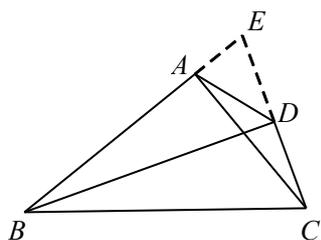
$$\therefore BD = BD,$$

$$\therefore \triangle BCD \cong \triangle BED \text{ (ASA)}$$

$$\therefore CD = ED,$$

$$\therefore \angle DAC = \angle DCA,$$

$$\begin{aligned} \therefore DA = DC, \\ \therefore DA = DC = DE, \\ \therefore \angle E = \angle DAE, \\ \therefore \angle E + \angle DAE + \angle DAC + \angle DCA = 180^\circ, \\ \therefore \angle EAD + \angle DAC = 90^\circ, \\ \therefore \angle BAC = 90^\circ, \\ \therefore AB \perp AC. \end{aligned}$$



27. 阅读理解应用

待定系数法：设某一多项式的全部或部分系数为未知数，利用当两个多项式为恒等式时，同类项系数相等的原理确定这些系数，从而得到待求的值。

待定系数法可以应用到因式分解中，例如问题：因式分解 $x^3 - 1$ 。

因为 $x^3 - 1$ 为三次多项式，若能因式分解，则可以分解成一个一次多项式和一个二次多项式的乘积。

故我们可以猜想 $x^3 - 1$ 可以分解成 $x^3 - 1 = (x - 1)(x^2 + ax + b)$ ，展开等式右边得：

$x^3 + (a - 1)x^2 + (b - a)x - b$ ，根据待定系数法原理，等式两边多项式的同类项的对应系数相等， $a - 1 = 0$ ， $b - a = 0$ ， $-b = -1$ ，可以求出 $a = 1$ ， $b = 1$ 。

所以 $x^3 - 1 = (x - 1)(x^2 + x + 1)$ 。

(1) 若 x 取任意值，等式 $x^2 + 2x + 3 = x^2 + (3 - a)x + 3$ 恒成立，则 $a =$ _____；

(2) 已知多项式 $3x^3 + x^2 + 4x - 4$ 有因式 $3x - 2$ ，请用待定系数法求出该多项式的另一因式；

(3) 因式分解： $x^3 - 2x^2 - 2x + 1$ 。

【答案】 (1) 1；

(2) $x^2 + x + 2$ ；

(3) $x^3 - 2x^2 - 2x + 1 = (x + 1)(x^2 - 3x + 1)$ 。

【解析】 (1) 由题意得： $2 = 3 - a$ ， $\therefore a = 1$ 。

(2) 设 $3x^3 + x^2 + 4x - 4 = (3x - 2)(x^2 + ax + 2) = 3x^3 + (3a - 2)x^2 + (6 - 2a)x - 4$ ，

则 $3a - 2 = 1$ ， $6 - 2a = 4$ ，

$\therefore a = 1$ ，

\therefore 另一个因式为 $x^2 + x + 2$ 。

(3) 设 $x^3 - 2x^2 - 2x + 1 = (x+1)(x^2 + bx + 1) = x^3 + (b+1)x^2 + (b+1)x + 1$,
 $\therefore b+1 = -2$,
 $\therefore b = -3$
 $\therefore x^3 - 2x^2 - 2x + 1 = (x+1)(x^2 - 3x + 1)$.

28. 已知, 点 D 是 $\triangle ABC$ 内一点, 满足 $AD = AC$.

(1) 已知 $\angle CAD = 2\angle BAD$, $\angle ABD = 30^\circ$.

①如图1, 若 $\angle BAC = 60^\circ$, $\angle ACB = 80^\circ$, 请判断 BD 和 CD 的数量关系 (直接写出答案)

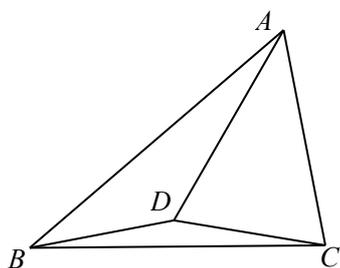


图1

②如图2 当 $\angle BAC \neq 60^\circ$, $\angle ACB \neq 80^\circ$ 时, 请问①的结论还成立吗? 并说明理由.

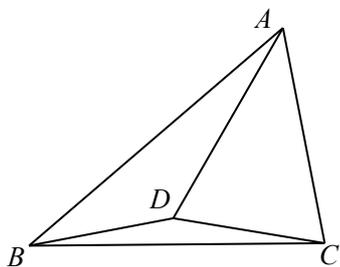


图2

(2) 如图3, 若 $\angle ACB = 2\angle ABC$, $BD = CD$, 试证明 $\angle CAD = 2\angle BAD$.

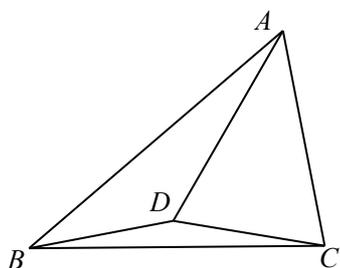


图3

【答案】

【解析】 (1) ① $BD = CD$.

$\therefore \angle CAD = 2\angle BAD$, $\angle BAC = 60^\circ$,

$$\begin{aligned} \therefore \angle DAC &= 40^\circ, \quad \angle BAD = 20^\circ, \\ \therefore AD &= AC, \\ \therefore \angle ADC &= \angle ACD = 70^\circ, \\ \therefore \angle ACB &= 80^\circ, \\ \therefore \angle ABC &= 40^\circ, \quad \angle DCB = 80^\circ - 70^\circ = 10^\circ, \\ \therefore \angle ABD &= 30^\circ, \\ \therefore \angle DBC &= 10^\circ, \\ \therefore \angle DBC &= \angle DCB, \\ \therefore BD &= DC. \end{aligned}$$

②成立.

过点 A 作 $AE \perp CD$ 于 E , 过点 D 作 $DF \perp AB$ 于 F ,
在 $\text{Rt}\triangle ADE$ 和 $\text{Rt}\triangle ACE$ 中,

$$\begin{cases} AD = AC \\ AE = AE \end{cases},$$

$$\therefore \text{Rt}\triangle ADE \cong \text{Rt}\triangle ACE (\text{HL})$$

$$\therefore DE = EC, \quad \angle DAE = \angle CAE,$$

$$\therefore \angle CAD = 2\angle BAD,$$

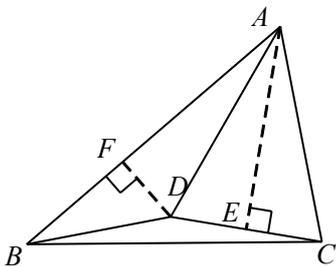
$$\therefore \angle FAD = \angle EAD,$$

$$\therefore DF = DE,$$

$$\therefore \angle ABD = 30^\circ,$$

$$\therefore BD = 2DF,$$

$$\therefore BD = DC.$$



(2) 作 $\angle EBC = \angle ACB$, 使 $EB = AC$, 连接 AE , 则四边形 $AEBC$ 是等腰梯形,

$$\begin{aligned} \therefore AE &\parallel BC, \\ \therefore \angle EAB &= \angle ABC, \\ \therefore \angle ACB &= 2\angle ABC, \\ \therefore \angle EBA &= \angle ABC, \\ \therefore \angle EBA &= \angle EAB, \end{aligned}$$

$\therefore EB = EA$,
 $\therefore EA = AC = AD$,
 $\therefore BD = CD$,
 $\therefore \angle DBC = \angle DCB$,
 $\therefore \angle EBD = \angle ACD$,
 在 $\triangle BDE$ 和 $\triangle CDA$ 中 ,

$$\begin{cases} BE = AC \\ BD = CD \\ \angle EBD = \angle ACD \end{cases}$$
 ,
 $\therefore \triangle BDE \cong \triangle CDA$ (SAS) ,
 $\therefore ED = AD$,
 $\therefore ED = AD = EA$,
 $\therefore \triangle ADE$ 是等边三角形 ,
 $\therefore \angle DAE = 60^\circ$,
 $\therefore \angle BAD = 60^\circ - \angle EAB = 60^\circ - \angle ABC$,
 $\therefore 2\angle BAD = 120^\circ - 2\angle ABC = 120^\circ - \angle ACB$,
 $\therefore AE \parallel BC$,
 $\therefore \angle ACB = 180^\circ - \angle EAC = 180^\circ - (60^\circ + \angle DAC)$,
 $\therefore 2\angle BAD = 120^\circ - 180^\circ + 60^\circ + \angle DAC = \angle DAC$.

