



北京市东城区 2016-2017 学年度第二学期高三综合练习（一）

数学（文科）

本试卷共 5 页，共 150 分。考试时长 120 分钟。考生务必将答案答在答题卡上，在试卷上作答无效。考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回。

第 I 卷（选择题 共 40 分）

一、选择题（共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项）

(1) 如果 $A = \{x \in \mathbf{R} \mid x > 0\}$ ， $B = \{0, 1, 2, 3\}$ ，那么集合 $A \cap B =$

A. 空集

B. $\{0\}$ C. $\{0, 1\}$ D. $\{1, 2, 3\}$

(2) 某高校共有学生 3000 人，新进大一学生有 800 人。现对大学生社团活动情况进行抽样调查，用分层抽样方法在全校抽取 300 人，那么应在大一抽取的人数为

A. 200

B. 100

C. 80

D. 75

(3) 如果 $a = \log_4 1$ ， $b = \log_2 3$ ， $c = \log_2 \pi$ ，那么三个数的大小关系是

A. $c > b > a$ B. $a > c > b$ C. $a > b > c$ D. $b > c > a$

(4) 如果过原点的直线 l 与圆 $x^2 + (y-4)^2 = 4$ 切于第二象限，那么直线 l 的方程是

A. $y = \sqrt{3}x$ B. $y = -\sqrt{3}x$ C. $y = 2x$ D. $y = -2x$

(5) 设函数 $f(x) = \begin{cases} 2^x - 3, & x < 0, \\ \sqrt{x+1}, & x \geq 0. \end{cases}$ 若 $f(a) > 1$ ，则实数 a 的取值范围是

A. $(0, 2)$ B. $(0, +\infty)$ C. $(2, +\infty)$ D. $(-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$

(6) “ $\sin \alpha + \cos \alpha = 0$ ”是“ $\cos 2\alpha = 0$ ”的

A. 充分而不必要条件

B. 必要而不充分条件

C. 充分且必要条件

D. 既不充分也不必要条件

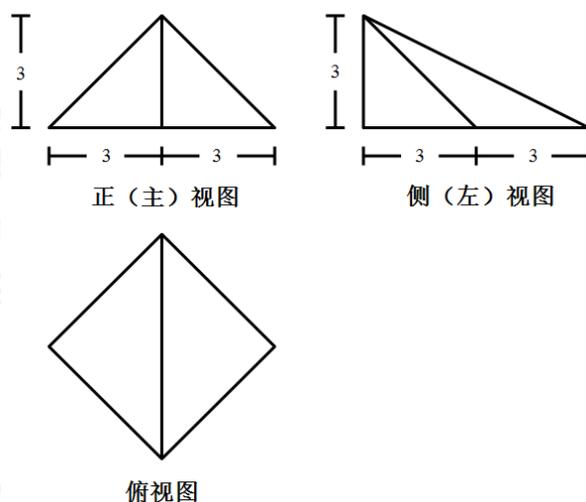




(7) 如果某四棱锥的三视图如图所示，那么该四棱锥

的四个侧面中是直角三角形的有

- A. 1
B. 2
C. 3
D. 4



(8) 如果函数 $y = f(x)$ 在定义域内存在区间 $[a, b]$ ，使 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上的值域是 $[2a, 2b]$ ，那么称 $f(x)$ 为“倍增函数”. 若函数 $f(x) = \ln(e^x + m)$ 为“倍增函数”，则实数 m 的取值范围是

- A. $(-\frac{1}{4}, +\infty)$ B. $(-\frac{1}{2}, 0)$ C. $(-1, 0)$ D. $(-\frac{1}{4}, 0)$

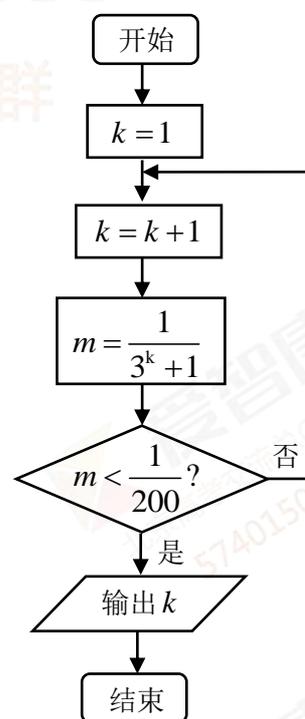
第II卷 (非选择题 共110分)

二、填空题(共6小题，每小题5分，共30分)

(9) 如果 $(x^2 - 1) + (x - 1)i$ 是纯虚数，那么实数 $x = \underline{\quad}$.

(10) 如果执行如图所示的程序框图，那么输出的 $k = \underline{\quad}$.

(11) 如果直线 $l: y = kx - 1 (k > 0)$ 与双曲线 $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$ 的一条渐近线平行，那么 $k = \underline{\quad}$.



(12) “墨子号”是由我国完全自主研发的世界上第一颗空间量子科学实验卫星，于2016年8月16日发射升空。“墨子号”的主要应用目标是通过卫星中转实现可覆盖全球的量子保密通信. 量子通信是通过光子的偏振状态，使用二进制编码，比如，码元0对应光子偏振方向为水平或斜向下45度，码元1对应光子偏振方向为垂直或斜向上45度. 如下图所示



	编码方式 1	编码方式 2
码元 0	↔	↗↘
码元 1	↕	↖↙

信号发出后，我们在接收端将随机选择两种编码方式中的一种来解码，比如，信号发送端如果按编码方式 1 发送，同时接收端按编码方式 1 进行解码，这时能够完美解码；信号发送端如果按编码方式 1 发送，同时接收端按编码方式 2 进行解码，这时无法获取信息. 如果发送端发送一个码元，那么接收端能够完美解码的概率是____；如果发送端发送 3 个码元，那么恰有两个码元无法获取信息的概率是____.

(13) 已知 $\triangle ABC$ 中， $\angle A=120^\circ$ ，且 $AB=AC=2$ ，那么 $BC=$ ____， $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{CA}=$ ____.

(14) 已知甲、乙、丙三人组成考察小组，每个组员最多可以携带供本人在沙漠中生存 36 天的水和食物，且计划每天向沙漠深处走 30 公里，每个人都可以在沙漠中将部分水和食物交给其他人然后独自返回. 若组员甲与其他两个人合作，且要求三个人都能够安全返回，则甲最远能深入沙漠____公里.

三、解答题(共 6 小题，共 80 分. 答应写出文字说明，演算步骤或证明过程)

(15) (本小题 13 分)

已知点 $(\frac{\pi}{4}, 1)$ 在函数 $f(x) = 2a \sin x \cos x + \cos 2x$ 的图象上.

(I) 求 a 的值和 $f(x)$ 最小正周期;

(II) 求函数 $f(x)$ 在 $(0, \pi)$ 上的单调减区间.

(16) (本小题 13 分)

已知数列 $\{a_n\}$ 是等差数列，前 n 项和为 S_n ，若 $a_1=9, S_3=21$.

(I) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

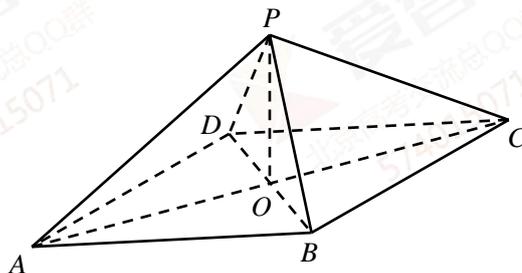
(II) 若 a_5, a_8, S_k 成等比数列，求 k 的值.



(17) (本小题 14 分)

如图，在四棱锥 $P-ABCD$ 中，四边形 $ABCD$ 是平行四边形， $AD \perp BD$ 且 $AD=BD$ ， $AC \cap BD = O$ ， $PO \perp$ 平面 $ABCD$ 。

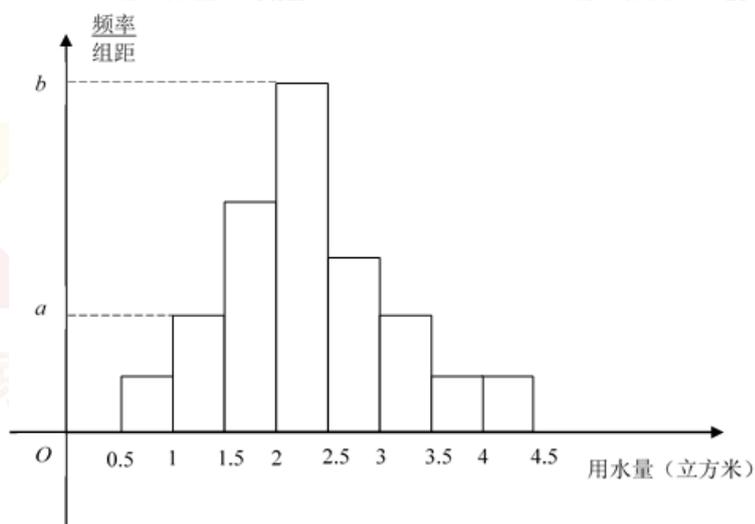
- (I) E 为棱 PC 的中点，求证： $OE \parallel$ 平面 PAB ；
 (II) 求证：平面 $PAD \perp$ 平面 PBD ；
 (III) 若 $PD \perp PB$ ， $AD=2$ ，求四棱锥 $P-ABCD$ 的体积。



(18) (本小题 13 分)

某校学生在进行“南水北调工程对北京市民的影响”的项目式学习活动中，对某居民小区进行用水情况随机抽样调查，获得了该小区 400 位居民某月的用水量数据（单位：立方米），整理得到如下数据分组及频数分布表和频率分布直方图：

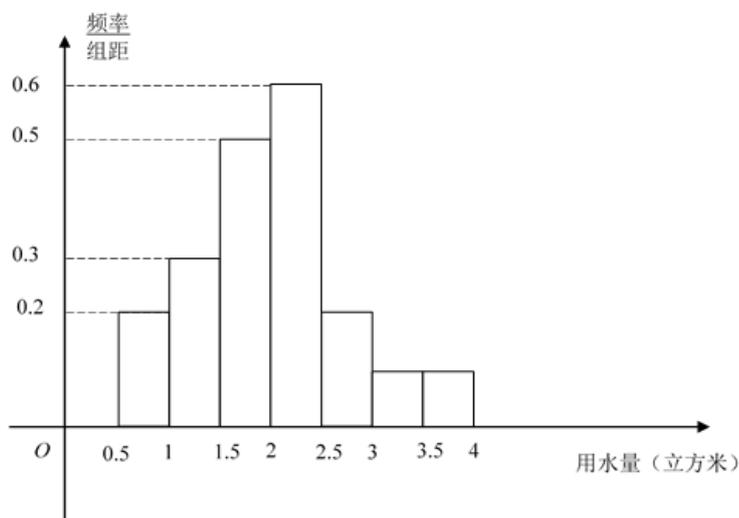
组号	分组	频数
1	$[0.5, 1)$	20
2	$[1, 1.5)$	40
3	$[1.5, 2)$	80
4	$[2, 2.5)$	120
5	$[2.5, 3)$	60
6	$[3, 3.5)$	40
7	$[3.5, 4)$	20
8	$[4, 4.5)$	20



(I) 求 a, b 的值；

(II) 从该小区随机选取一名住户，试估计这名住户一个月用水量小于 3 立方米的概率；

(III) 若小区人均月用水量低于某一标准，则称该小区为“节水小区”。假设同组中的每个数据用该组区间的右端点值代替，经过估算，该小区未达到“节水小区”标准，而且该小区居民月用水量不高于这一标准的比例为 65%，经过同学们的节水宣传，三个月后，又进行一次同等规模的随机抽样调查，数据如右图所示，估计这时小区是否达到“节水小区”的标准？并说明理由。





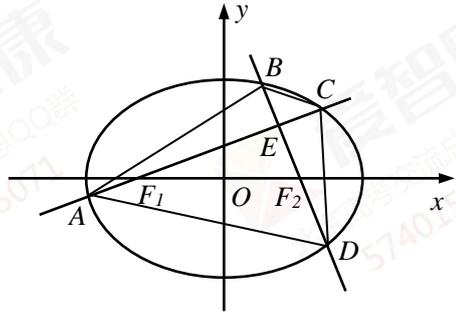
(19) (本小题 13 分)

已知椭圆 $W: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的左右两个焦点为 F_1, F_2 ，且 $|F_1F_2| = 2$ ，椭圆上一动点 P 满足

$$|PF_1| + |PF_2| = 2\sqrt{3}.$$

(I) 求椭圆 W 的标准方程及离心率；

(II) 如图，过点 F_1 作直线 l_1 与椭圆 W 交于点 A, C ，过点 F_2 作直线 $l_2 \perp l_1$ ，且 l_2 与椭圆 W 交于点 B, D ， l_1 与 l_2 交于点 E ，试求四边形 $ABCD$ 面积的最大值。



(20) (本小题 14 分)

设函数 $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + ax$ ， $a \in \mathbf{R}$ 。

(I) 若 $x = 2$ 是 $f(x)$ 的极值点，求 a 的值，并讨论 $f(x)$ 的单调性；

(II) 已知函数 $g(x) = f(x) - \frac{1}{2}ax^2 + \frac{2}{3}$ ，若 $g(x)$ 在区间 $(0,1)$ 内有零点，求 a 的取值范围；

(III) 设 $f(x)$ 有两个极值点 x_1, x_2 ，试讨论过两点 $(x_1, f(x_1))$ ， $(x_2, f(x_2))$ 的直线能否过点 $(1,1)$ ，若能，求 a 的值；若不能，说明理由。



北京市东城区 2016-2017 学年第二学期高三综合练习（一）

数学（文科）参考答案

一、选择题（本大题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分）

- (1) D (2) C (3) A (4) B
 (5) B (6) A (7) D (8) D

二、填空题（本大题共 6 小题，每小题 5 分，共 30 分）

- (9) -1 (10) 5
 (11) $\frac{3}{4}$ (12) $\frac{1}{2}, \frac{3}{8}$
 (13) $2\sqrt{3}, -6$ (14) 810

注：两个空的填空题第一个空填对得 3 分，第二个空填对得 2 分。

三、解答题（本大题共 6 小题，共 80 分）

(15) (共 13 分)

解：(I) \because 点 $(\frac{\pi}{4}, 1)$ 在函数 $f(x)$ 的图象上，

$$\therefore f(\frac{\pi}{4}) = 2a \sin \frac{\pi}{4} \cos \frac{\pi}{4} + \cos \frac{\pi}{2} = 1.$$

$$\therefore a = 1.$$

$$\therefore f(x) = 2 \sin x \cos x + \cos 2x$$

$$= \sin 2x + \cos 2x$$

$$= \sqrt{2} \sin(2x + \frac{\pi}{4})$$

$$\therefore T = \pi.$$

-----6 分

$$(II) \text{ 由 } \frac{\pi}{2} + 2k\pi \leq 2x + \frac{\pi}{4} \leq \frac{3\pi}{2} + 2k\pi,$$

$$\text{得 } \frac{\pi}{4} + 2k\pi \leq 2x \leq \frac{5\pi}{4} + 2k\pi,$$

$$\therefore \frac{\pi}{8} + k\pi \leq x \leq \frac{5\pi}{8} + k\pi.$$

$$\therefore \text{函数 } f(x) \text{ 的单调减区间为 } \left[\frac{\pi}{8} + k\pi, \frac{5\pi}{8} + k\pi \right] (k \in \mathbb{Z}).$$

$$\therefore \text{函数 } f(x) \text{ 在 } (0, \pi) \text{ 上的单调减区间为 } \left[\frac{\pi}{8}, \frac{5\pi}{8} \right].$$

-----13 分

(16) (共 13 分)



解: (I) \because 等差数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1=9, S_3=21$,

$$\therefore 3a_1+3d=21.$$

$$\therefore 9+d=7.$$

$$\therefore d=-2.$$

\therefore 数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n=-2n+11$.

-----6分

(II) \because 数列 $\{a_n\}$ 是等差数列, $a_1=9, d=-2$,

$$\therefore S_n=-n^2+10n.$$

$$\therefore S_k=-k^2+10k.$$

$$\therefore a_n=-2n+11,$$

$$\therefore a_5=1, a_8=-5.$$

$\therefore a_5, a_8, S_k$ 成等比数列,

$$\therefore a_8^2=a_5 \cdot S_k.$$

$$\therefore (-5)^2=-k^2+10k.$$

$$\text{即 } k^2-10k+25=0,$$

解得 $k=5$.

-----13分

(17) (共 14 分)

解: (I) 因为 O 是平行四边形 $ABCD$ 对角线交点, 所以 O 为 AC 中点

又 E 为棱 PC 中点, 所以 $OE \parallel PA$

因为 $OE \not\subset$ 平面 PAB , $PA \subset$ 平面 PAB ,

所以 $OE \parallel$ 平面 PAB

.....5分

(II) 因为 $PO \perp$ 面 $ABCD$,

所以 $PO \perp AD$

又 $BD \perp AD$, $BD \cap PO = O$,

所以 $AD \perp$ 面 PBD

因为 $AD \subset$ 面 PAD ,





所以面 $PAD \perp$ 面 PBD 10分

(III) 因为 O 是平行四边形 $ABCD$ 对角线交点, 所以 O 为 BD 中点

又 $PD \perp PB$, $AD = BD = 2$, 可求得 $PO = \frac{1}{2}BD = 1$

因为 $PO \perp$ 面 $ABCD$, 所以 $V_{P-ABCD} = \frac{1}{3}S_{ABCD} \cdot PO$

$$S_{ABCD} = 2S_{\triangle ABD} = 2 \times \frac{1}{2} \times 2 \times 2 = 4$$

$$\text{所以 } V_{P-ABCD} = \frac{1}{3}S_{\text{四边形}ABCD} \cdot PO = \frac{1}{3} \times 4 \times 1 = \frac{4}{3} \quad \dots\dots\dots 14 \text{分}$$

(18) (共 13 分)

解答: (I) 由数据分组及频数分布表可知,

$$a = \frac{\frac{40}{0.5}}{400} = 0.2; \quad b = \frac{\frac{120}{0.5}}{400} = 0.6 \quad \dots\dots\dots 4 \text{分}$$

(II) 设这名住户一个月用水量小于 3 立方米为事件 A, 那么

$$P(A) = \frac{20+40+80+120+60}{400} = 0.8 \quad \dots\dots\dots 8 \text{分}$$

(III) 因为该小区居民月用水量低于这一标准的比例为 35%,

所以由图可知,

小区人均月用水量低于 2.5 立方米, 则称为“节水小区”.10分

由图可知, 三个月后的该小区人均月用水量为

$$\begin{aligned} & 1 \times 0.1 + 1.5 \times 0.15 + 2 \times 0.25 + 2.5 \times 0.3 + 3 \times 0.1 + 3.5 \times 0.05 + 4 \times 0.05 \\ & = 2.25 < 2.5 \end{aligned}$$

所以三个月后该小区达到了“节水小区”标准.13分

(19) (共 13 分)

$$\text{解: (I) 由已知, } \begin{cases} 2c = 2 \\ 2a = 2\sqrt{3} \\ a^2 = b^2 + c^2 \end{cases}, \text{ 解得 } \begin{cases} c = 1 \\ a = \sqrt{3} \\ b = \sqrt{2} \end{cases}.$$

$$\text{所以椭圆 } W \text{ 的标准方程为 } \frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{2} = 1, \text{ 离心率 } e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{3}}{3}. \quad \dots\dots\dots 4 \text{分}$$

(II) 由题意可知 $EF_1 \perp EF_2$, 由此可求得 $|EO| = \frac{1}{2}|F_1F_2| = 1$

所以 E 点轨迹为以原点为圆心, 半径为1的圆, 显然 E 点在椭圆 W 的内部

$$\text{所以 } S_{\text{四边形}ABCD} = S_{\triangle ABC} + S_{\triangle ADC} = \frac{1}{2}|AC| \cdot |BE| + \frac{1}{2}|AC| \cdot |DE| = \frac{1}{2}|AC| \cdot |BD|$$



当直线 l_1, l_2 一条为椭圆的长轴，一条与 x 轴垂直时，例如 AC 为长轴， $BD \perp x$ 轴时

把 $x=1$ 代入椭圆方程，可求得 $y = \pm \frac{2\sqrt{3}}{3}$ ，由此 $|BD| = \frac{4\sqrt{3}}{3}$ ，又 $|AC| = 2\sqrt{3}$

所以此时 $S_{ABCD} = \frac{1}{2} |AC| |BD| = 4$

当直线 l_1, l_2 的斜率都存在时，

设直线 $l_1: x = my - 1, (m \neq 0)$ ，设 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$

$$\text{联立} \begin{cases} x = my - 1 \\ \frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{2} = 1 \end{cases} \text{ 消去 } x \text{ 可得 } (2m^2 + 3)y^2 - 4my - 4 = 0$$

$$\text{所以} \begin{cases} y_1 + y_2 = \frac{4m}{2m^2 + 3} \\ y_1 y_2 = \frac{-4}{2m^2 + 3} \end{cases} \cdot |AC| = \sqrt{(1+m^2)(y_1 - y_2)^2} = \frac{4\sqrt{3}(m^2 + 1)}{2m^2 + 3}$$

同理，由 $l_2: x = -\frac{1}{m}x + 1$ 可求得 $|BD| = \frac{4\sqrt{3}(m^2 + 1)}{2 + 3m^2}$

$$\begin{aligned} S_{\text{四边形}ABCD} &= \frac{1}{2} |AC| |BD| = \frac{1}{2} \times \frac{4\sqrt{3}(m^2 + 1)}{2m^2 + 3} \times \frac{4\sqrt{3}(m^2 + 1)}{2 + 3m^2} = \frac{24(m^2 + 1)^2}{(2m^2 + 3)(3m^2 + 2)} \\ &= \frac{24(m^4 + 2m^2 + 1)}{6m^4 + 13m^2 + 6} = \frac{4(6m^4 + 12m^2 + 6)}{6m^4 + 13m^2 + 6} = 4 \left(1 - \frac{m^2}{6m^4 + 13m^2 + 6} \right) < 4 \end{aligned}$$

综上，四边形 $ABCD$ 面积的最大值为 4，此时直线 l_1, l_2 一条为椭圆的长轴，一条与 x 轴垂直。

.....13 分

(20) (共 14 分)

解析：(I) 由 $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + ax$ 求得 $f'(x) = x^2 - x + a$

$\therefore f'(2) = 4 - 2 + a = 0 \Rightarrow a = -2$ ，代入 $f'(x) = x^2 - x - 2 = (x-2)(x+1)$

令 $f'(x) = 0$ 得 $x_1 = 2, x_2 = -1$

\therefore 当 $x \in (-\infty, -1), (2, +\infty)$ 时， $f'(x) > 0$ ， $f(x)$ 单调递增；

当 $x \in (-1, 2)$ 时， $f'(x) < 0$ ， $f(x)$ 单调递减。

.....4 分

(II) 由 $g(x) = f(x) - \frac{1}{2}ax^2 + \frac{2}{3} = \frac{1}{3}x^3 - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}a\right)x^2 + ax + \frac{2}{3}$

求得 $g'(x) = x^2 - (1+a)x + a = (x-1)(x-a)$





∴当 $a \geq 1$ 时，当 $x \in (0,1)$ 时， $g'(x) > 0$ 恒成立， $g(x)$ 单调递增，又 $g(0) = \frac{2}{3} > 0$

此时 $g(x)$ 在区间 $(0,1)$ 内没有零点；

当 $0 < a < 1$ 时，当 $x \in (0,a)$ 时， $g'(x) > 0$ ， $g(x)$ 单调递增；

当 $x \in (a,1)$ 时， $g'(x) < 0$ ， $g(x)$ 单调递减。又 $g(0) = \frac{2}{3} > 0$

此时欲使 $g(x)$ 在区间 $(0,1)$ 内有零点，必有 $g(1) < 0$ 。

$$g(1) < 0 \Rightarrow \frac{1}{3} - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}a\right) + a + \frac{2}{3} = \frac{1}{2}a + \frac{1}{2} < 0 \Rightarrow a < -1 \quad \text{无解}$$

当 $a \leq 0$ 时，当 $x \in (0,1)$ 时， $g'(x) < 0$ 恒成立， $g(x)$ 单调递减

此时欲使 $g(x)$ 在区间 $(0,1)$ 内有零点，必有 $g(1) < 0 \Rightarrow a < -1$ 。

综上， a 的取值范围为 $(-\infty, -1)$ 。

.....9分

(III)不能。原因如下：

设 $f(x)$ 有两个极值点 x_1, x_2 ，则导函数 $f'(x) = x^2 - x + a$ 有两个不同的零点

∴ $\Delta > 0 \Rightarrow 1 - 4a > 0 \Rightarrow a < \frac{1}{4}$ ，且 x_1, x_2 为方程 $x^2 - x + a = 0$ 的两根

$$x_1^2 - x_1 + a = 0 \Rightarrow x_1^2 = x_1 - a$$

$$\therefore f(x_1) = \frac{1}{3}x_1^3 - \frac{1}{2}x_1^2 + ax_1 = \frac{1}{3}x_1(x_1 - a) - \frac{1}{2}x_1^2 + ax_1 = -\frac{1}{6}x_1^2 + \frac{2}{3}ax_1 = -\frac{1}{6}(x_1 - a) + \frac{2}{3}ax_1$$

$$\therefore f(x_1) = \left(\frac{2}{3}a - \frac{1}{6}\right)x_1 + \frac{1}{6}a \quad \text{同理 } f(x_2) = \left(\frac{2}{3}a - \frac{1}{6}\right)x_2 + \frac{1}{6}a$$

由此可知过两点 $(x_1, f(x_1)), (x_2, f(x_2))$ 的直线方程为 $y = \left(\frac{2}{3}a - \frac{1}{6}\right)x + \frac{1}{6}a$

若直线过点 $(1,1)$ ，则 $1 = \left(\frac{2}{3}a - \frac{1}{6}\right) + \frac{1}{6}a \Rightarrow \frac{5}{6}a = \frac{7}{6} \Rightarrow a = \frac{7}{5}$

前面已经讨论过若 $f(x)$ 有两个极值点，则 $a < \frac{1}{4}$ ，显然不合题意。

综上，过两点 $(x_1, f(x_1)), (x_2, f(x_2))$ 的直线不能过点 $(1,1)$ 。

.....14分



爱智康

爱智康是好未来（前学而思教育）旗下高端品牌，从2007年开始探究K12有效的1对1教学模式，先后在北京、上海、广州、深圳、天津、杭州、成都、西安、南京、武汉、苏州、郑州，十二个城市地成立分支机构。目前已开设1对1、5-7人小组学习和在线学习等多种授课模式。爱智康在全国已有近100所辅导中心，数千名教职员工，成为美誉度颇高的K12辅导品牌之一。

二模1对1短期冲刺课

课程亮点

二模1对1短期冲刺课的内容安排可以有效帮助同学高效复习。以专题模块形式呈现重难点。有针对性的对试卷中40%-50%的基础题、20%-30%的中档题、20%-30%的难题，分配对应的学习时间和强度。每个专题都是为了解决考生在冲刺阶段最急切的重难点问题，命中考生急需提升的薄弱环节，帮助考生高效备考。

课程安排

二模1对1短期冲刺课
课次：4次课
开课时间：二模考试前
开课校区：所有学习中心
报课热线：4000-121-121



扫码了解课程详情

微信资讯平台

北京高考指南



第一时间获取**高考咨询、备考资料、干货讲座**的平台

家长训练营



一个**有深度、有高度、更有温度的**家长福利组织

