石景山区 2017 年高三统一练习

数 学（理）试 卷

考生须知	
	1．本试卷共 6 页，共三道大题，20 道小题，满分 150 分．考试时间 120 分钟．
	2．在答题卡上准确填写学校名称、姓名和准考证号．
	3．试题答案一律填涂或书写在答题卡上，选择题、作图题请用 2B 铅笔作答，其他试题请用黑色字迹签字笔作答，在试卷上作答无效．

第一部分（选择题 共 40 分）

一、选择题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分．在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项．

1．已知集合 $A=\{x\,|\,2x-1<0\}$，$B=\{x\,|\,0\leqslant x\leqslant 1\}$，那么 $A\cap B$ 等于（　　）

A．$\{x\,|\,x\geqslant 0\}$　　B．$\{x\,|\,x\leqslant 1\}$

C．$\{x\,|\,0<x<\frac{1}{2}\}$　　D．$\{x\,|\,0\leqslant x<\frac{1}{2}\}$

2．已知实数 x,y 满足 $\begin{cases} x+y\leqslant 6, \\ x-y\leqslant 2, \\ x\geqslant 0, \\ y\geqslant 0, \end{cases}$ 则 $z=2x+y$ 的最大值是（　　）

A．4　　B．6　　C．10　　D．12

3．直线 $\rho\cos\theta=\frac{1}{2}$ 被圆 $\rho=1$ 所截得的弦长为（　　）

A．1　　B．$\sqrt{3}$　　C．2　　D．4

4．设 $\theta\in\mathbf{R}$，“$\sin\theta=\cos\theta$”是“$\cos 2\theta=0$”的（　　）

A．充分不必要条件　　B．必要不充分条件

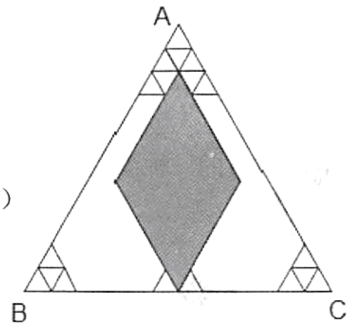
C．充要条件　　D．既不充分也不必要条件

8．如图，将正三角形 ABC 分割成 m 个边长为1的小正三角形和一个灰色菱形，这个灰色菱形可以分割成 n 个边长为1的小正三角形．

若 $m:n=47:25$，则三角形 ABC 的边长是（　　）

A．10　　B．11

C．12　　D．13



第二部分（非选择题　共 110 分）

二、填空题共 6 小题，每小题 5 分，共 30 分．

9．若复数 $\dfrac{a+i}{1-i}$ 是纯虚数，则实数 $a=$__________．

10．在数列 $\{a_n\}$ 中，$a_1=1$，$a_n\cdot a_{n+1}=-2$（$n=1,2,3,\cdots$），那么 a_8 等于__________．

11．若抛物线 $y^2=2px$ 的焦点与双曲线 $\dfrac{x^2}{4}-y^2=1$ 的右顶点重合，则 $p=$__________．

12．如果将函数 $f(x)=\sin(3x+\varphi)(-\pi<\varphi<0)$ 的图象向左平移 $\dfrac{\pi}{12}$ 个单位所得到的图象关于原点对称，那么 $\varphi=$__________．

13．将甲、乙、丙、丁四名学生分到三个不同的班，每个班至少分到一名学生，则不同的分法的总数是__________．（用数字做答）

14．已知 $f(x)=\begin{cases}2a-(x+\dfrac{4}{x}), & x<a,\\ x-\dfrac{4}{x}, & x\geqslant a.\end{cases}$

①当 $a=1$ 时，$f(x)=3$，则 $x=$__________；

②当 $a\leqslant-1$ 时，若 $f(x)=3$ 有三个不等实数根，且它们成等差数列，则 $a=$______．

三、解答题共 6 小题，共 80 分．解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程．

15．（本小题共 13 分）

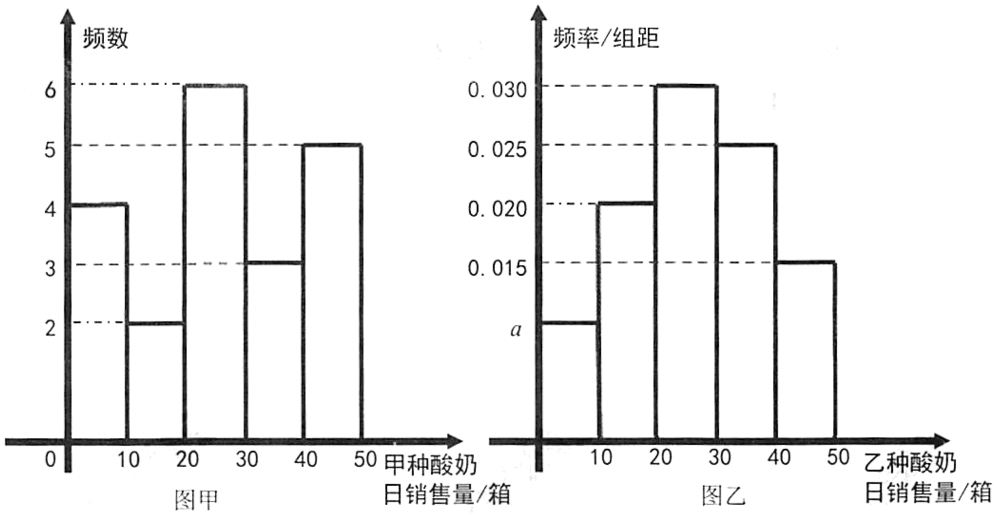
已知 a,b,c 分别是$\triangle ABC$的三个内角 A,B,C 的三条对边，且 $c^2=a^2+b^2-ab$．

（Ⅰ）求角 C 的大小；

（Ⅱ）求 $\cos A+\cos B$ 的最大值．

16．（本小题共 13 分）

某超市从现有甲、乙两种酸奶的日销售量（单位：箱）的1200个数据（数据均在区间 $(0,50]$ 内）中，按照5%的比例进行分层抽样，统计结果按 $(0,10]$，$(10,20]$，$(20,30]$，$(30,40]$，$(40,50]$ 分组，整理如下图：



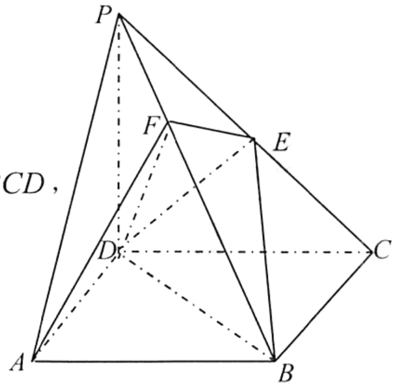
图甲　　图乙

（Ⅰ）写出频率分布直方图（图乙）中 a 的值；记所抽取样本中甲种酸奶与乙种酸奶日销售量的方差分别为 s_1^2，s_2^2，试比较 s_1^2 与 s_2^2 的大小（只需写出结论）；

（Ⅱ）从甲种酸奶日销售量在区间 $(0,20]$ 的数据样本中抽取 3 个，记在 $(0,10]$ 内的数据个数为 X，求 X 的分布列；

（Ⅲ）估计1200个日销售量数据中，数据在区间 $(0,10]$ 中的个数．

17.（本小题共 14 分）



《九章算术》中，将底面为长方形且有一条侧棱与底面垂直的四棱锥称之为阳马，将四个面都为直角三角形的四面体称之为鳖臑（biē nào）.

如图，在阳马 $P-ABCD$ 中，侧棱 $PD\perp$ 底面 $ABCD$，且 $PD=CD$，E 为 PC 中点，点 F 在 PB 上，且 $PB\perp$ 平面 DEF，连接 BD，BE.

（Ⅰ）证明：$DE\perp$ 平面 PBC；

（Ⅱ）试判断四面体 $DBEF$ 是否为鳖臑，

若是，写出其每个面的直角（只需写出结论）；若不是，说明理由；

（Ⅲ）已知 $AD=2, CD=\sqrt{2}$，求二面角 $F-AD-B$ 的余弦值.

18.（本小题共 13 分）

已知函数 $f(x)=\ln x$.

（Ⅰ）求曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1,f(1))$ 处的切线方程；

（Ⅱ）求证：当 $x>0$ 时，$f(x)\geqslant 1-\dfrac{1}{x}$；

（Ⅲ）若 $x-1>a\ln x$ 对任意 $x>1$ 恒成立，求实数 a 的最大值.

19.（本小题共 14 分）

已知椭圆 $E:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 过点（0，1），且离心率为 $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

（Ⅰ）求椭圆 E 的方程；

（Ⅱ）设直线 $l: y=\dfrac{1}{2}x+m$ 与椭圆 E 交于 A、C 两点，以 AC 为对角线作正方形 $ABCD$，记直线 l 与 x 轴的交点为 N，问 B、N 两点间距离是否为定值？如果是，求出定值；如果不是，请说明理由.

20.（本小题共 13 分）

已知集合 $R_n=\{X\,|\,X=(x_1,x_2,\cdots,x_n),x_i\in\{0,1\},i=1,2,\cdots,n\}(n\ge 2)$．对于 $A=(a_1,a_2,\cdots,a_n)\in R_n$，$B=(b_1,b_2,\cdots,b_n)\in R_n$，定义 A 与 B 之间的距离为

$$d(A,B)=|a_1-b_1|+|a_2-b_2|+\cdots|a_n-b_n|=\sum_{i=1}^{n}|a_i-b_i|.$$

（Ⅰ）写出 R_2 中的所有元素，并求两元素间的距离的最大值；

（Ⅱ）若集合 M 满足：$M\subseteq R_3$，且任意两元素间的距离均为 2，求集合 M 中元素个数的最大值并写出此时的集合 M；

（Ⅲ）设集合 $P\subseteq R_n$，P 中有 $m(m\ge 2)$ 个元素，记 P 中所有两元素间的距离的平均值为 $\overline{d}(P)$，证明 $\overline{d}(P)\le\dfrac{mn}{2(m-1)}$．

石景山区 2017 年高三统一练习

数学（理）试卷答案及评分参考

一、选择题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分．

题号	1	2	3	4	5	6	7	8
答案	D	C	B	A	A	B	C	C

二、填空题共 6 小题，每小题 5 分，共 30 分．

题号	9	10	11	12	13	14
答案	1	-2	4	$-\dfrac{\pi}{4}$	36	$4,-\dfrac{11}{6}$

三、解答题共 6 小题，共 80 分．

15．（本小题共 13 分）

解：（Ⅰ）因为 $c^2=a^2+b^2-ab$，

所以 $\cos C=\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=\dfrac{1}{2}$．　　……3 分

又因为 $C\in(0,\pi)$，

所以 $C=\dfrac{\pi}{3}$．　　…………6 分

（Ⅱ）由（Ⅰ）知 $C=\dfrac{\pi}{3}$，

又 $A+B+C=\pi$，

所以 $B=\dfrac{2\pi}{3}-A$ 且 $A\in(0,\dfrac{2\pi}{3})$，

故 $\cos A+\cos B=\cos A+\cos(\dfrac{2\pi}{3}-A)=\cos A+\cos\dfrac{2\pi}{3}\cos A+\sin\dfrac{2\pi}{3}\sin A$

$$=\frac{1}{2}\cos A+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin A=\sin(\frac{\pi}{6}+A).$$

又 $A\in(0,\dfrac{2\pi}{3})$，$\dfrac{\pi}{6}+A\in(\dfrac{\pi}{6},\dfrac{5\pi}{6})$，

所以当 $\dfrac{\pi}{6}+A=\dfrac{\pi}{2}$ 即 $A=\dfrac{\pi}{3}$ 时，$\cos A+\cos B$ 的最大值为 1．　　…13 分

16.（本小题共 13 分）

解：（Ⅰ）由图（乙）知，$10(a+0.02+0.03+0.025+0.015)=1$ 解得 $a=0.01$，

$s_1^2>s_2^2$.　　　　…………………3 分

（Ⅱ）X 的所有可能取值 1，2，3．

则 $P(X=1)=\frac{C_4^1C_2^2}{C_6^3}=\frac{1}{5}$，$P(X=2)=\frac{C_4^2C_2^1}{C_6^3}=\frac{3}{5}$，$P(X=3)=\frac{C_4^3C_2^0}{C_6^3}=\frac{1}{5}$，

其分布列如下：

X	1	2	3
P	$\frac{1}{5}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{1}{5}$

…………………8 分

（Ⅲ）由图（甲）知，甲种酸奶的数据共抽取 $2+3+4+5+6=20$ 个，

其中有 4 个数据在区间 $(0,10]$ 内．

又因为分层抽样共抽取了 $1200\times 5\%=60$ 个数据，

乙种酸奶的数据共抽取 $60-20=40$ 个，

由（Ⅰ）知，乙种酸奶的日销售量数据在区间 $(0,10]$ 内的频率为 0.1，

故乙种酸奶的日销售量数据在区间 $(0,10]$ 内有 $40\times 0.1=4$ 个．

故抽取的 60 个数据，共有 $4+4=8$ 个数据在区间 $(0,10]$ 内．

所以，在 1200 个数据中，在区间 $(0,10]$ 内的数据有 160 个．

……………13 分

17.（本小题共 14 分）

（Ⅰ）因为 $PD\perp$ 面 $ABCD$，$BC\subset$ 面 $ABCD$，

所以 $BC\perp PD$.

因为四边形 $ABCD$ 为矩形，所以 $BC\perp DC$.

$PD\cap DC=D$， 所以 $BC\perp$ 面 PDC.

$DE\subset$ 面 PDC，$DE\perp BC$，

在 ΔPDC 中，$PD=DC$，E 为 PC 中点 所以 $DE\perp PC$.

$PC\cap BC=C$，

所以 $DE\perp$ 面 PBC. ……………………………………4 分

（Ⅱ）四面体 $DBEF$ 是鳖臑，其中 $\angle BED=\angle FED=\dfrac{\pi}{2}$，

$\angle BFE=\angle BFD=\dfrac{\pi}{2}$. ……………………………………9 分

（Ⅲ）以 DA,DC,DP 所在直线为 x 轴，y 轴，z 轴建立空间直角坐标系. $D(0,0,0),A(2,0,0),C(0,\sqrt{2},0),P(0,0,\sqrt{2}),B(2,\sqrt{2},0)$.

设 $\overrightarrow{PF}=\lambda\overrightarrow{PB}$，则 $F(2\lambda,\sqrt{2}\lambda,\sqrt{2}-\sqrt{2}\lambda)$.

$DF\perp PB$ 得 $\overrightarrow{DF}\cdot\overrightarrow{PB}=0$ 解得 $\lambda=\dfrac{1}{4}$. 所以 $F(\dfrac{1}{2},\dfrac{\sqrt{2}}{4},\dfrac{3\sqrt{2}}{4})$. ………11 分

设平面 FDA 的法向量 $\vec{n}=(x,y,z)$，

$$\begin{cases}\vec{n}\perp\overrightarrow{DF}\\ \vec{n}\perp\overrightarrow{DA}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\dfrac{1}{2}x+\dfrac{\sqrt{2}}{4}y+\dfrac{3\sqrt{2}}{4}z=0\\ 2x=0\end{cases}$$ 令 $z=1$ 得 $x=0,y=-3$.

平面 FDA 的法向量 $\vec{n}=(0,-3,1)$，

平面 BDA 的法向量 $\overrightarrow{DP}=(0,0,\sqrt{2})$，

$$\cos<\vec{n},\overrightarrow{DP}>=\frac{\vec{n}\cdot\overrightarrow{DP}}{|\vec{n}||\overrightarrow{DP}|}=\frac{-\sqrt{2}}{\sqrt{10}\sqrt{2}}=-\frac{\sqrt{10}}{10}.$$

二面角 $F-AD-B$ 的余弦值为 $\dfrac{\sqrt{10}}{10}$. ……………………14 分

18.（本小题共 13 分）

解：（Ⅰ）$f'(x)=\frac{1}{x}$，$f'(1)=1$，

又 $f(1)=0$，所以切线方程为 $y=x-1$；　　……3 分

（Ⅱ）由题意知 $x>0$，令 $g(x)=f(x)-(1-\frac{1}{x})=\ln x-1+\frac{1}{x}$.

$g'(x)=\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}=\frac{x-1}{x^2}$　　………5 分

令 $g'(x)=\frac{x-1}{x^2}=0$，解得 $x=1$.　　………6 分

易知当 $x>1$ 时，$g'(x)>0$，易知当 $0<x<1$ 时，$g'(x)<0$.

即 $g(x)$ 在 $(0,1)$ 单调递减，在 $(1,+\infty)$ 单调递增　　………7 分

所以 $g(x)_{\min}=g(1)=0$，$g(x)\geq g(1)=0$

即 $g(x)=f(x)-(1-\frac{1}{x})\geq 0$，即 $f(x)\geq(1-\frac{1}{x})$.　　……8 分

（Ⅲ）设 $h(x)=x-1-a\ln x(x\geq 1)$，依题意，对于任意 $x>1$，$h(x)>0$ 恒成立.

$h'(x)=1-\frac{a}{x}=\frac{x-a}{x}$，　　………9 分

$a\leq 1$ 时，$h'(x)>0$，$h(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 上单调增，

当 $x>1$ 时，$h(x)>h(1)=0$，满足题意.　　………11 分

$a>1$ 时，随 x 变化，$h'(x)$，$h(x)$ 的变化情况如下表：

x	$(1,a)$	a	$(a,+\infty)$
$h'(x)$	$-$	0	$+$
$h(x)$	↘	极小值	↗

$h(x)$ 在 $(1,a)$ 上单调递减，所以 $g(a)<g(1)=0$

即当 $a>1$ 时，总存在 $g(a)<0$，不合题意.　　………12 分

综上所述，实数 a 的最大值为 1.　　………13 分

19.（本小题共 14 分）

解：（Ⅰ）设椭圆的半焦距为 c．

因为点（0,1）在椭圆 C 上，所以 $b=1$．

故 $a^2-c^2=1$．

又因为 $e=\dfrac{c}{a}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，所以 $c=\sqrt{3}$，$a=2$．

所以椭圆 C 的标准方程为：$\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$． ……………………5 分

（Ⅱ）设 $A(x_1,y_1),C(x_2,y_2)$，线段 AC 中点为 $M(x_0,y_0)$．

联立 $y=\dfrac{1}{2}x+m$ 和 $x^2+4y^2-4=0$，得：$x^2+2mx+2m^2-2=0$．

由 $\Delta=(2m)^2-4(2m^2-2)=8-4m^2>0$，可得 $-\sqrt{2}<m<\sqrt{2}$．

所以 $x_1+x_2=-2m$，$x_1x_2=2m^2-2$． ……………8 分

所以 AC 中点为 $M(-m,\dfrac{1}{2}m)$． …………9 分

弦长 $|AC|=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}=\sqrt{\dfrac{5}{4}[(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}=\sqrt{10-5m^2}$，

………10 分

又直线 l 与 x 轴的交点 $N(-2m,0)$， ………11 分

所以 $|MN|=\sqrt{(-m+2m)^2+(\dfrac{1}{2}m)^2}=\sqrt{\dfrac{5}{4}m^2}$． ………12 分

所以 $|BN|^2=|BM|^2+|MN|^2=\dfrac{1}{4}|AC|^2+|MN|^2=\dfrac{5}{2}$．

所以 B、N 两点间距离为定值 $\dfrac{\sqrt{10}}{2}$． ………14 分

20．（本小题共 13 分）

解：（Ⅰ）$R_2=\{(0,0),(0,1),(1,0),(1,1)\}$，

$A,B\in R_2$ ，$d(A,B)_{\max}=2$． ……………………3 分

（Ⅱ）R_3 中含有 8 个元素，可将其看成正方体的 8 个顶点，已知集合 M 中的元素所对应的点，应该两两位于该正方体面对角线的两个端点，所以 $M=\{(0,0,0),(1,1,0),(1,0,1),(0,1,1)\}$

或 $M=\{(0,0,1),(0,1,0),(1,0,0),(1,1,1)\}$，

集合 M 中元素个数最大值为 4． …………………8 分

（Ⅲ）$\overline{d}(P)=\dfrac{1}{C_m^2}\sum\limits_{A,B\in P}d(A,B)$ ，其中 $\sum\limits_{A,B\in P}d(A,B)$ 表示 P 中所有两个元素间距离的总和．

设 P 中所有元素的第 i 个位置的数字中共有 t_i 个 1，$m-t_i$ 个 0，则

$$\sum_{A,B\in P}d(A,B)=\sum_{i=1}^{n}t_i(m-t_i)$$

由于 $t_i(m-t_i)\le\dfrac{m^2}{4}(i=1,2,\cdots,n)$

所以 $\sum\limits_{A,B\in P}d(A,B)=\sum\limits_{i=1}^{n}t_i(m-t_i)\le\dfrac{nm^2}{4}$

从而 $\overline{d}(P)=\dfrac{1}{C_m^2}\sum\limits_{A,B\in P}d(A,B)\le\dfrac{nm^2}{4C_m^2}=\dfrac{nm}{2(m-1)}$ ……………………13 分

【注：若有其它解法，请酌情给分】