



北京市朝阳区高三年级第一次综合练习

## 数学测试题（文史类）

2017.3

（考试时间 120 分钟 满分 150 分）

本试卷分为选择题（共 40 分）和非选择题（共 110 分）两部分

## 第一部分（选择题 共 40 分）

一、选择题：本大题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题给出的四个选项中，选出符合题目要求的一项。

(1) 已知集合  $A = \{x \mid -1 \leq x < 3\}$ ， $B = \{x \in \mathbf{Z} \mid x^2 < 4\}$ ，则  $A \cap B =$

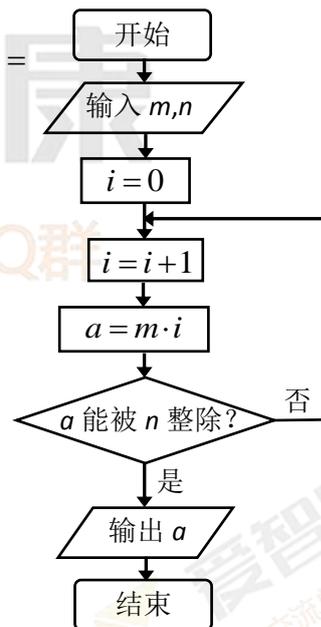
- (A)  $\{0,1\}$  (B)  $\{-1,0,1,2\}$   
 (C)  $\{-1,0,1\}$  (D)  $\{-2,-1,0,1,2\}$

(2) 若  $x, y$  满足  $\begin{cases} 2x - y \leq 0, \\ x + y \leq 3, \\ x \geq 0, \end{cases}$  则  $y - x$  的最大值为

- (A) 0 (B) 3  
 (C) 4 (D) 5

(3) 执行如图所示的程序框图，若输入  $m = 4$ ， $n = 6$ ，则输出  $a =$

- (A) 4 (B) 8  
 (C) 12 (D) 16



(4) 已知直线  $l$  过定点  $(0,1)$ ，则“直线  $l$  与圆  $(x-2)^2 + y^2 = 4$  相切”是“直线  $l$  的斜率为  $\frac{3}{4}$ ”的

- (A) 充分不必要条件 (B) 必要不充分条件  
 (C) 充分必要条件 (D) 既不充分也不必要条件



(5) 已知函数  $f(x) = \begin{cases} -x^2 + 4x, & x \leq 2 \\ \log_2 x - a, & x > 2 \end{cases}$  有两个不同的零点, 则实数  $a$  的取值范围是

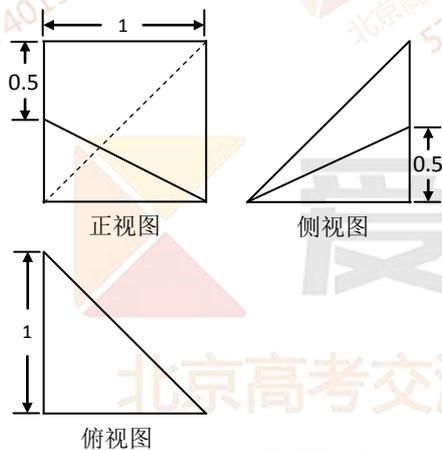
- (A)  $[-1, 0)$                       (B)  $(1, 2]$   
 (C)  $(1, +\infty)$                       (D)  $(2, +\infty)$

(6) 设抛物线  $y^2 = 8x$  的焦点为  $F$ , 准线为  $l$ ,  $P$  为抛物线上一点,  $PA \perp l$ ,  $A$  为垂足.

如果直线  $AF$  的斜率为  $\sqrt{3}$ , 那么  $|PF| =$

- (A) 8                      (B) 16                      (C)  $4\sqrt{3}$                       (D)  $8\sqrt{3}$

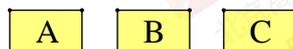
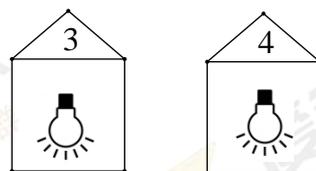
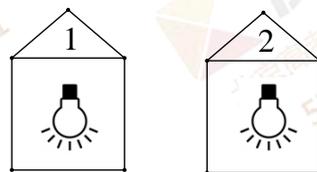
(7) 某四棱锥的三视图如图所示, 则该四棱锥的底面的面积是



- (A)  $\frac{1}{2}$                       (B)  $\frac{3}{2}$                       (C)  $\frac{1}{4}$                       (D)  $\frac{3}{4}$

(8) 如图,  $A, B, C$  三个开关控制着 1, 2, 3, 4 号四盏灯. 若开关  $A$  控制着 2, 3, 4 号灯 (即按一下开关  $A$ , 2, 3, 4 号灯亮, 再按一下开关  $A$ , 2, 3, 4 号灯熄灭), 同样, 开关  $B$  控制着 1, 3, 4 号灯, 开关  $C$  控制着 1, 2, 4 号灯. 开始时, 四盏灯都亮着, 那么下列说法正确的是

- (A) 只需要按开关  $A, C$  可以将四盏灯全部熄灭  
 (B) 只需要按开关  $B, C$  可以将四盏灯全部熄灭  
 (C) 按开关  $A, B, C$  可以将四盏灯全部熄灭  
 (D) 按开关  $A, B, C$  无法将四盏灯全部熄灭





## 第二部分（非选择题 共 110 分）

二、填空题：本大题共 6 小题，每小题 5 分，共 30 分。

(9) 复数  $z = 1 + \frac{1}{i}$  在复平面内对应的点的坐标是\_\_\_\_\_.

(10) 已知  $\{a_n\}$  为等差数列,  $S_n$  为其前  $n$  项和. 若  $S_6 = 51$ ,  $a_1 + a_9 = 26$ , 则数列  $\{a_n\}$  的公差  $d =$ \_\_\_\_\_,

通项公式  $a_n =$ \_\_\_\_\_.

(11) 已知函数  $f(x) = 2^x - \frac{2}{x} - a$  的一个零点在区间  $(1,2)$  内, 则实数  $a$  的取值范围是\_\_\_\_\_.

(12) 在  $\triangle ABC$  中,  $\angle A = \frac{\pi}{3}$ ,  $BC = 3$ ,  $AB = \sqrt{6}$ , 则  $\angle C =$ \_\_\_\_\_,  $AC =$ \_\_\_\_\_.

(13) 为了促销某电子产品, 商场进行降价, 设  $m > 0$ ,  $n > 0$ ,  $m \neq n$ , 有三种降价方案:

方案①: 先降  $m\%$ , 再降  $n\%$ ;

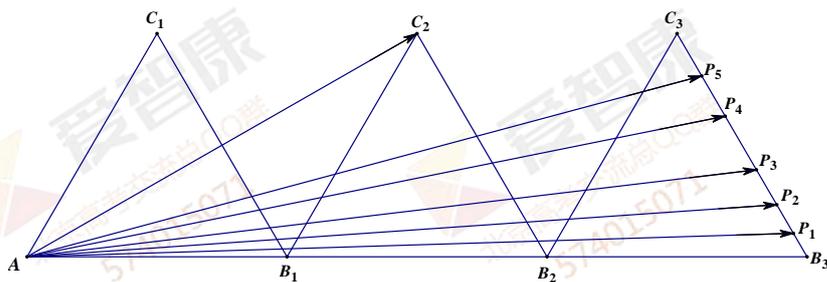
方案②: 先降  $\frac{m+n}{2}\%$ , 再降  $\frac{m+n}{2}\%$ ;

方案③: 一次性降价  $(m+n)\%$ .

则降价幅度最小的方案是\_\_\_\_\_. (填出正确的序号)

(14) 如图,  $\triangle AB_1C_1$ ,  $\triangle B_1B_2C_2$ ,  $\triangle B_2B_3C_3$  是三个边长为 2 的等边三角形, 且有一条边在同一直线上, 边  $B_3C_3$  上有 5 个不同的点  $P_1, P_2, P_3, P_4, P_5$ , 设  $m_i = \overrightarrow{AC_2} \cdot \overrightarrow{AP_i}$  ( $i = 1, 2, \dots, 5$ ), 则

$m_1 + m_2 + \dots + m_5 =$ \_\_\_\_\_.





三、解答题：本大题共 6 小题，共 80 分. 解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程.

(15) (本小题满分 13 分)

已知函数  $f(x) = \sin x(\cos x - \sqrt{3}\sin x)$ .

(I) 求函数  $f(x)$  的最小正周期;

(II) 求函数  $f(x)$  在  $x \in [0, \pi]$  上的单调递增区间.

(16) (本小题满分 13 分)

已知数列  $\{a_n\}$  满足  $a_1 = 1, a_{n+1} = \frac{2(n+1)}{n}a_n$ , 设  $b_n = \frac{a_n}{n}$ ,  $n \in \mathbf{N}^*$ .

(I) 证明  $\{b_n\}$  是等比数列;

(II) 求数列  $\{\log_2 b_n\}$  的前  $n$  项和  $T_n$ .



爱智康

北京高考交流总QQ群

(17) (本小题满分 13 分)

某校高三年级共有学生 195 人，其中女生 105 人，男生 90 人. 现采用按性别分层抽样的方法，从中抽取 13 人进行问卷调查. 设其中某项问题的选择分别为“同意”、“不同意”两种，且每人都做了一种选择. 下面表格中提供了被调查人答卷情况的部分信息.

	同意	不同意	合计
女学生	4		
男学生		2	

(I) 完成上述统计表;

(II) 根据上表的数据估计高三年级学生该项问题选择“同意”的人数;

(III) 从被抽取的女生中随机选取 2 人进行访谈，求选取的 2 名女生中至少有一人选择“同意”的概率.



(18) (本小题满分 14 分)

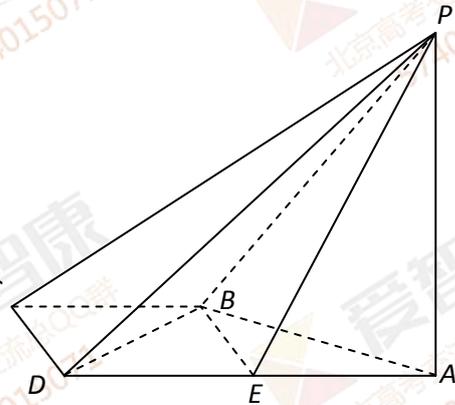
如图，在四棱锥  $P-ABCD$  中，平面  $PAB \perp$  平面  $ABCD$ ， $AD \parallel BC$ ， $PA \perp AB$ ，

$CD \perp AD$ ， $BC = CD = \frac{1}{2}AD$ ， $E$  为  $AD$  的中点.

(I) 求证： $PA \perp CD$ ；

(II) 求证：平面  $PBD \perp$  平面  $PAB$ ；

(III) 在平面  $PAB$  内是否存在  $M$ ，使得直线  $CM \parallel$  平面  $PBE$ ，请说明理由.



(19) (本小题满分 14 分)

过点  $A(1,0)$  的直线  $l$  与椭圆  $C: \frac{x^2}{3} + y^2 = 1$  相交于  $E, F$  两点，自  $E, F$  分别向直线  $x=3$  作

垂线，垂足分别为  $E_1, F_1$ .

(I) 当直线  $l$  的斜率为 1 时，求线段  $EF$  的中点坐标；

(II) 记  $\triangle AEE_1$ ， $\triangle AFF_1$  的面积分别为  $S_1$ ， $S_2$ ，设  $\lambda = S_1 S_2$ ，求  $\lambda$  的取值范围.

574015071

(20) (本小题满分 13 分)

已知函数  $f(x) = x^3 - 3ax + e$ ， $g(x) = 1 - \ln x$ ，其中  $e$  为自然对数的底数.

(I) 若曲线  $y = f(x)$  在点  $(1, f(1))$  处的切线与直线  $l: x + 2y = 0$  垂直，求实数  $a$  的值；

(II) 设函数  $F(x) = -x[g(x) + \frac{1}{2}x - 2]$ ，若  $F(x)$  在区间  $(m, m+1)$  ( $m \in \mathbf{Z}$ ) 内存在唯一的极值点，求  $m$  的值；

(III) 用  $\max\{m, n\}$  表示  $m, n$  中的较大者，记函数  $h(x) = \max\{f(x), g(x)\}$  ( $x > 0$ ). 若函数  $h(x)$  在  $(0, +\infty)$  上恰有 2 个零点，求实数  $a$  的取值范围.



北京市朝阳区高三年级第一次综合练习

数学测试题答案 (文史类)

2017.3

一、 选择题: 本大题共 8 小题, 每小题 5 分, 共 40 分.

题号	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)
答案	C	B	C	B	C	A	D	D

二、 填空题: 本大题共 6 小题, 每小题 5 分, 共 30 分.

题号	(9)	(10)	(11)	(12)	(13)	(14)
答案	(1, -1)	3, 3n - 2	(0, 3)	$\frac{\pi}{4}, \frac{\sqrt{6} + 3\sqrt{2}}{2}$	②	90

三、 解答题: 本大题共 6 小题, 共 80 分. 解答应写出文字说明, 演算步骤或证明过程.

(15) (本小题满分 13 分)

解: (I) 因为  $f(x) = \sin x(\cos x - \sqrt{3}\sin x) = \sin x \cos x - \sqrt{3}\sin^2 x$

$$= \frac{1}{2} \sin 2x + \frac{\sqrt{3}}{2} \cos 2x - \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$= \sin(2x + \frac{\pi}{3}) - \frac{\sqrt{3}}{2}$$

所以函数  $f(x)$  的最小正周期为  $T = \frac{2\pi}{2} = \pi$ . ..... 6 分

(II) 令  $2k\pi - \frac{\pi}{2} \leq 2x + \frac{\pi}{3} \leq 2k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbf{Z}$  得,

$$2k\pi - \frac{5\pi}{6} \leq 2x \leq 2k\pi + \frac{\pi}{6}, k \in \mathbf{Z},$$

$$\text{所以 } k\pi - \frac{5\pi}{12} \leq x \leq k\pi + \frac{\pi}{12}, k \in \mathbf{Z}.$$

又因为  $x \in [0, \pi]$ ,

所以函数  $f(x)$  在  $x \in [0, \pi]$  上的单调递增区间是  $[0, \frac{\pi}{12}]$  和  $[\frac{7\pi}{12}, \pi]$ . ..... 13 分

(16) (本小题满分 13 分)

解: (I) 由  $a_{n+1} = \frac{2(n+1)}{n} a_n$ , 得  $\frac{a_{n+1}}{n+1} = 2 \cdot \frac{a_n}{n}$ .

所以  $b_{n+1} = 2b_n$ , 即  $\frac{b_{n+1}}{b_n} = 2$ .



又因为  $b_1 = \frac{a_1}{1} = 1$ ,

所以数列  $\{b_n\}$  是以 1 为首项, 公比为 2 的等比数列. ....7 分

(II) 由 (I) 可知  $b_n = 1 \cdot 2^{n-1} = 2^{n-1}$ .

所以  $\log_2 b_n = \log_2 2^{n-1} = n-1$ .

则数列  $\{\log_2 b_n\}$  的前  $n$  项和

$$T_n = 1 + 2 + 3 + \dots + (n-1) = \frac{n(n-1)}{2}. \quad \dots\dots\dots 13 \text{ 分}$$

(17) (本小题满分 13 分)

解: (I) 统计表如下:

	同意	不同意	合计
女学生	4	3	7
男学生	4	2	6

.....3 分

(II) 高三年级学生该项问题选择“同意”的人数估计有

$$\frac{4}{7} \times 105 + \frac{4}{6} \times 90 = 60 + 60 = 120 \text{ (人)}. \quad \dots\dots\dots 7 \text{ 分}$$

(III) 设“同意”的 4 名女生分别为  $A_1, A_2, A_3, A_4$ , “不同意”的 3 名女生分别为  $B_1, B_2, B_3$ .

从 7 人中随机选出 2 人的情况有

$A_1A_2, A_1A_3, A_1A_4, A_1B_1, A_1B_2, A_1B_3, A_2A_3, A_2A_4, A_2B_1, A_2B_2, A_2B_3, A_3A_4, A_3B_1, A_3B_2, A_3B_3,$

$A_4B_1, A_4B_2, A_4B_3, B_1B_2, B_1B_3, B_2B_3$ , 共 21 种结果.

其中 2 人都选择“不同意”的情况有  $B_1B_2, B_1B_3, B_2B_3$ , 共 3 种结果.

设 2 名女生中至少有一人选择“同意”为事件  $M$ ,

$$\text{所求概率 } P(M) = 1 - \frac{3}{21} = \frac{6}{7}. \quad \dots\dots\dots 13 \text{ 分}$$

(18) (本小题满分 14 分)

证明: (I) 因为平面  $PAB \perp$  平面  $ABCD$ ,

平面  $PAB \cap$  平面  $ABCD = AB$ ,

又因为  $PA \perp AB$ ,

所以  $PA \perp$  平面  $ABCD$ .



则  $PA \perp CD$ .

.....5分

(II) 由已知,  $BC \parallel ED$ , 且  $BC=ED$ , 所以四边形  $BCDE$  是平行四边形,

又  $CD \perp AD$ ,  $BC=CD$ , 所以四边形  $BCDE$  是正方形,

连接  $CE$ , 所以  $BD \perp CE$ ,

又因为  $BC \parallel AE, BC=AE$ ,

所以四边形  $ABCE$  是平行四边形,

所以  $CE \parallel AB$ , 则  $BD \perp AB$ .

由(I)知  $PA \perp$  平面  $ABCD$ ,

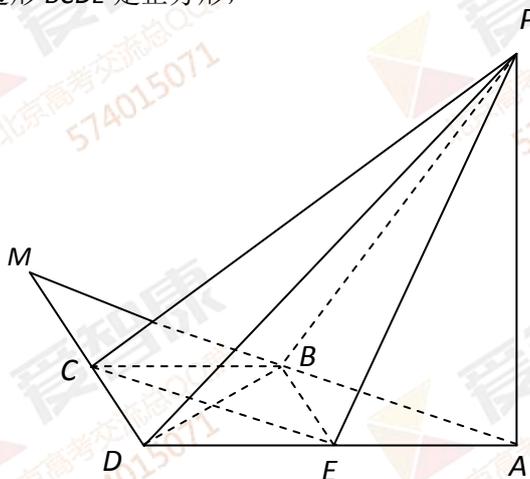
所以  $PA \perp BD$ ,

又因为  $PA \cap AB = A$ ,

则  $BD \perp$  平面  $PAB$ ,

且  $BD \subset$  平面  $PBD$ ,

所以平面  $PBD \perp$  平面  $PAB$ .



.....10分

(III) 在梯形  $ABCD$  中,  $AB$  与  $CD$  不平行. 延长  $AB, DC$ , 相交于点  $M(M \in$  平面  $PAB)$ , 点  $M$  即为所求的一个点. 理由如下: 由已知,  $BC \parallel ED$ , 且  $BC=ED$ .

所以四边形  $BCDE$  是平行四边形, 所以  $CD \parallel EB$ , 即  $CM \parallel EB$ ,

又  $EB \subset$  平面  $PBE$ ,  $CM \not\subset$  平面  $PBE$ ,

所以  $CM \parallel$  平面  $PBE$ .

.....14分

(19) (本小题满分 14 分)

解: (I) 依题意, 直线  $l$  的方程为  $y = x - 1$ , 由  $\begin{cases} y = x - 1, \\ x^2 + 3y^2 - 3 = 0 \end{cases}$ , 得  $2x^2 - 3x = 0$ .

设  $E(x_1, y_1), F(x_2, y_2)$ , 线段  $EF$  的中点为  $M(x_0, y_0)$ ,

$$\text{则 } x_1 + x_2 = \frac{3}{2}, \quad x_0 = \frac{3}{4},$$

$$y_0 = x_0 - 1 = -\frac{1}{4}. \text{ 所以 } M\left(\frac{3}{4}, -\frac{1}{4}\right).$$

.....6分

(II) 设直线  $l$  的方程为  $x = my + 1$ , 由  $\begin{cases} x = my + 1, \\ x^2 + 3y^2 - 3 = 0 \end{cases}$

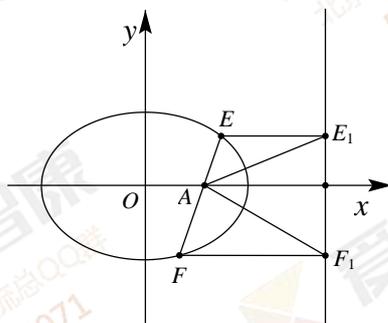
得  $(m^2 + 3)y^2 + 2my - 2 = 0$ , 显然  $m \in \mathbf{R}$ .



设  $E(x_1, y_1), F(x_2, y_2)$ , 则  $y_1 + y_2 = \frac{-2m}{m^2 + 3}$ ,  $y_1 y_2 = \frac{-2}{m^2 + 3}$ .

$E_1(3, y_1), F_1(3, y_2)$ .

$$\begin{aligned} \text{因为 } \lambda &= S_1 S_2 = \frac{1}{2}(3-x_1)|y_1| \cdot \frac{1}{2}(3-x_2)|y_2| \\ &= \frac{1}{4}(2-my_1)(2-my_2)|y_1 y_2| \\ &= \frac{1}{4}[4-2m(y_1+y_2)+m^2 y_1 y_2]|y_1 y_2| \\ &= \frac{2m^2+6+2m^2-m^2}{2(m^2+3)} \cdot \frac{2}{m^2+3} \\ &= \frac{3m^2+6}{(m^2+3)^2} \\ &= -\frac{3}{(m^2+3)^2} + \frac{3}{m^2+3}. \end{aligned}$$



因为  $\frac{1}{m^2+3} \in (0, \frac{1}{3}]$ ,

所以实数  $\lambda$  的取值范围是  $(0, \frac{2}{3}]$ . .....14 分

20. (本小题满分 13 分)

解:

(I) 易得,  $f'(x) = 3x^2 - 3a$ , 所以  $f'(1) = 3 - 3a$ ,

依题意,  $(3-3a)(-\frac{1}{2}) = -1$ , 解得  $a = \frac{1}{3}$ ; .....3 分

(II) 因为  $F(x) = -x[g(x) + \frac{1}{2}x - 2] = -x[(1 - \ln x) + \frac{1}{2}x - 2] = x \ln x - \frac{1}{2}x^2 + x$ ,

则  $F'(x) = \ln x + 1 - x + 1 = \ln x - x + 2$ . 设  $t(x) = \ln x - x + 2$ ,

则  $t'(x) = \frac{1}{x} - 1 = \frac{1-x}{x}$ .

令  $t'(x) = 0$ , 得  $x = 1$ .

则由  $t'(x) > 0$ , 得  $0 < x < 1$ ,  $F'(x)$  为增函数;

由  $t'(x) < 0$ , 得  $x > 1$ ,  $F'(x)$  为减函数;

而  $F'(\frac{1}{e^2}) = -2 - \frac{1}{e^2} + 2 = -\frac{1}{e^2} < 0$ ,  $F'(1) = 1 > 0$ .



则  $F'(x)$  在  $(0,1)$  上有且只有一个零点  $x_1$ ,

且在  $(0,x_1)$  上  $F'(x) < 0$ ,  $F(x)$  为减函数;

在  $(x_1,1)$  上  $F'(x) > 0$ ,  $F(x)$  为增函数.

所以  $x_1$  为极值点, 此时  $m = 0$ .

又  $F'(3) = \ln 3 - 1 > 0$ ,  $F'(4) = 2\ln 2 - 2 < 0$ ,

则  $F'(x)$  在  $(3,4)$  上有且只有一个零点  $x_2$ ,

且在  $(3,x_2)$  上  $F'(x) > 0$ ,  $F(x)$  为增函数;

在  $(x_2,4)$  上  $F'(x) < 0$ ,  $F(x)$  为减函数.

所以  $x_2$  为极值点, 此时  $m = 3$ .

综上  $m = 0$  或  $m = 3$ . .....9 分

(III) (1) 当  $x \in (0,e)$  时,  $g(x) > 0$ , 依题意,  $h(x) \geq g(x) > 0$ , 不满足条件;

(2) 当  $x = e$  时,  $g(e) = 0$ ,  $f(e) = e^3 - 3ae + e$ ,

①若  $f(e) = e^3 - 3ae + e \leq 0$ , 即  $a \geq \frac{e^2 + 1}{3}$ , 则  $e$  是  $h(x)$  的一个零点;

②若  $f(e) = e^3 - 3ae + e > 0$ , 即  $a < \frac{e^2 + 1}{3}$ , 则  $e$  不是  $h(x)$  的零点;

(3) 当  $x \in (e, +\infty)$  时,  $g(x) < 0$ , 所以此时只需考虑函数  $f(x)$  在  $(e, +\infty)$  上零点的情况. 因为  $f'(x) = 3x^2 - 3a > 3e^2 - 3a$ , 所以

①当  $a \leq e^2$  时,  $f'(x) > 0$ ,  $f(x)$  在  $(e, +\infty)$  上单调递增.

又  $f(e) = e^3 - 3ae + e$ , 所以

(i) 当  $a \leq \frac{e^2 + 1}{3}$  时,  $f(e) \geq 0$ ,  $f(x)$  在  $(e, +\infty)$  上无零点;

(ii) 当  $\frac{e^2 + 1}{3} < a \leq e^2$  时,  $f(e) < 0$ ,

又  $f(2e) = 8e^3 - 6ae + e \geq 8e^3 - 6e^3 + e > 0$ ,

所以此时  $f(x)$  在  $(e, +\infty)$  上恰有一个零点;



②当  $a > e^2$  时, 令  $f'(x) = 0$ , 得  $x = \pm\sqrt{a}$ .

由  $f'(x) < 0$ , 得  $e < x < \sqrt{a}$ ;

由  $f'(x) > 0$ , 得  $x > \sqrt{a}$ ;

所以  $f(x)$  在  $(e, \sqrt{a})$  上单调递减, 在  $(\sqrt{a}, +\infty)$  上单调递增.

因为  $f(e) = e^3 - 3ae + e < e^3 - 3e^3 + e < 0$ ,

$f(2a) = 8a^3 - 6a^2 + e > 8a^2 - 6a^2 + e = 2a^2 + e > 0$ ,

所以此时  $f(x)$  在  $(e, +\infty)$  上恰有一个零点;

综上,  $a > \frac{e^2 + 1}{3}$ .

.....13分



# 爱智康

北京高考交流总QQ群

574015071

