北京市朝阳区高三年级第一次综合练习

数学学科测试（理工类）

2017.3

（考试时间 120 分钟　满分 150 分）

本试卷分为选择题（共 40 分）和非选择题（共 110 分）两部分

第一部分（选择题 共 40 分）

一、选择题：本大题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分．在每小题给出的四个选项中，选出符合题目要求的一项.

（1）已知集合 $A=\{x\mid -1\le x<3\}$，$B=\{x\in \mathbf{Z}\mid x^2<4\}$，则 $A\cap B=$

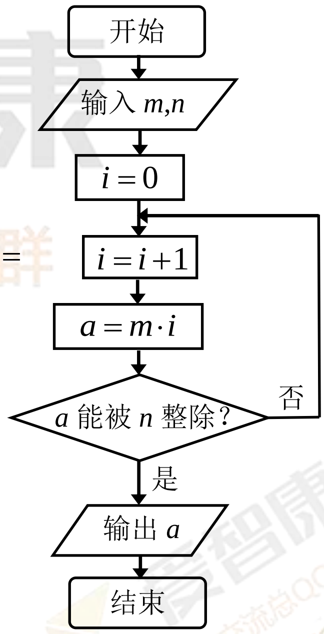
（A）$\{0,1\}$　　（B）$\{-1,0,1\}$

（C）$\{-1,0,1,2\}$　　（D）$\{-2,-1,0,1,2\}$

（2）若 x,y 满足 $\begin{cases}2x-y\leqslant 0,\\ x+y\leqslant 3,\\ x\geqslant 0,\end{cases}$ 则 $2x+y$ 的最大值为

（A）0　　（B）3

（C）4　　（D）5



（3）执行如图所示的程序框图，若输入 $m=4$，$n=6$，则输出 $a=$

（A）4　　（B）8

（C）12　　（D）16

（4）给出如下命题：

①若“$p\wedge q$”为假命题，则 p,q 均为假命题；

②在△ABC 中，“$A>B$”是“$\sin A>\sin B$”的充要条件；

③ $(1+x)^8$ 的展开式中二项式系数最大的项是第五项.

其中正确的是

（A）①②　　（B）②③　　（C）①③　　（D）①②③

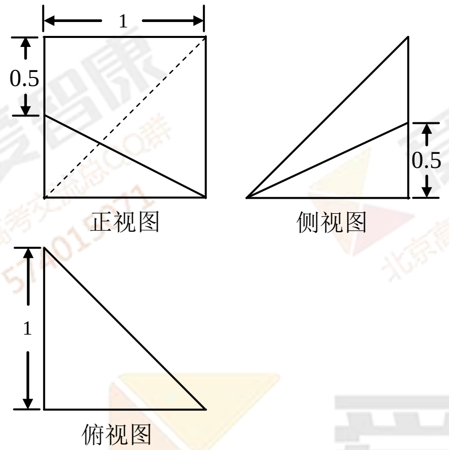
（5）设抛物线 $y^2=8x$ 的焦点为 F，准线为 l，P 为抛物线上一点，$PA\perp l$，A 为垂足.若直线 AF 的斜率为 $-\sqrt{3}$，则 $|PF|=$

（A）$4\sqrt{3}$　　（B）6　　（C）8　　（D）16

（6）已知函数 $f(x)=\begin{cases}|\log_4 x|, & 0<x\le 4,\\ x^2-10x+25, & x>4.\end{cases}$ 若 a，b，c，d 是互不相同的正数，且 $f(a)=f(b)=f(c)=f(d)$，则 $abcd$ 的取值范围是

（A）$(24,25)$　　（B）$(18,24)$　　（C）$(21,24)$　　（D）$(18,25)$

（7）某四棱锥的三视图如图所示，则该四棱锥的底面的面积是



（A）$\frac{1}{2}$　　（B）$\frac{3}{2}$　　（C）$\frac{1}{4}$　　（D）$\frac{3}{4}$

（8）现有 10 支队伍参加篮球比赛，规定：比赛采取单循环比赛制，即每支队伍与其他 9 支队伍各比赛一场；每场比赛中，胜方得 2 分，负方得 0 分，平局双方各得 1 分．下面关于这 10 支队伍得分的叙述正确的是

（A）可能有两支队伍得分都是 18 分　　（B）各支队伍得分总和为 180 分

（C）各支队伍中最高得分不少于 10 分　　（D）得偶数分的队伍必有偶数个

第二部分（非选择题　共 110 分）

二、填空题：本大题共 6 小题，每小题 5 分，共 30 分.

（9）复数 $\frac{1+\mathrm{i}}{\mathrm{i}}$ 在复平面内对应的点的坐标是____.

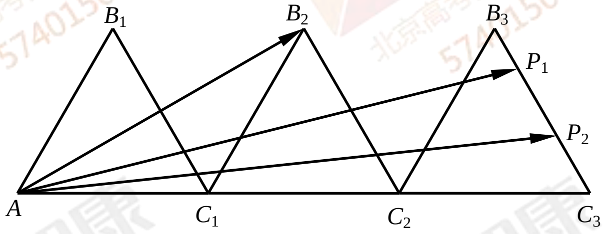
（10）在△ABC 中，$\angle A=\frac{\pi}{3}$，$BC=3$，$AB=\sqrt{6}$，则 $\angle C=$____.

（11）已知 $\{a_n\}$ 为等差数列，S_n 为其前 n 项和．若 $S_6=51$，$a_1+a_9=26$，则数列 $\{a_n\}$ 的公差 $d=$____，通项公式 $a_n=$____.

(12) 在极坐标系中，直线 C_1 的极坐标方程为 $\rho\sin(\theta+\frac{\pi}{4})=\sqrt{2}$．若以极点为原点，极轴为 x 轴的正半轴建立平面直角坐标系 xOy，则直线 C_1 的直角坐标方程为_____；曲

线 C_2 的方程为 $\begin{cases} x=\cos t, \\ y=1+\sin t \end{cases}$（$t$ 为参数），则 C_2 被 C_1 截得的弦长为___.

(13) 如图，ΔAB_1C_1，$\Delta C_1B_2C_2$，$\Delta C_2B_3C_3$ 是三个边长为2的等边三角形，且有一条边在同一直线上，边 B_3C_3 上有2个不同的点 P_1,P_2，则 $\overrightarrow{AB_2}\cdot(\overrightarrow{AP_1}+\overrightarrow{AP_2})=$___.



（14）在平面直角坐标系 xOy 中，动点 $P(x,y)$ 到两坐标轴的距离之和等于它到定点 $(1,1)$ 的距离，记点 P 的轨迹为 C.给出下面四个结论：

①曲线 C 关于原点对称；

②曲线 C 关于直线 $y=x$ 对称；

③点 $(-a^2,1)(a\in\mathbf{R})$ 在曲线 C 上；

④在第一象限内，曲线 C 与 x 轴的非负半轴、y 轴的非负半轴围成的封闭图形的面积小于 $\dfrac{1}{2}$.

其中所有正确结论的序号是____.

三、解答题：本大题共6小题，共80分.解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程.

（15）（本小题满分13分）

已知函数 $f(x)=\sin\omega x(\cos\omega x-\sqrt{3}\sin\omega x)+\dfrac{\sqrt{3}}{2}(\omega>0)$ 的最小正周期为 $\dfrac{\pi}{2}$.

(Ⅰ)求 ω 的值；

(Ⅱ)求函数 $f(x)$ 的单调递减区间.

（16）（本小题满分13分）

某单位共有员工45人，其中男员工27人，女员工18人．上级部门为了对该单位员工的工作业绩进行评估，采用按性别分层抽样的方法抽取5名员工进行考核.

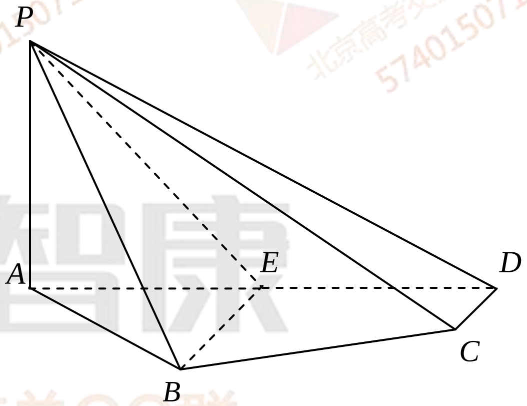
（Ⅰ）求抽取的5人中男、女员工的人数分别是多少；

（Ⅱ）考核前，评估小组从抽取的 5 名员工中，随机选出 3 人进行访谈．设选出的 3 人中男员工人数为 X，求随机变量 X 的分布列和数学期望；

（Ⅲ）考核分笔试和答辩两项．5 名员工的笔试成绩分别为 78，85，89，92，96；结合答辩情况，他们的考核成绩分别为 95，88，102，106，99．这 5 名员工笔试成绩与考核成绩的方差分别记为 s_1^2，s_2^2，试比较 s_1^2 与 s_2^2 的大小．（只需写出结论）

(17)（本小题满分 14 分）

如图，在四棱锥 $P-ABCD$ 中，平面 $PAD\perp$ 平面 $ABCD$，E 为 AD 的中点，$PA\perp AD$，$BE\parallel CD, BE\perp AD$，$PA=AE=BE=2, CD=1$.



（Ⅰ）求证：平面 $PAD\perp$ 平面 PCD；

（Ⅱ）求二面角 $C-PB-E$ 的余弦值；

（Ⅲ）在线段 PE 上是否存在点 M，使得 $DM\parallel$ 平面 PBC？若存在，求出点 M 的位置；若不存在，说明理由.

(18)（本小题满分 13 分）

已知函数 $f(x)=\ln x-ax-1(a\in\mathbf{R}), g(x)=xf(x)+\dfrac{1}{2}x^2+2x$.

（Ⅰ）求 $f(x)$ 的单调区间；

（Ⅱ）当 $a=1$ 时，若函数 $g(x)$ 在区间 $(m,m+1)(m\in\mathbf{Z})$ 内存在唯一的极值点，求 m 的值.

(19)（本小题满分 14 分）

已知椭圆 $C:\dfrac{x^2}{a^2}+y^2=1(a>1)$，离心率 $e=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$．直线 $l:x=my+1$ 与 x 轴交于点 A，与椭圆 C 相交于 E,F 两点．自点 E,F 分别向直线 $x=3$ 作垂线，垂足分别为 E_1,F_1.

（Ⅰ）求椭圆 C 的方程及焦点坐标；

（II）记 $\Delta AEE_1, \Delta AE_1F_1, \Delta AFF_1$ 的面积分别为 S_1, S_2, S_3，试证明 $\dfrac{S_1S_3}{{S_2}^2}$ 为定值.

(20)（本小题满分 13 分）

对于正整数集合 $A=\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$（$n\in \mathbf{N}^*$，$n \geq 3$），如果去掉其中任意一个元素 a_i（$i=1,2,\cdots,n$）之后，剩余的所有元素组成的集合都能分为两个交集为空集的集合，且这两个集合的所有元素之和相等，就称集合 A 为“和谐集”.

（I）判断集合 $\{1,2,3,4,5\}$ 是否是“和谐集”（不必写过程）;

（II）求证：若集合 A 是“和谐集”，则集合 A 中元素个数为奇数;

（III）若集合 A 是“和谐集”，求集合 A 中元素个数的最小值.

北京市朝阳区高三年级第一次综合练习

数学学科测试答案（理工类） 2017.3

一、选择题：本大题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分.

题号	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)
答案	B	C	C	B	C	A	D	D

二、填空题：本大题共 6 小题，每小题 5 分，共 30 分.

题号	(9)	(10)	(11)	(12)	(13)	(14)
答案	$(1,-1)$	$\frac{\pi}{4}$	3，$3n-2$	$x+y-2=0$，$\sqrt{2}$	36	②③④

三、解答题：

(15)（本小题满分 13 分）

解：因为 $f(x)=\sin\omega x(\cos\omega x-\sqrt{3}\sin\omega x)+\frac{\sqrt{3}}{2}$

$$=\sin\omega x\cdot\cos\omega x-\sqrt{3}\sin^2\omega x+\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$=\frac{1}{2}\sin 2\omega x+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos 2\omega x$$

$$=\sin(2\omega x+\frac{\pi}{3}),$$ …………5 分

(Ⅰ) 又因为函数 $f(x)$ 的最小正周期为 $\frac{\pi}{2}$，

所以 $\frac{2\pi}{2\omega}=\frac{\pi}{2}$.

解得 $\omega=2$. …………7 分

(Ⅱ) 令 $2k\pi+\frac{\pi}{2}\le 4x+\frac{\pi}{3}\le 2k\pi+\frac{3\pi}{2},k\in\mathbf{Z}$ 得，

$$2k\pi+\frac{\pi}{6}\le 4x\le 2k\pi+\frac{7\pi}{6},k\in\mathbf{Z},$$

所以 $\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{24}\le x\le\frac{k\pi}{2}+\frac{7\pi}{24},k\in\mathbf{Z}$.

所以函数 $f(x)$ 的单调递减区间是 $[\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{24},\frac{k\pi}{2}+\frac{7\pi}{24}],k\in\mathbf{Z}$. …………13 分

(16)（本小题满分 13 分）

解：（Ⅰ）抽取的 5 人中男员工的人数为 $\frac{5}{45}\times 27=3$，

女员工的人数为$\frac{5}{45}\times 18=2$. ……………………………………4 分

（Ⅱ）由（Ⅰ）可知，抽取的 5 名员工中，有男员工 3 人，女员工 2 人.

所以，随机变量 X 的所有可能取值为$1,\ 2,\ 3$.

根据题意，$P(X=1)=\frac{C_3^1\cdot C_2^2}{C_5^3}=\frac{3}{10}$，

$P(X=2)=\frac{C_3^2\cdot C_2^1}{C_5^3}=\frac{6}{10}$，

$P(X=3)=\frac{C_3^3\cdot C_2^0}{C_5^3}=\frac{1}{10}$.

随机变量 X 的分布列是：

X	1	2	3
P	$\frac{3}{10}$	$\frac{6}{10}$	$\frac{1}{10}$

数学期望 $EX=1\times\frac{3}{10}+2\times\frac{6}{10}+3\times\frac{1}{10}=\frac{18}{10}=\frac{9}{5}$. ……………………………………10 分

（Ⅲ）$s_1^2=s_2^2$. ……………………………………………………………………13 分

(17)（本小题满分 14 分）

（Ⅰ）证明：由已知平面 $PAD\perp$ 平面 $ABCD$，$PA\perp AD$，

且平面 $PAD\cap$ 平面 $ABCD=AD$，

所以 $PA\perp$ 平面 $ABCD$.

所以 $PA\perp CD$.

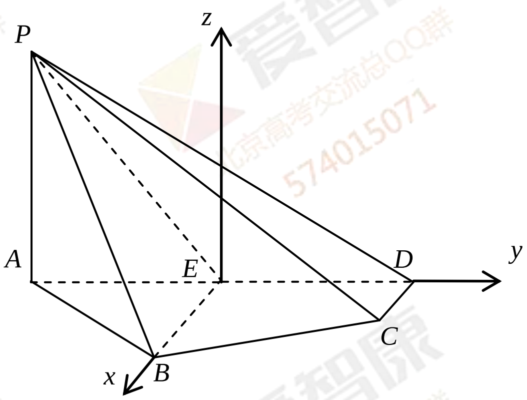
又因为 $BE\perp AD$，$BE\parallel CD$，

所以 $CD\perp AD$.

所以 $CD\perp$ 平面 PAD.

因为 $CD\subset$ 平面 PCD，

所以平面 $PAD\perp$ 平面 PCD. ……4 分



（Ⅱ）作 $Ez\perp AD$，以 E 为原点，以 $\overrightarrow{EB},\overrightarrow{ED}$ 的方向分别为 x 轴，y 轴的正方向，建立如图所示的空间直角坐标系 $E-xyz$，

则点 $E(0,0,0)$，$P(0,-2,2)$，$A(0,-2,0)$，$B(2,0,0)$，$C(1,2,0)$，$D(0,2,0)$.

所以 $\overrightarrow{PB}=(2,2,-2,)$，$\overrightarrow{BC}=(-1,2,0)$，$\overrightarrow{EP}=(0,-2,2)$.

设平面 PBC 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$，

所以 $\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{PB}=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{BC}=0.\end{cases}$ 即 $\begin{cases}x+y-z=0,\\ -x+2y=0.\end{cases}$

令 $y=1$，解得 $\boldsymbol{n}=(2,1,3)$.

设平面 PBE 的法向量为 $\boldsymbol{m}=(a,b,c)$，

所以 $\begin{cases}\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{PB}=0,\\ \boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{EP}=0.\end{cases}$ 即 $\begin{cases}a+b-c=0,\\ -b+c=0.\end{cases}$

令 $b=1$，解得 $\boldsymbol{m}=(0,1,1)$.

所以 $\cos\langle\boldsymbol{n},\boldsymbol{m}\rangle=\dfrac{2\times0+1\times1+3\times1}{\sqrt{14}\cdot\sqrt{2}}=\dfrac{2\sqrt{7}}{7}$.

由图可知，二面角 $C-PB-E$ 的余弦值为 $\dfrac{2\sqrt{7}}{7}$. ....10 分

（III）“线段 PE 上存在点 M，使得 DM //平面 PBC” 等价于 “$\overrightarrow{DM}\cdot\boldsymbol{n}=0$”.

因为 $\overrightarrow{PE}=(0,2,-2)$，设 $\overrightarrow{PM}=\lambda\overrightarrow{PE}=(0,2\lambda,-2\lambda)$，$\lambda\in(0,1)$，

则 $M(0,2\lambda-2,2-2\lambda)$，$\overrightarrow{DM}=(0,2\lambda-4,2-2\lambda)$.

由（II）知平面 PBC 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(2,1,3)$，

所以 $\overrightarrow{DM}\cdot\boldsymbol{n}=2\lambda-4+6-6\lambda=0$.

解得 $\lambda=\dfrac{1}{2}$.

所以线段 PE 上存在点 M，即 PE 中点，使得 DM //平面 PBC. ....14 分

（18）（本小题满分 13 分）

解：（I）由已知得 $x>0$，$f'(x)=\dfrac{1}{x}-a=\dfrac{1-ax}{x}$.

（i）当 $a\leqslant0$ 时，$f'(x)>0$ 恒成立，则函数 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 为增函数；

（ii）当 $a>0$ 时，由 $f'(x)>0$，得 $0<x<\dfrac{1}{a}$；

由 $f'(x)<0$，得 $x>\dfrac{1}{a}$；

所以函数 $f(x)$ 的单调递增区间为 $(0,\dfrac{1}{a})$，单调递减区间为 $(\dfrac{1}{a},+\infty)$. ……4 分

（II）因为 $g(x)=xf(x)+\dfrac{1}{2}x^2+2x=x(\ln x-x-1)+\dfrac{1}{2}x^2+2x=x\ln x-\dfrac{1}{2}x^2+x$，

则 $g'(x)=\ln x+1-x+1=\ln x-x+2=f(x)+3$.

由（Ⅰ）可知，函数 $g'(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递增，在 $(1,+\infty)$ 上单调递减.

又因为 $g'(\frac{1}{e^2})=-2-\frac{1}{e^2}+2=-\frac{1}{e^2}<0$，$g'(1)=1>0$，

所以 $g'(x)$ 在 $(0,1)$ 上有且只有一个零点 x_1.

又在 $(0,x_1)$ 上 $g'(x)<0$，$g(x)$ 在 $(0,x_1)$ 上单调递减；

在 $(x_1,1)$ 上 $g'(x)>0$，$g(x)$ 在 $(x_1,1)$ 上单调递增.

所以 x_1 为极值点，此时 $m=0$.

又 $g'(3)=\ln 3-1>0$，$g'(4)=2\ln 2-2<0$，

所以 $g'(x)$ 在 $(3,4)$ 上有且只有一个零点 x_2.

又在 $(3,x_2)$ 上 $g'(x)>0$，$g(x)$ 在 $(3,x_2)$ 上单调递增；

在 $(x_2,4)$ 上 $g'(x)<0$，$g(x)$ 在 $(x_2,4)$ 上单调递减.

所以 x_2 为极值点，此时 $m=3$.

综上所述，$m=0$ 或 $m=3$. ……………………………………………………………13 分

（19）（本小题满分 14 分）

解：（Ⅰ）由题意可知 $b=1$，又 $\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{6}}{3}$，即 $\frac{a^2-1}{a^2}=\frac{2}{3}$.

解得 $a^2=3$.即 $a=\sqrt{3}$.

所以 $c=\sqrt{a^2-b^2}=\sqrt{2}$.

所以椭圆 C 的方程为 $\frac{x^2}{3}+y^2=1$，焦点坐标为 $(\pm\sqrt{2},0)$. …………………4 分

（Ⅱ）由 $\begin{cases} x=my+1, \\ x^2+3y^2-3=0 \end{cases}$ 得 $(m^2+3)y^2+2my-2=0$，显然 $m\in\mathbf{R}$.

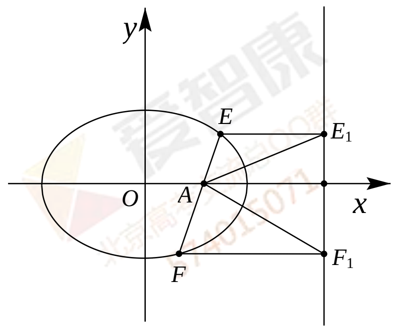
设 $E(x_1,y_1),F(x_2,y_2)$,则 $y_1+y_2=\frac{-2m}{m^2+3},y_1y_2=\frac{-2}{m^2+3}$，$E_1(3,y_1),F_1(3,y_2)$.

因为 $S_1S_3=\frac{1}{2}(3-x_1)|y_1|\cdot\frac{1}{2}(3-x_2)|y_2|$

$=\frac{1}{4}(2-my_1)(2-my_2)|y_1y_2|$

$=\frac{1}{4}[4-2m(y_1+y_2)+m^2y_1y_2]|y_1y_2|$

$=\frac{1}{4}(4-2m\cdot\frac{-2m}{m^2+3}+m^2\cdot\frac{-2}{m^2+3})\left|\frac{-2}{m^2+3}\right|$



$=\frac{3(m^2+2)}{(m^2+3)^2}$,

又因为 $S_2{}^2=[\frac{1}{2}\times 2|y_1-y_2|]^2$

$=(y_1+y_2)^2-4y_1y_2$

$=\frac{4m^2}{(m^2+3)^2}+\frac{8}{m^2+3}=\frac{4m^2+8m^2+24}{(m^2+3)^2}=\frac{12m^2+24}{(m^2+3)^2}$.

所以 $\frac{S_1S_3}{S_2{}^2}=\frac{\frac{3(m^2+2)}{(m^2+3)^2}}{\frac{12(m^2+2)}{(m^2+3)^2}}=\frac{1}{4}$. ……………………………………14 分

（20）（本小题满分 13 分）

解：（Ⅰ）集合 $\{1,2,3,4,5\}$ 不是“和谐集”. ……………………………………3 分

（Ⅱ）设集合 $A=\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$ 所有元素之和为 M .

由题可知，$M-a_i$（$i=1,2,\cdots,n$）均为偶数，

因此 a_i（$i=1,2,\cdots,n$）的奇偶性相同.

（ⅰ）如果 M 为奇数，则 a_i（$i=1,2,\cdots,n$）也均为奇数，

由于 $M=a_1+a_2+\cdots+a_n$，所以 n 为奇数.

（ⅱ）如果 M 为偶数，则 a_i（$i=1,2,\cdots,n$）均为偶数，

此时设 $a_i=2b_i$，则 $\{b_1,b_2,\cdots,b_n\}$ 也是“和谐集”.

重复上述操作有限次，便可得各项均为奇数的“和谐集”.

此时各项之和也为奇数，集合 A 中元素个数为奇数.

综上所述，集合 A 中元素个数为奇数. ……………………………………8 分

（III）由（II）可知集合 A 中元素个数为奇数，

当 $n=3$ 时，显然任意集合 $\{a_1,a_2,a_3\}$ 不是“和谐集”.

当 $n=5$ 时，不妨设 $a_1<a_2<a_3<a_4<a_5$，

将集合 $\{a_1,a_3,a_4,a_5\}$ 分成两个交集为空集的子集，且两个子集元素之和相等，

则有 $a_1+a_5=a_3+a_4$ ①，或者 $a_5=a_1+a_3+a_4$ ②；

将集合 $\{a_2,a_3,a_4,a_5\}$ 分成两个交集为空集的子集，且两个子集元素之和相等，

则有 $a_2+a_5=a_3+a_4$ ③，或者 $a_5=a_2+a_3+a_4$ ④.

由①、③，得 $a_1=a_2$，矛盾；由①、④，得 $a_1=-a_2$，矛盾；

由②、③，得 $a_1=-a_2$，矛盾；由②、④，得 $a_1=a_2$，矛盾.

因此当 $n=5$ 时，集合 A 一定不是“和谐集”.

当 $n=7$ 时，设 $A=\{1,3,5,7,9,11,13\}$，

因为 $3+5+7+9=11+13$，$1+9+13=5+7+11$，

$9+13=1+3+7+11$，$1+3+5+11=7+13$，$1+9+11=3+5+13$,

$3+7+9=1+5+13$，$1+3+5+9=7+11$，

所以集合 $A=\{1,3,5,7,9,11,13\}$ 是“和谐集”.

集合 A 中元素个数 n 的最小值是 7. ……………………………………13 分