



西城区高三统一测试

数学 (理科)

2017.4

第 I 卷 (选择题 共 40 分)

一、选择题: 本大题共 8 小题, 每小题 5 分, 共 40 分. 在每小题列出的四个选项中, 选出符合题目要求的一项.

1. 已知全集 $U = \mathbf{R}$, 集合 $A = \{x | x < 2\}$, $B = \{x | x < 0\}$, 那么 $A \cap \complement_U B =$

(A) $\{x | 0 \leq x < 2\}$

(B) $\{x | 0 < x < 2\}$

(C) $\{x | x < 0\}$

(D) $\{x | x < 2\}$

2. 在复平面内, 复数 $\frac{i}{1+i}$ 的对应点位于

(A) 第一象限

(B) 第二象限

(C) 第三象限

(D) 第四象限

3. 函数 $f(x) = \sin^2 x - \cos^2 x$ 的最小正周期是

(A) $\frac{\pi}{2}$

(B) π

(C) $\frac{3\pi}{2}$

(D) 2π

4. 函数 $f(x) = 2^x + \log_2 |x|$ 的零点个数为

(A) 0

(B) 1

(C) 2

(D) 3

5. 在 $\triangle ABC$ 中, 点 D 满足 $\overrightarrow{BC} = 3\overrightarrow{BD}$, 则

(A) $\overrightarrow{AD} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} - \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$

(B) $\overrightarrow{AD} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$

(C) $\overrightarrow{AD} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$

(D) $\overrightarrow{AD} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$

6. 在正方形网格中, 某四面体的三视图如图所示. 如果小

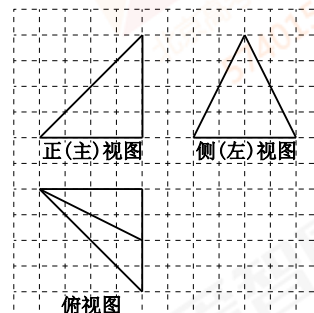
正方形网格的边长为 1, 那么该四面体最长棱的棱长为

(A) $2\sqrt{5}$

(B) $4\sqrt{2}$

(C) 6

(D) $4\sqrt{3}$



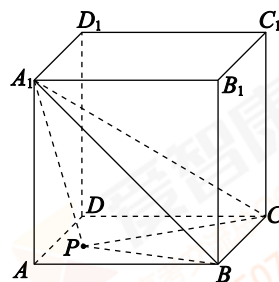
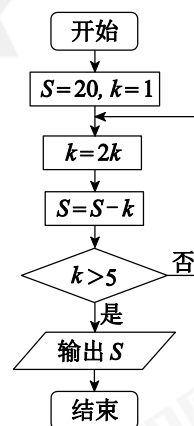


7. 数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n = |n - c|$ ($n \in \mathbf{N}^*$). 则 “ $c \leq 1$ ” 是 “ $\{a_n\}$ 为递增数列” 的
- (A) 充分而不必要条件 (B) 必要而不充分条件
- (C) 充要条件 (D) 既不充分也不必要条件
8. 将五个 1, 五个 2, 五个 3, 五个 4, 五个 5 共 25 个数填入一个 5 行 5 列的表格内 (每格填入一个数), 使得同一行中任何两数之差的绝对值不超过 2. 考察每行中五个数之和, 记这五个和的最小值为 m , 则 m 的最大值为
- (A) 8 (B) 9 (C) 10 (D) 11

第 II 卷 (非选择题 共 110 分)

二、填空题: 本大题共 6 小题, 每小题 5 分, 共 30 分.

9. 在 $(1+2x)^5$ 的展开式中, x^2 的系数为____. (用数字作答)
10. 设等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n . 若 $a_1 = 3$, $S_2 = 9$, 则 $a_n =$ ____; $S_n =$ ____.
11. 执行如右图所示的程序框图, 输出的 S 值为____.
12. 曲线 $\begin{cases} x = \cos \theta, \\ y = 1 + \sin \theta \end{cases}$ (θ 为参数) 与直线 $x + y - 1 = 0$ 相交于 A, B 两点, 则 $|AB| =$ ____.
13. 实数 a, b 满足 $0 < a \leq 2$, $b \geq 1$. 若 $b \leq a^2$, 则 $\frac{b}{a}$ 的取值范围是____.
14. 如图, 正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 2, 点 P 在正方形 $ABCD$ 的边界及其内部运动. 平面区域 W 由所有满足 $A_1P \leq \sqrt{5}$ 的点 P 组成, 则 W 的面积是____; 四面体 $P - A_1BC$ 的体积的最大值是____.





三、解答题：本大题共 6 小题，共 80 分。解答应写出必要的文字说明、证明过程或演算步骤。

15. (本小题满分 13 分)

在 $\triangle ABC$ 中，角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c ，且 $a \tan C = 2c \sin A$ 。

(I) 求角 C 的大小；

(II) 求 $\sin A + \sin B$ 的取值范围。

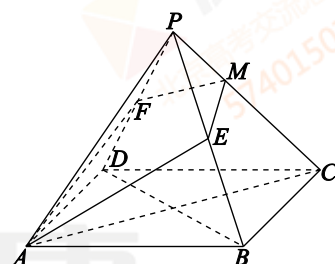
16. (本小题满分 14 分)

如图，在正四棱锥 $P-ABCD$ 中， $PA=AB$ ， E, F 分别为 PB, PD 的中点。

(I) 求证： $AC \perp$ 平面 PBD ；

(II) 求异面直线 PC 与 AE 所成角的余弦值；

(III) 若平面 AEF 与棱 PC 交于点 M ，求 $\frac{PM}{PC}$ 的值。



17. (本小题满分 13 分)

在测试中，客观题难度的计算公式为 $P_i = \frac{R_i}{N}$ ，其中 P_i 为第 i 题的难度， R_i 为答对该题的人数， N 为参加测试的总人数。

现对某校高三年级 240 名学生进行一次测试，共 5 道客观题。测试前根据对学生的了解，预估了每道题的难度，如下表所示：

题号	1	2	3	4	5
考前预估难度 P_i	0.9	0.8	0.7	0.6	0.4

测试后，随机抽取了 20 名学生的答题数据进行统计，结果如下：

题号	1	2	3	4	5
实测答对人数	16	16	14	14	4

(I) 根据题中数据，估计这 240 名学生中第 5 题的实测答对人数；

(II) 从抽样的 20 名学生中随机抽取 2 名学生，记这 2 名学生中第 5 题答对的人数为 X ，求 X 的分布列和数学期望；

(III) 试题的预估难度和实测难度之间会有偏差。设 P'_i 为第 i 题的实测难度，请用 P_i 和 P'_i 设计一个统计量，并制定一个标准来判断本次测试对难度的预估是否合理。



18. (本小题满分 13 分)

已知函数 $f(x) = e^x - \frac{1}{2}x^2$. 设 l 为曲线 $y = f(x)$ 在点 $P(x_0, f(x_0))$ 处的切线, 其中 $x_0 \in [-1, 1]$.

(I) 求直线 l 的方程 (用 x_0 表示);

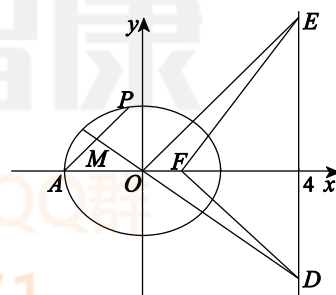
(II) 设 O 为原点, 直线 $x=1$ 分别与直线 l 和 x 轴交于 A, B 两点, 求 $\triangle AOB$ 的面积的最小值.

19. (本小题满分 14 分)

如图, 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的离心率为 $\frac{1}{2}$, F 为椭圆 C 的右焦点. $A(-a, 0)$, $|AF| = 3$.

(I) 求椭圆 C 的方程;

(II) 设 O 为原点, P 为椭圆上一点, AP 的中点为 M . 直线 OM 与直线 $x=4$ 交于点 D , 过 O 且平行于 AP 的直线与直线 $x=4$ 交于点 E . 求证: $\angle ODF = \angle OEF$.



20. (本小题满分 13 分)

如图, 将数字 $1, 2, 3, \dots, 2n$ ($n \geq 3$) 全部填入一个 2 行 n 列的表格中, 每格填一个数字. 第一行填入的数字依次为 $a_1, a_2, \dots, a_n$, 第二行填入的数字依次为 $b_1, b_2, \dots, b_n$.

$$\text{记 } S_n = \sum_{i=1}^n |a_i - b_i| = |a_1 - b_1| + |a_2 - b_2| + \dots + |a_n - b_n|.$$

a_1	a_2	$\dots$	a_n
b_1	b_2	$\dots$	b_n

(I) 当 $n=3$ 时, 若 $a_1=1$, $a_2=3$, $a_3=5$, 写出 S_3 的所有可能的取值;

(II) 给定正整数 n . 试给出 $a_1, a_2, \dots, a_n$ 的一组取值, 使得无论 $b_1, b_2, \dots, b_n$ 填写的顺序如何, S_n 都只有一个取值, 并求出此时 S_n 的值;

(III) 求证: 对于给定的 n 以及满足条件的所有填法, S_n 的所有取值的奇偶性相同.



西城区高三统一测试

高三数学（理科）参考答案及评分标准

2017.4

一、选择题：本大题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分.

1. A 2. A 3. B 4. C
5. D 6. C 7. A 8. C

二、填空题：本大题共 6 小题，每小题 5 分，共 30 分.

9. 40 10. $3 \cdot 2^{n-1}$; $3 \cdot (2^n - 1)$ 11. 6
12. 2 13. $[\frac{1}{2}, 2]$ 14. $\frac{\pi}{4}$; $\frac{4}{3}$

注：第 10, 14 题第一空 2 分，第二空 3 分.

三、解答题：本大题共 6 小题，共 80 分. 其他正确解答过程，请参照评分标准给分.

15. (本小题满分 13 分)

解：(I) 由 $a \tan C = 2c \sin A$,

$$\text{得 } \frac{a}{c} \cdot \frac{\sin C}{\cos C} = 2 \sin A. \quad [1 \text{ 分}]$$

$$\text{由正弦定理得 } \frac{\sin A}{\sin C} \cdot \frac{\sin C}{\cos C} = 2 \sin A. \quad [3 \text{ 分}]$$

$$\text{所以 } \cos C = \frac{1}{2}. \quad [4 \text{ 分}]$$

$$\text{因为 } C \in (0, \pi), \quad [5 \text{ 分}]$$

$$\text{所以 } C = \frac{\pi}{3}. \quad [6 \text{ 分}]$$

$$(II) \sin A + \sin B = \sin A + \sin\left(\frac{2\pi}{3} - A\right) \quad [7 \text{ 分}]$$

$$= \frac{3}{2} \sin A + \frac{\sqrt{3}}{2} \cos A \quad [8 \text{ 分}]$$

$$= \sqrt{3} \sin\left(A + \frac{\pi}{6}\right). \quad [9 \text{ 分}]$$

$$\text{因为 } C = \frac{\pi}{3}, \text{ 所以 } 0 < A < \frac{2\pi}{3}, \quad [10 \text{ 分}]$$

$$\text{所以 } \frac{\pi}{6} < A + \frac{\pi}{6} < \frac{5\pi}{6}, \quad [11 \text{ 分}]$$

$$\text{所以 } \frac{1}{2} < \sin\left(A + \frac{\pi}{6}\right) \leq 1, \quad [12 \text{ 分}]$$

$$\text{所以 } \sin A + \sin B \text{ 的取值范围是 } \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \sqrt{3}\right]. \quad [13 \text{ 分}]$$



16. (本小题满分 14 分)

解: (I) 设 $AC \cap BD = O$, 则 O 为底面正方形 $ABCD$ 中心. 连接 PO .

因为 $P-ABCD$ 为正四棱锥,

所以 $PO \perp$ 平面 $ABCD$.

[1 分]

所以 $PO \perp AC$.

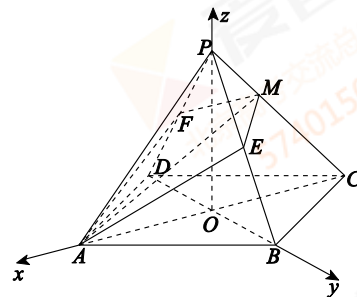
[2 分]

又 $BD \perp AC$, 且 $PO \cap BD = O$,

[3 分]

所以 $AC \perp$ 平面 PBD .

[4 分]



(II) 因为 OA, OB, OP 两两互相垂直, 如图建立空间直角坐标系 $O-xyz$. [5 分]

因为 $PB = AB$, 所以 $\text{Rt}\triangle POB \cong \text{Rt}\triangle AOB$.

所以 $OA = OP$.

[6 分]

设 $OA = 2$.

所以 $A(2, 0, 0), B(0, 2, 0), C(-2, 0, 0), D(0, -2, 0), P(0, 0, 2), E(0, 1, 1), F(0, -1, 1)$.

所以 $\overrightarrow{AE} = (-2, 1, 1), \overrightarrow{PC} = (-2, 0, -2)$.

[7 分]

所以 $|\cos \langle \overrightarrow{AE}, \overrightarrow{PC} \rangle| = \frac{|\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{PC}|}{|\overrightarrow{AE}| |\overrightarrow{PC}|} = \frac{\sqrt{3}}{6}$.

即 异面直线 PC 与 AE 所成角的余弦值为 $\frac{\sqrt{3}}{6}$.

[9 分]

(III) 连接 AM .

设 $\frac{PM}{PC} = \lambda$, 其中 $\lambda \in [0, 1]$, 则 $\overrightarrow{PM} = \lambda \overrightarrow{PC} = (-2\lambda, 0, -2\lambda)$,

[10 分]

所以 $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AP} + \overrightarrow{PM} = (-2 - 2\lambda, 0, 2 - 2\lambda)$.

设平面 $AEMF$ 的法向量为 $\mathbf{n} = (x, y, z)$, 又 $\overrightarrow{AF} = (-2, -1, 1)$, 所以

$$\begin{cases} \mathbf{n} \cdot \overrightarrow{AE} = 0, \\ \mathbf{n} \cdot \overrightarrow{AF} = 0, \end{cases} \quad \text{即} \quad \begin{cases} -2x + y + z = 0, \\ -2x - y + z = 0. \end{cases}$$

所以 $y = 0$. 令 $x = 1, z = 2$, 所以 $\mathbf{n} = (1, 0, 2)$.

[12 分]

因为 $AM \subset$ 平面 AEF , 所以 $\mathbf{n} \cdot \overrightarrow{AM} = 0$,

[13 分]

即 $-2 - 2\lambda + 2(2 - 2\lambda) = 0$,

解得 $\lambda = \frac{1}{3}$, 所以 $\frac{PM}{PC} = \frac{1}{3}$.

[14 分]



17. (本小题满分 13 分)

解: (I) 因为 20 人中答对第 5 题的人数为 4 人, 因此第 5 题的实测难度为 $\frac{4}{20} = 0.2$. [2 分]

所以, 估计 240 人中有 $240 \times 0.2 = 48$ 人实测答对第 5 题. [3 分]

(II) X 的可能取值是 0, 1, 2. [4 分]

$$P(X=0) = \frac{C_{16}^2}{C_{20}^2} = \frac{12}{19}; \quad P(X=1) = \frac{C_{16}^1 C_4^1}{C_{20}^2} = \frac{32}{95}; \quad P(X=2) = \frac{C_4^2}{C_{20}^2} = \frac{3}{95}. \quad [7 分]$$

X 的分布列为:

X	0	1	2
P	$\frac{12}{19}$	$\frac{32}{95}$	$\frac{3}{95}$

[8 分]

$$EX = 0 \times \frac{12}{19} + 1 \times \frac{32}{95} + 2 \times \frac{3}{95} = \frac{38}{95}. \quad [10 分]$$

(III) 将抽样的 20 名学生中第 i 题的实测难度, 作为 240 名学生第 i 题的实测难度.

定义统计量 $S = \frac{1}{n}[(P'_1 - P_1)^2 + (P'_2 - P_2)^2 + \dots + (P'_n - P_n)^2]$, 其中 P_i 为第 i 题的预估难

度. 并规定: 若 $S < 0.05$, 则称本次测试的难度预估合理, 否则为不合理. [11 分]

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{5}[(0.8-0.9)^2 + (0.8-0.8)^2 + (0.7-0.7)^2 + (0.7-0.6)^2 + (0.2-0.4)^2] \\ &= 0.012. \end{aligned} \quad [12 分]$$

因为 $S = 0.012 < 0.05$,

所以, 该次测试的难度预估是合理的. [13 分]

注: 本题答案不唯一, 学生可构造其它统计量和临界值来进行判断. 如“预估难度与实测难度差的平方和”, “预估难度与实测难度差的绝对值的和”, “预估难度与实测难度差的绝对值的平均值”等, 学生只要言之合理即可.

18. (本小题满分 13 分)

解: (I) 对 $f(x)$ 求导数, 得 $f'(x) = e^x - x$, [1 分]

所以切线 l 的斜率为 $f'(x_0) = e^{x_0} - x_0$, [2 分]

由此得切线 l 的方程为: $y - (e^{x_0} - \frac{1}{2}x_0^2) = (e^{x_0} - x_0)(x - x_0)$,

$$\text{即 } y = (e^{x_0} - x_0)x + (1 - x_0)e^{x_0} + \frac{1}{2}x_0^2. \quad [4 分]$$



(II) 依题意, 切线方程中令 $x=1$,

$$\text{得 } y = (e^{x_0} - x_0) + (1 - x_0)e^{x_0} + \frac{1}{2}x_0^2 = (2 - x_0)(e^{x_0} - \frac{1}{2}x_0).$$

[5 分]

所以 $A(1, y)$, $B(1, 0)$.

$$\text{所以 } S_{\triangle AOB} = \frac{1}{2}|OB| \cdot |y|$$

$$= \frac{1}{2} |(2 - x_0)(e^{x_0} - \frac{1}{2}x_0)|$$

$$= |(1 - \frac{1}{2}x_0)(e^{x_0} - \frac{1}{2}x_0)|, \quad x_0 \in [-1, 1].$$

[7 分]

$$\text{设 } g(x) = (1 - \frac{1}{2}x)(e^x - \frac{1}{2}x), \quad x \in [-1, 1].$$

[8 分]

$$\text{则 } g'(x) = -\frac{1}{2}(e^x - \frac{1}{2}x) + (1 - \frac{1}{2}x)(e^x - \frac{1}{2}) = -\frac{1}{2}(x-1)(e^x - 1).$$

[10 分]

令 $g'(x) = 0$, 得 $x = 0$ 或 $x = 1$.

$g(x)$, $g'(x)$ 的变化情况如下表:

x	-1	$(-1, 0)$	0	$(0, 1)$	1
$g'(x)$		-	0	+	
$g(x)$	$\frac{3}{2}(\frac{1}{2} + \frac{1}{e})$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$\frac{1}{2}(e - \frac{1}{2})$

所以 $g(x)$ 在 $(-1, 0)$ 单调递减; 在 $(0, 1)$ 单调递增,

[12 分]

所以 $g(x)_{\min} = g(0) = 1$,

从而 $\triangle AOB$ 的面积的最小值为 1.

[13 分]

19. (本小题满分 14 分)

解: (I) 设椭圆 C 的半焦距为 c . 依题意, 得

$$\frac{c}{a} = \frac{1}{2}, \quad a + c = 3.$$

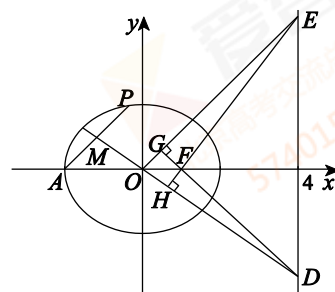
[2 分]

解得 $a = 2$, $c = 1$.

$$\text{所以 } b^2 = a^2 - c^2 = 3,$$

$$\text{所以椭圆 } C \text{ 的方程是 } \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1.$$

[4 分]



(II) 解法一: 由 (I) 得 $A(-2, 0)$. 设 AP 的中点 $M(x_0, y_0)$, $P(x_1, y_1)$.

设直线 AP 的方程为: $y = k(x + 2)$ ($k \neq 0$), 将其代入椭圆方程, 整理得

$$(4k^2 + 3)x^2 + 16k^2x + 16k^2 - 12 = 0,$$

[6 分]



所以 $-2 + x_1 = \frac{-16k^2}{4k^2 + 3}$. [7分]

所以 $x_0 = \frac{-8k^2}{4k^2 + 3}$, $y_0 = k(x_0 + 2) = \frac{6k}{4k^2 + 3}$,

即 $M(\frac{-8k^2}{4k^2 + 3}, \frac{6k}{4k^2 + 3})$. [8分]

所以直线 OM 的斜率是 $\frac{\frac{6k}{4k^2 + 3}}{\frac{-8k^2}{4k^2 + 3}} = -\frac{3}{4k}$, [9分]

所以直线 OM 的方程是 $y = -\frac{3}{4k}x$. 令 $x = 4$, 得 $D(4, -\frac{3}{k})$. [10分]

直线 OE 的方程是 $y = kx$. 令 $x = 4$, 得 $E(4, 4k)$. [11分]

由 $F(1, 0)$, 得直线 EF 的斜率是 $\frac{4k}{4-1} = \frac{4k}{3}$, 所以 $EF \perp OM$, 记垂足为 H ;

因为直线 DF 的斜率是 $\frac{-\frac{3}{k}}{4-1} = -\frac{1}{k}$, 所以 $DF \perp OE$, 记垂足为 G . [13分]

在 $Rt\triangle EHO$ 和 $Rt\triangle DGO$ 中, $\angle ODF$ 和 $\angle OEF$ 都与 $\angle EOD$ 互余,

所以 $\angle ODF = \angle OEF$. [14分]

解法二: 由 (I) 得 $A(-2, 0)$. 设 $P(x_1, y_1)$ ($x_1 \neq \pm 2$), 其中 $3x_1^2 + 4y_1^2 - 12 = 0$.

因为 AP 的中点为 M , 所以 $M(\frac{x_1 - 2}{2}, \frac{y_1}{2})$. [6分]

所以直线 OM 的斜率是 $k_{OM} = \frac{y_1}{x_1 - 2}$, [7分]

所以直线 OM 的方程是 $y = \frac{y_1}{x_1 - 2}x$. 令 $x = 4$, 得 $D(4, \frac{4y_1}{x_1 - 2})$. [8分]

直线 OE 的方程是 $y = \frac{y_1}{x_1 + 2}x$. 令 $x = 4$, 得 $E(4, \frac{4y_1}{x_1 + 2})$. [9分]

由 $F(1, 0)$, 得直线 EF 的斜率是 $k_{EF} = \frac{4y_1}{3(x_1 + 2)}$, [10分]

因为 $k_{EF} \cdot k_{OM} = \frac{4y_1}{3(x_1 + 2)} \cdot \frac{y_1}{x_1 - 2} = \frac{4y_1^2}{3(x_1^2 - 4)} = -1$,

所以 $EF \perp OM$, 记垂足为 H ; [12分]



$$\text{同理可得 } k_{DF} \cdot k_{OE} = \frac{4y_1}{3(x_1-2)} \cdot \frac{y_1}{x_1+2} = \frac{4y_1^2}{3(x_1^2-4)} = -1,$$

所以 $DF \perp OE$, 记垂足为 G .

[13 分]

在 $\text{Rt}\triangle EHO$ 和 $\text{Rt}\triangle DGO$ 中, $\angle ODF$ 和 $\angle OEF$ 都与 $\angle EOD$ 互余,

所以 $\angle ODF = \angle OEF$.

[14 分]

20. (本小题满分 13 分)

解: (I) S_3 的所有可能的取值为 3, 5, 7, 9.

[3 分]

(II) 令 $a_i = i$ ($i=1, 2, \dots, n$), 则无论 $b_1, b_2, \dots, b_n$ 填写的顺序如何, 都有 $S_n = n^2$.

[5 分]

因为 $a_i = i$,

所以 $b_i \in \{n+1, n+2, \dots, 2n\}$, ($i=1, 2, \dots, n$).

[6 分]

因为 $a_i < b_i$ ($i=1, 2, \dots, n$),

$$\text{所以 } S_n = \sum_{i=1}^n |a_i - b_i| = \sum_{i=1}^n (b_i - a_i) = \sum_{i=1}^n b_i - \sum_{i=1}^n a_i = \sum_{i=n+1}^{2n} i - \sum_{i=1}^n i = n^2.$$

[8 分]

注: $\{a_1, a_2, \dots, a_n\} = \{1, 2, \dots, n\}$, 或 $\{a_1, a_2, \dots, a_n\} = \{n+1, n+2, \dots, 2n\}$ 均满足条件.

(III) 解法一: 显然, 交换每一列中两个数的位置, 所得的 S_n 的值不变.

不妨设 $a_i > b_i$, 记 $A = \sum_{i=1}^n a_i$, $B = \sum_{i=1}^n b_i$, 其中 $i=1, 2, \dots, n$.

$$\text{则 } S_n = \sum_{i=1}^n |a_i - b_i| = \sum_{i=1}^n (a_i - b_i) = \sum_{i=1}^n a_i - \sum_{i=1}^n b_i = A - B.$$

[9 分]

$$\text{因为 } A + B = \sum_{i=1}^{2n} i = \frac{2n(2n+1)}{2} = n(2n+1),$$

所以 $A+B$ 与 n 具有相同的奇偶性.

[11 分]

又因为 $A+B$ 与 $A-B$ 具有相同的奇偶性,

所以 $S_n = A-B$ 与 n 的奇偶性相同,

所以 S_n 的所有可能取值的奇偶性相同.

[13 分]



解法二: 显然, 交换每一列中两个数的位置, 所得的 S_n 的值不变.

考虑如下表所示的任意两种不同的填法, $S_n = \sum_{i=1}^n |a_i - b_i|$, $S'_n = \sum_{i=1}^n |a'_i - b'_i|$, 不妨

设 $a_i < b_i$, $a'_i < b'_i$, 其中 $i = 1, 2, \dots, n$. [9 分]

a_1	a_2	$\cdots$	a_n	a'_1	a'_2	$\cdots$	a'_n
b_1	b_2	$\cdots$	b_n	b'_1	b'_2	$\cdots$	b'_n

$$S_n + S'_n = \sum_{i=1}^n (b_i - a_i) + \sum_{i=1}^n (b'_i - a'_i) = \left(\sum_{i=1}^n b_i + \sum_{i=1}^n b'_i \right) - \left(\sum_{i=1}^n a_i + \sum_{i=1}^n a'_i \right).$$

对于任意 $k \in \{1, 2, \dots, 2n\}$,

① 若在两种填法中 k 都位于同一行,

则 k 在 $S_n + S'_n$ 的表达式中或者只出现在 $\sum_{i=1}^n b_i + \sum_{i=1}^n b'_i$ 中, 或只出现在 $\sum_{i=1}^n a_i + \sum_{i=1}^n a'_i$

中, 且出现两次,

则对 k 而言, 在 $S_n + S'_n$ 的结果中得到 $\pm 2k$. [11 分]

② 若在两种填法中 k 位于不同行,

则 k 在 $S_n + S'_n$ 的表达式中在 $\sum_{i=1}^n b_i + \sum_{i=1}^n b'_i$ 与 $\sum_{i=1}^n a_i + \sum_{i=1}^n a'_i$ 中各出现一次,

则对 k 而言, 在 $S_n + S'_n$ 的结果中得到 0.

由 ① ② 得, 对于任意 $k \in \{1, 2, \dots, 2n\}$, $S_n + S'_n$ 必为偶数.

所以, 对于表格的所有不同的填法, S_n 所有可能取值的奇偶性相同. [13 分]





爱智康

爱智康是好未来（前学而思教育）旗下高端品牌，从 2007 年开始探究 K12 有效的 1 对 1 教学模式，先后在北京、上海、广州、深圳、天津、杭州、成都、西安、南京、武汉、苏州、郑州，十二个城市地成立分支机构。目前已开设 1 对 1、5-7 人小组学习和在线学习等多种授课模式。爱智康在全国已有近 100 所辅导中心，数千名教职员工，成为美誉度颇高的 K12 辅导品牌之一。

二模 1 对 1 短期冲刺课

课程亮点

二模 1 对 1 短期冲刺课的内容安排可以有效的帮助同学高效复习。以专题模块形式呈现重难点。有针对性的对试卷中 40%-50%的基础题、20%-30%的中档题、20%-30%的难题，分配对应的学习时间和强度。每个专题都是为了解决考生在冲刺阶段最急切的重难点问题，命中考生急需提升的薄弱环节，帮助考生高效备考。

课程安排

二模 1 对 1 短期冲刺课
课次：4 次课
开课时间：二模考试前
开课校区：所有学习中心
报课热线：4000-121-121



扫码了解课程详情

微信资讯平台

北京高考指南



第一时间获取**高考咨询、**
备考资料、干货讲座的平台

家长训练营



一个**有深度、有高度、更有温度的**
家长福利组织

