北京市东城区 2015-2016 学年度第二学期高三综合练习（二）

数学 （文科）

学校______________班级________________姓名_______________考号____________

本试卷共 5 页，共 150 分。考试时长 120 分钟。考生务必将答案答在答题卡上，在试卷上作答无效。考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回。

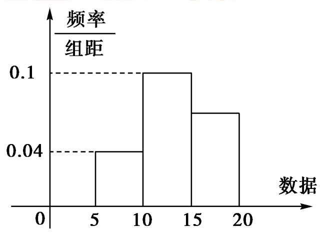
第一部分（选择题　共 40 分）

一、选择题（共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项）

（1）已知集合 $A=\{x\in\mathbf{N}\,|\,x\le 4\}$，$B=\{x\in\mathbf{N}\,|\,x>2\}$，那么 $A\cap B=$

（A）$\{3,4\}$　　（B）$\{0,1,2,3,4\}$

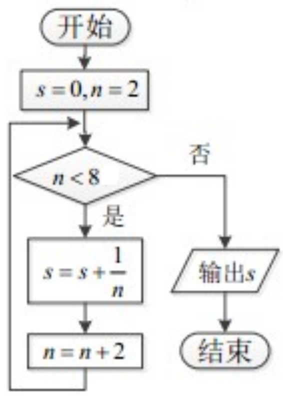
（C）$\mathbf{N}$　　（D）$\mathbf{R}$



（2）如图，根据样本的频率分布直方图，估计样本的中位数是

（A）10　　（B）12

（C）13　　（D）16



（3）执行如图所示程序框图，则输出的结果是

（A）$\dfrac{1}{6}$　　（B）$\dfrac{3}{4}$

（C）$\dfrac{9}{10}$　　（D）$\dfrac{11}{12}$

（4）已知 A，B 为圆 $x^2+(y-1)^2=4$ 上关于点 $P(1,2)$ 对称的两点，则直线 AB 的方程为

（A）$x+y-3=0$　　（B）$x-y+3=0$

（C）$x+3y-7=0$　　（D）$3x-y-1=0$

（5）设 a，b 为实数，则“$ab<1$”是“$0<a<\dfrac{1}{b}$”的

（A）充分而不必要条件　　（B）必要而不充分条件

（C）充分必要条件　　（D）既不充分也不必要条件

（6）已知函数 $g(x)=f(x)-x$ 是偶函数,且 $f(3)=4$，则 $f(-3)=$

（A）-4　　（B）-2

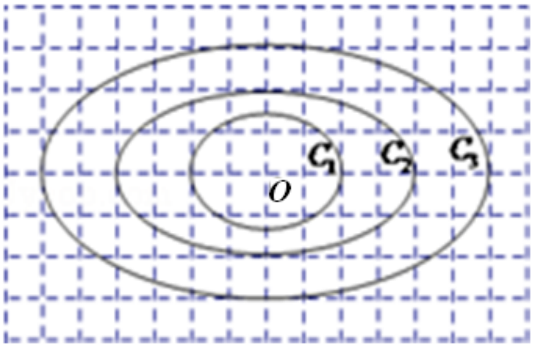
（C）0　　　　　　（D）4

（7）已知向量 $\overrightarrow{OA}=(\cos\beta,\sin\beta)$，将向量 $\overrightarrow{OA}$ 绕坐标原点 O 逆时针旋转 θ 角得到向量 $\overrightarrow{OB}$ $(0<\theta<90^{\circ})$，则下列说法不正确的是

（A）$|\overrightarrow{OA}|+|\overrightarrow{OB}|>|\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}|$　　　　（B）$|\overrightarrow{AB}|<\sqrt{2}$

（C）$|\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}|=|\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}|$　　　　（D）$(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB})\perp(\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB})$

（8）如图，在边长为 m 的正方形组成的网格中，有椭圆 C_1，C_2，C_3，它们的离心率分别为 e_1，e_2，e_3，则

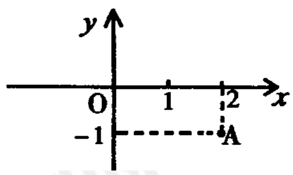


（A）$e_1=e_2<e_3$　　　　（B）$e_2=e_3<e_1$

（C）$e_1=e_2>e_3$　　　　（D）$e_2=e_3>e_1$

第二部分（非选择题 共 110 分）

二、填空题共 6 小题，每小题 5 分，共 30 分。

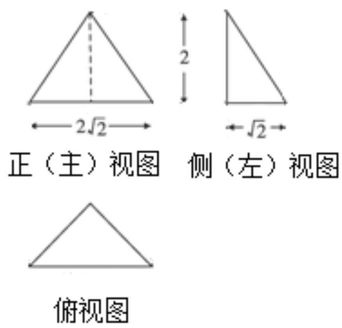


（9）如图所示，在复平面内，点 A 对应的复数为 z，则复数 $z=$_____.

（10）若函数 $f(x)=a+\sin x$ 在区间 $[\pi,2\pi]$ 上有且只有一个零点，则实数 $a=$_____.

（11）已知双曲线 $x^2-\dfrac{y^2}{b^2}=1(b>0)$ 的虚轴长是实轴长的 2 倍，则实数 $b=$__________.

（12）已知一个三棱锥的三视图如图所示，其中俯视图是等腰直角三角形，则该三棱锥的四个面中，最大面积为________.



（13）已知数列$\{a_n\}$满足$a_1=1$，$a_2=-2$，且$a_{n+1}=a_n+a_{n+2}$，$n\in\mathbf{N}^*$，则$a_5=$________；数列$\{a_n\}$的前2016项的和为________.

（14）一名顾客计划到某商场购物，他有三张商场的优惠券，商场规定每购买一件商品只能使用一张优惠券．根据购买商品的标价，三张优惠券的优惠方式不同，具体如下：

优惠券A：若商品标价超过50元，则付款时减免标价的10%；

优惠券B：若商品标价超过100元，则付款时减免20元；

优惠券C：若商品标价超过100元，则付款时减免超过100元部分的18%.

某顾客想购买一件标价为150元的商品，若想减免钱款最多，则应该 使用优惠券______（填A,B,C）；若顾客想使用优惠券C，并希望比优惠券A和B减免的钱款都多， 则他购买的商品的标价应高于________元.

三、解答题共6小题，共80分。解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程。

（15）（本小题共13分）

在△ABC中，角A，B，C所对的边分别是a，b，c，且$a^2=3bc$.

（Ⅰ）若$\sin A=\sin C$，求$\cos A$；

（Ⅱ）若$A=\dfrac{\pi}{4}$，且$a=3$，求△ABC的面积.

（16）（本小题共13分）

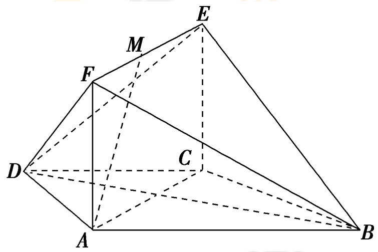
已知等差数列$\{a_n\}$满足$a_3=7$，$a_5+a_7=26$，其前n项和为S_n.

（□）求$\{a_n\}$的通项公式及S_n；

（□）令$b_n=\dfrac{1}{S_n-n}(n\in\mathbf{N}^*)$，求数列$\{b_n\}$的前8项和.

（17）（本小题共 14 分）

在梯形 $ABCD$ 中，$AB\ P\ CD$，$AD = DC = CB = a$，$\angle ABC = 60^{\circ}$．平面 $ACEF \perp$ 平面 $ABCD$，四边形 $ACEF$ 是矩形，$AF = a$，点 M 在线段 EF 上．



（Ⅰ）求证：$BC \perp AM$；

（Ⅱ）试问当 AM 为何值时，$AM\ P$ 平面 BDE？证明你的结论．

（Ⅲ）求三棱锥 $A-BFD$ 的体积．

（18）（本小题共 13 分）

某出租车公司响应国家节能减排的号召，已陆续购买了140辆纯电动汽车作为运营车辆．目前我国主流纯电动汽车按续航里程数 R（单位：公里）分为3类，即 A 类：$80 \le R < 150$，B 类：$150 \le R < 250$，C 类：$R \ge 250$．该公司对这140辆车的行驶总里程进行统计，结果如下表：

类型	A 类	B 类	C 类
已行驶总里程不超过10万公里的车辆数	10	40	30
已行驶总里程超过10万公里的车辆数	20	20	20

（Ⅰ）从这140辆汽车中任取一辆，求该车行驶总里程超过10万公里的概率；

（Ⅱ）公司为了了解这些车的工作状况，决定抽取14辆车进行车况分析，按表中描述的六种情况进行分层抽样，设从 C 类车中抽取了 n 辆车．

（ⅰ）求 n 的值；

（ⅱ）如果从这 n 辆车中随机选取两辆车，求恰有一辆车行驶总里程超过10万公里的概率．

（19）（本小题共 13 分）

已知椭圆 $C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\,(a>b>0)$ 与 y 轴交于 B_1,B_2 两点，F_1 为椭圆 C 的左焦点，且△$F_1B_1B_2$ 是边长为 2 等边三角形.

（Ⅰ）求椭圆 C 的方程；

（Ⅱ）设直线 $x=my+1$ 与椭圆 C 交于 P，Q 两点，点 P 关于 x 轴的对称点为 P_1（P_1 与 Q 不重合），则直线 P_1Q 与 x 轴是否交于一个定点？若是，请写出定点坐标，并证明你的结论；若不是，请说明理由.

（20）（本小题共 14 分）

设函数 $f(x)=\dfrac{a}{x}-x$，$a\in\mathbf{R}$.

（Ⅰ）若 $a=-1$，求 $f(x)$ 在区间 $[\dfrac{1}{2},3]$ 上的最大值；

（Ⅱ）设 $b\neq 0$，求证：当 $a=-1$ 时，过点 $P(b,-b)$ 有且只有一条直线与曲线 $y=f(x)$ 相切；

（Ⅲ）若对任意的 $x\in[\dfrac{1}{2},2]$，均有 $f(x)|x-1|\leq 1$ 成立，求 a 的取值范围.

北京市东城区 2015-2016 学年第二学期高三综合练习（二）

数学参考答案及评分标准 （文科）

一、选择题（本大题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分）

（1）A　　（2）C　　（3）D　　（4）A

（5）B　　（6）B　　（7）C　　（8）D

二、填空题（本大题共 6 小题，每小题 5 分，共 30 分）

（9）$2-\mathrm{i}$　　（10）1

（11）2　　（12）$2\sqrt{3}$

（13）2　0　　（14）B　225

注：两个空的填空题第一个空填对得 3 分，第二个空填对得 2 分.

三、解答题（本大题共 6 小题，共 80 分）

（15）（共 13 分）

解：（Ⅰ）由 $\sin A=\sin C$，得 $a=c$.

又 $a^2=3bc$，所以 $c=3b$.

由余弦定理可得 $\cos A=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\dfrac{b^2+9b^2-9b^2}{2b\times 3b}=\dfrac{1}{6}$.　　……………………6 分

（Ⅱ）由已知 $a^2=3bc$，且 $a=3$，

所以 $bc=3$.

故△ABC 的面积 $S=\dfrac{1}{2}bc\sin A=\dfrac{1}{2}\times 3\times\dfrac{\sqrt{2}}{2}=\dfrac{3}{4}\sqrt{2}$.　　…………………… 13 分

（16）（共 13 分）

解：（□）设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d，

由 $a_5+a_7=26$，得 $a_6=13$，

又 $a_6-a_3=3d=6$，解得 $d=2$.

所以 $a_n=a_3+(n-3)d=7+2(n-3)=2n+1$.

所以 $S_n=\dfrac{a_1+a_n}{2}\times n=\dfrac{3+2n+1}{2}\times n=n^2+2n$.　　……………………6 分

（□）由 $b_n=\dfrac{1}{S_n-n}$，得 $b_n=\dfrac{1}{n^2+n}=\dfrac{1}{n(n+1)}=\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1}$.

设$\{b_n\}$的前n项和为T_n，

则$T_8=(1-\frac{1}{2})+(\frac{1}{2}-\frac{1}{3})+(\frac{1}{3}-\frac{1}{4})+\cdots+(\frac{1}{8}-\frac{1}{9})=1-\frac{1}{9}=\frac{8}{9}$.

故数列$\{b_n\}$的前 8 项和为$\frac{8}{9}$.　　　　…………………… 13 分

（17）（共 14 分）

证明：（Ⅰ）由题意知，梯形$ABCD$为等腰梯形，且$AB=2a$，$AC=\sqrt{3}a$，

由$AB^2+BC^2=AC^2$，可知$AC\perp BC$.

又平面$ACEF\perp$平面$ABCD$，且平面$ACEF\cap$平面$ABCD=AC$，$BC\subset$平面$ABCD$，

所以$BC\perp$平面$ACEF$.

又$AM\subset$平面$ACEF$，

所以$BC\perp AM$.　　　　………………………5 分

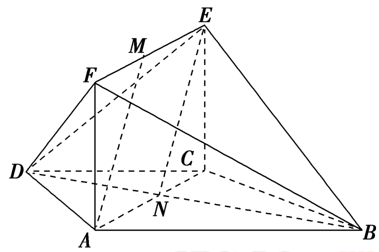
（Ⅱ）当$AM=\frac{2}{3}\sqrt{3}a$时，$AM\parallel$平面BDE.

证明如下：

当$AM=\frac{2}{3}\sqrt{3}a$，可得$FM=\frac{\sqrt{3}}{3}a$，故$EM=\frac{2}{3}\sqrt{3}a$

在梯形$ABCD$中，设$AC\cap BD=N$，连结EN，由已知可得$CN:NA=1:2$，

所以$AN=\frac{2}{3}\sqrt{3}a$.



所以$EM=AN$.

又$EM\parallel AN$，

所以四边形$ANEM$为平行四边形.

所以$AM\parallel NE$.

又$NE\subset$平面BDE，$AM\not\subset$平面BDE，

所以$AM\parallel$平面BDE.

当$AM=\frac{2}{3}\sqrt{3}a$时，$AM\parallel$平面BDE.　　　　…………………… 11 分

（Ⅲ）由已知可得$\triangle ABD$的面积$S=\frac{\sqrt{3}}{2}a^2$，

故$V_{A-BFD}=V_{F-ABD}=\frac{1}{3}\times AF\times S_{\triangle ABD}=\frac{1}{3}\times a\times\frac{\sqrt{3}}{2}a^2=\frac{\sqrt{3}}{6}a^3$.

………… 14 分

（18）（共 13 分）

解：（Ⅰ）从这 140 辆汽车中任取一辆，则该车行驶总里程超过10万公里的概率为

$P_1=\dfrac{20+20+20}{140}=\dfrac{3}{7}$． ……………………3 分

（Ⅱ）（ⅰ）依题意 $n=\dfrac{30+20}{140}\times 14=5$． ……………………6 分

（ⅱ）5辆车中已行驶总里程不超过10万公里的车有3辆，记为 a,b,c；

5辆车中已行驶总里程超过10万公里的车有2辆，记为 m,n．

“从5辆车中随机选取两辆车”的所有选法共10种：$ab,ac,am,an,bc,bm,bn,cm,cn,mn$．

“从5辆车中随机选取两辆车，恰有一辆车行驶里程超过10万公里”的选法共6种：am,an,bm,bn,cm,cn．

则选取两辆车中恰有一辆车行驶里程超过10万公里的概率 $P_2=\dfrac{6}{10}=\dfrac{3}{5}$． …………………… 13 分

（19）（共 13 分）

解：（Ⅰ）依题意可得 $2b=2$，且 $a^2=b^2+c^2=4$，

解得 $b=1$．

所以椭圆 C 的方程是 $\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$． …………………… 5 分

（Ⅱ）由 $\begin{cases}\dfrac{x^2}{4}+y^2=1,\\ x=my+1\end{cases}$ 消 x，得 $(m^2+4)y^2+2my-3=0$．

设 $P(x_1,y_1)$，$Q(x_2,y_2)$，则 $P_1(x_1,-y_1)$．

且 $y_1+y_2=-\dfrac{2m}{m^2+4}$，$y_1y_2=-\dfrac{3}{m^2+4}$．

经过点 $P_1(x_1,-y_1)$，$Q(x_2,y_2)$ 的直线方程为 $y+y_1=\dfrac{y_2+y_1}{x_2-x_1}(x-x_1)$．

令 $y=0$，则 $x=\dfrac{x_2-x_1}{y_2+y_1}y_1+x_1=\dfrac{(x_2-x_1)y_1+x_1(y_1+y_2)}{y_1+y_2}=\dfrac{x_2y_1+x_1y_2}{y_1+y_2}$．

又 $x_1=my_1+1,x_2=my_2+1$,

故当 $y=0$ 时，

$$x=\frac{(my_2+1)y_1+(my_1+1)y_2}{y_1+y_2}=\frac{2my_1y_2+(y_1+y_2)}{y_1+y_2}=\frac{-\frac{6m}{m^2+4}}{-\frac{2m}{m^2+4}}+1=3+1=4.$$

即直线 P_1Q 与 x 轴交于定点 $(4,0)$． ………………… 13 分

（20）（共 14 分）

解：（Ⅰ）当 $a=-1$ 时，$f(x)=-\frac{1}{x}-x$．

$$f'(x)=\frac{1}{x^2}-1=\frac{-(x-1)(x+1)}{x^2}.$$

令 $f'(x)=0$，得 $x=-1$ 或 $x=1$．

当 $x\in[\frac{1}{2},1)$，有 $f'(x)>0$，所以 $f(x)$ 在区间 $[\frac{1}{2},1)$ 上是增函数；

当 $x\in(1,3]$ 时，有 $f'(x)<0$，所以 $f(x)$ 在区间 $(1,3]$ 上是减函数；

所以 $f(x)$ 在区间 $[\frac{1}{2},3]$ 上的最大值为 $f(1)=-2$． …………………

5 分

（Ⅱ）设过点 $P(b,-b)$ 的直线与曲线 $y=f(x)$ 相切于点 $Q(x_0,y_0)$，

则 $y_0=-\frac{1}{x_0}-x_0$，且切线斜率为 $k=f'(x_0)=\frac{1}{x_0^{\ 2}}-1$．

所以 $\frac{y_0-(-b)}{x_0-b}=f'(x_0)$，即 $\frac{\frac{-1}{x_0}-x_0+b}{x_0-b}=\frac{1}{x_0^{\ 2}}-1$．

所以 $(\frac{-1}{x_0}-x_0+b)x_0^{\ 2}=(1-x_0^{\ 2})(x_0-b)$，解得 $x_0=\frac{b}{2}$．

即存在唯一的切点 $(\frac{b}{2},-\frac{2}{b}-\frac{b}{2})$．

所以过点 $P(b,-b)$ 有且只有一条直线与曲线 $y=f(x)$ 相切. ………………… 9 分

（Ⅲ）当 $x=1$ 时，对任意 $a\in\mathbf{R}$，不等式显然成立；

当 $x\neq1$ 时，不等式等价于 $a\le x^2+\frac{x}{|x-1|}$．

当 $x\in[\frac{1}{2},1)$ 时，不等式等价于 $a\le x^2+\frac{x}{1-x}$ 恒成立．

令 $g(x)=x^2+\dfrac{x}{1-x}$， $x\in[\dfrac{1}{2},1)$，

则 $g'(x)=2x+\dfrac{1}{(x-1)^2}$，当 $x\in[\dfrac{1}{2},1)$时，显然 $g'(x)>0$，

所以 $g(x)$ 在区间 $[\dfrac{1}{2},1)$ 上单调递增，

所以 $g(x)$ 在区间 $[\dfrac{1}{2},1)$ 上有最小值 $g(\dfrac{1}{2})=\dfrac{5}{4}$.

所以 $a\le\dfrac{5}{4}$.

当 $x\in(1,2]$时，不等式等价于 $a\le x^2+\dfrac{x}{x-1}$ 恒成立.

令 $h(x)=x^2+\dfrac{x}{x-1}$， $x\in(1,2]$，

当 $x\in(1,2]$时， $h(x)=x^2+\dfrac{x}{x-1}=x^2+1+\dfrac{1}{x-1}>x^2+1>2$，

所以，当 $a\le\dfrac{5}{4}$时，不等式 $a\le x^2+\dfrac{x}{x-1}$ 对 $x\in(1,2]$恒成立.

综上，实数 a 的取值范围是 $(-\infty,\dfrac{5}{4}]$. …………………… 14 分