北京市朝阳区高三年级第二次综合练习

数学试卷（文史类）　　2016.5

（考试时间 120 分钟　满分 150 分）

本试卷分为选择题（共 40 分）和非选择题（共 110 分）两部分

第一部分（选择题　共 40 分）

一、选择题：本大题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分．在每小题给出的四个选项中，选出符合题目要求的一项.

1. 已知集合 $A=\{0,1,2\}$，$B=\{x|x(x-2)<0\}$，则 $A\cap B=$

A．$\{0,1,2\}$　　B．$\{1,2\}$　　C．$\{0,1\}$　　D．$\{1\}$

2. 复数 $z=\dfrac{1+\mathrm{i}}{\mathrm{i}}$（i 为虚数单位）在复平面内对应的点位于

A．第一象限　　B．第二象限　　C．第三象限　　D．第四象限

3.设 $x\in\mathbf{R}$,且 $x\neq 0$,“$(\dfrac{1}{2})^x>1$”是“$\dfrac{1}{x}<1$”的

A．充分而不必要条件　　B．必要而不充分条件

C．充分必要条件　　D．既不充分也不必要条件

4. 已知 m，n，l 为三条不同的直线，α，β，γ 为三个不同的平面，则下列命题中正确的是

A．若 $m\perp l$，$n\perp l$，则 $m/\!/n$　　B．若 $m/\!/\alpha$，$n/\!/\alpha$，则 $m/\!/n$

C．若 $m\perp\alpha$，$n\perp\alpha$，则 $m/\!/n$　　D．若 $\alpha\perp\gamma$，$\beta\perp\gamma$，则 $\alpha/\!/\beta$

5. 同时具有性质:“①最小正周期是 π；②图象关于直线 $x=\dfrac{\pi}{3}$ 对称；③在区间 $\left[\dfrac{5\pi}{6},\pi\right]$ 上是单调递增函数”的一个函数可以是

A．$y=\cos\left(2x-\dfrac{\pi}{3}\right)$　　B．$y=\sin\left(2x-\dfrac{\pi}{6}\right)$

C．$y=\sin\left(2x+\dfrac{5\pi}{6}\right)$　　D．$y=\sin\left(\dfrac{x}{2}+\dfrac{\pi}{6}\right)$

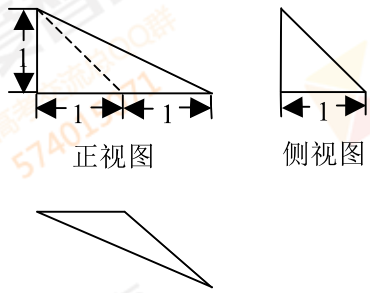
6. 已知某三棱锥的三视图如图所示，则该三棱锥的最长棱的长是

A. $\sqrt{6}$

B. $\sqrt{5}$

C. 2

D. $\sqrt{2}$



7.设函数 $f(x)=\begin{cases} x-1, & x\le 2, \\ 2+\log_a x, & x>2 \end{cases}$ $(a>0$ 且 $a\ne 1)$ 的最大值为 1,则实数 a 的取值范围是

A. $[\frac{1}{2},1)$　　B. $(0,1)$　　C. $(0,\frac{1}{2}]$　　D. $(1,+\infty)$

8.在边长为 1 的正方形 $ABCD$ 中，已知 M 为线段 AD 的中点，P 为线段 AD 上的一点，若线段 $BP=CD+PD$，则

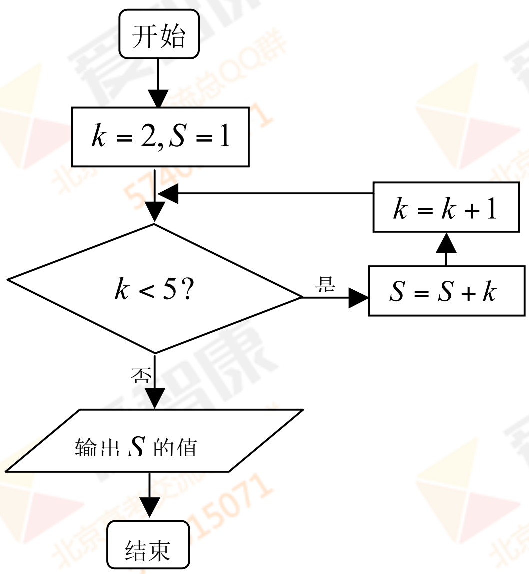
A. $\angle MBA=\frac{3}{4}\angle PBC$　　B. $\angle MBA=\frac{2}{3}\angle PBC$

C. $\angle MBA=\frac{1}{2}\angle PBC$　　D. $\angle MBA=\frac{1}{3}\angle PBC$

第二部分（非选择题 共 110 分）

二、填空题：本大题共 6 小题，每小题 5 分，共 30 分.把答案填在答题卡上.

9.执行如图所示的程序框图，输出的 $S=$______.



10. 已知向量 $\boldsymbol{a}=(1,2)$，向量 $\boldsymbol{b}=(2,m)$，若 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 垂直，则实数 m 的值为____.

11.已知过点 $M(1,1)$ 的直线 l 与圆 $(x+1)^2+(y-2)^2=5$ 相切，且与直线 $ax+y-1=0$ 垂直，则实数 $a=$___；直线 l 的方程为__.

12. 在平面直角坐标系 xOy 中，抛物线 $y^2=8x$ 的准线 l 的方程是________；若双曲线 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的两条渐近线与直线 l 交于 M,N 两点，且 ΔMON 的面积为 8，则此双曲线的离心率为______.

13. 已知关于 x,y 的不等式组 $\begin{cases} x\ge 0, \\ y\ge x, \\ x+y\le 2, \\ 2x-y\ge k \end{cases}$ 所表示的平面区域 D 为三角形，则实数 k 的取值范围是________.

14. 为了响应政府推进“菜篮子”工程建设的号召，某经销商投资 60 万元建了一个蔬菜生产基地.第一年支出各种费用 8 万元，以后每年支出的费用比上一年多 2 万元.每年销售蔬菜的收入为 26 万元.设 $f(n)$ 表示前 n 年的纯利润（$f(n)$=前 n 年的总收入－前 n 年的总费用支出－投资额），则 $f(n)=$_（用 n 表示）；从第___ 年开始盈利.

三、解答题：本大题共 6 小题，共 80 分.解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程.

15. （本小题满分 13 分）

在　　　中，角 A，B，C 的对边分别是 a,b,c，已知 $\cos 2A=-\dfrac{1}{3}$，$c=\sqrt{3},\sin A=\sqrt{6}\sin C$.

(Ⅰ)求 a 的值；

(Ⅱ) 若角 A 为锐角，求 b 的值及　　　的面积.

16. （本小题满分 13 分）

某城市要建宜居的新城，准备引进优秀企业进行城市建设. 这个城市的甲区、乙区分别 对 6 个企业进行评估，综合得分情况如茎叶图所示.

（Ⅰ）根据茎叶图，分别求甲、乙两区引进企业得分的平均值；

（Ⅱ）规定 85 分以上（含 85 分）为优秀企业.

若从甲、乙两个区准备引进的优秀企业中各随机选取 1 个，求这两个企业得分的差的绝对值不超过 5 分的概率.

甲区企业		乙区企业
5 3	9	5 6
9 8 4	8	3 4 6
9	7	8

17. （本小题满分 13 分）

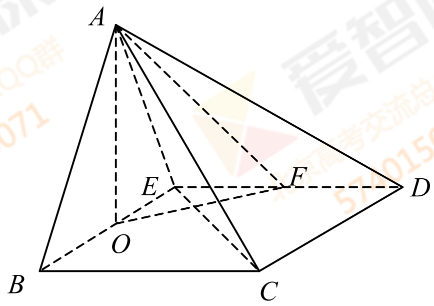
已知等差数列$\{a_n\}$的首项a_1和公差d $(d \neq 0)$均为整数，其前n项和为S_n.

(Ⅰ)若$a_1 = 1$，且a_2，a_4，a_9成等比数列，求数列$\{a_n\}$的通项公式；

(Ⅱ)若对任意$n \in \mathbf{N}^*$，且$n \neq 6$时，都有$S_n < S_6$，求a_1的最小值.

18. （本小题满分 14 分）

在四棱锥$A-BCDE$中，底面$BCDE$为菱形，侧面ABE为等边三角形，且侧面$ABE \perp$底面$BCDE$，O, F分别为BE, DE的中点.



（Ⅰ）求证：$AO \perp CD$；

（Ⅱ）求证：平面$AOF \perp$平面ACE；

（Ⅲ）侧棱AC上是否存在点P，使得$BP //$平面AOF？

若存在，求出$\dfrac{AP}{PC}$的值；若不存在，请说明理由.

19. （本小题满分 13 分）

已知函数$f(x) = ax - \dfrac{1}{x} - (a+1)\ln x$，$a \in \mathbf{R}$.

(Ⅰ)求函数$f(x)$的单调区间；

（Ⅱ）当$a \geq 1$时，若$f(x) > 1$在区间$[\dfrac{1}{\mathrm{e}}, \mathrm{e}]$上恒成立，求$a$的取值范围.

20. （本小题满分 14 分）

在平面直角坐标系xOy中，$P(x_0, y_0)(y_0 \neq 0)$是椭圆$C: \dfrac{x^2}{2\lambda^2} + \dfrac{y^2}{\lambda^2} = 1\ (\lambda > 0)$上的点，过点$P$的直线$l$的方程为$\dfrac{x_0 x}{2\lambda^2} + \dfrac{y_0 y}{\lambda^2} = 1$.

(Ⅰ)求椭圆C的离心率；

（Ⅱ）当$\lambda = 1$时，设直线l与x轴、y轴分别相交于A, B两点，求ΔOAB面积的最小值；

（Ⅲ）设椭圆C的左、右焦点分别为F_1，F_2，点Q与点F_1关于直线l对称，求证：

点 Q, P, F_2三点共线.

北京市朝阳区高三年级第二次综合练习

数学答案（文史类）　　2016.5

一、选择题：（满分 40 分）

题号	1	2	3	4	5	6	7	8
答案	D	D	A	C	B	A	A	C

二、填空题：（满分 30 分）

题号	9	10	11	12	13	14
答案	10	$-\frac{7}{2}$	$\frac{1}{2}$，$2x-y-1=0$	$x=-2,\sqrt{5}$	$(-\infty,-2]\cup[0,1)$	$-n^2+19n-60$，5

（注：两空的填空，第一空 3 分，第二空 2 分）

三、解答题：（满分 80 分）

15. （本小题满分 13 分）

解：(Ⅰ) 在　　中，因为 $\cos 2A=1-2\sin^2 A=-\frac{1}{3}$，

所以 $\sin A=\frac{\sqrt{6}}{3}$.

因为 $c=\sqrt{3},\sin A=\sqrt{6}\sin C$，由正弦定理 $\frac{a}{\sin A}=\frac{c}{\sin C}$，解得 $a=3\sqrt{2}$.

…………………6 分

(Ⅱ) 由 $\sin A=\frac{\sqrt{6}}{3},0<A<\frac{\pi}{2}$ 得 $\cos A=\frac{\sqrt{3}}{3}$.

由余弦定理 $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$，得 $b^2-2b-15=0$.

解得 $b=5$ 或 $b=-3$（舍）.

$S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{5\sqrt{2}}{2}$.　　…………………13 分

16. （本小题满分 13 分）

解：（Ⅰ）$\bar{x}_{甲}=\frac{79+84+88+89+93+95}{6}=88$，

$\bar{x}_{乙}=\frac{78+83+84+86+95+96}{6}=87$.　　…………………4 分

（Ⅱ）甲区优秀企业得分为 88,89,93,95 共 4 个，乙区优秀企业得分为 86,95,96 共 3 个.从两个区各选一个优秀企业，所有基本事件为（88,86），（88,95），（88,96），（89，86），（89,95），（89,96），（93,86），（93,95），（93,96）（95,86）（95,95）（95,96）共 12 个.

其中得分的绝对值的差不超过 5 分有（88,86），（89，86），（93,95），（93,96），（95,95），（95,96）共 6 个.

则这两个企业得分差的绝对值不超过 5 分的概率 $p=\frac{6}{12}=\frac{1}{2}$..........13 分

17. （本小题满分 13 分）

解：(Ⅰ)因为 a_2，a_4，a_9 成等比数列，所以 $a_4{}^2=a_2\cdot a_9$.

将 $a_1=1$ 代入得 $(1+3d)^2=(1+d)\cdot(1+8d)$,

解得 $d=0$ 或 $d=3$.

因为数列 $\{a_n\}$ 为公差不为零的等差数列，所以 $d=3$.

数列 $\{a_n\}$ 的通项公式 $a_n=1+(n-1)\cdot 3=3n-2$..................................6 分

（Ⅱ）因为对任意 $n\in\mathbf{N}^*$，$n\neq 6$ 时，都有 $S_n<S_6$，

所以 S_6 最大，则 $d<0$，$\begin{cases}S_6>S_7,\\ S_6>S_5.\end{cases}$

所以 $\begin{cases}a_7<0,\\ a_6>0.\end{cases}$ 则 $\begin{cases}a_1+6d<0,\\ a_1+5d>0.\end{cases}$

因此 $-5d<a_1<-6d$.

又 a_1，$d\in\mathbf{Z}$，$d<0$，

故当 $d=-1$ 时，$5<a_1<6$，此时 a_1 不满足题意.

当 $d=-2$ 时，$10<a_1<12$，则 $a_1=11$，

当 $d=-3$ 时，$15<a_1<18, a_1=16,17$，

易知 $d\le -3$ 时，$a_1\ge 16$，

则 a_1 的最小值为 11. ....13 分

18. （本小题满分 14 分）

解：（Ⅰ）因为 ΔABE 为等边三角形，

O 为 BE 的中点，

所以 $AO\perp BE$.

又因为平面 $ABE\perp$ 平面 $BCDE$，

平面 ABE I 平面 $BCDE=BE$，

$AO \subset$ 平面 ABE，

所以 $AO \perp$ 平面 $BCDE$.

又因为 $CD \subset$ 平面 $BCDE$，

所以 $AO \perp CD$. ……………………………………………………………4 分

（Ⅱ）连结 BD，因为四边形 $BCDE$ 为菱形，

所以 $CE \perp BD$.

因为 O, F 分别为 BE, DE 的中点，

所以 $OF // BD$，所以 $CE \perp OF$.

由（Ⅰ）可知，$AO \perp$ 平面 $BCDE$.

因为 $CE \subset$ 平面 $BCDE$，所以 $AO \perp CE$.

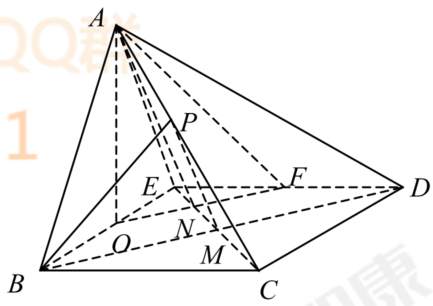
因为 $AO \cap OF = O$，所以 $CE \perp$ 平面 AOF .

又因为 $CE \subset$ 平面 ACE，

所以平面 $AOF \perp$ 平面 ACE . ……………………………………………………9 分

（Ⅲ）当点 P 为 AC 上的三等分点（靠近 A 点）时，$BP //$ 平面 AOF .

证明如下：



设 CE 与 BD, OF 的交点分别为 M, N，连结 AN, PM .

因为四边形 $BCDE$ 为菱形，O, F 分别为 BE, DE 的中点，

所以 $\dfrac{NM}{MC} = \dfrac{1}{2}$.

设 P 为 AC 上靠近 A 点的三等分点，

则 $\dfrac{AP}{PC} = \dfrac{NM}{MC} = \dfrac{1}{2}$，所以 $PM // AN$.

因为 $AN \subset$ 平面 AOF，$PM \not\subset$ 平面 AOF，所以 $PM //$ 平面 AOF .

由于 $BD // OF$，$OF \subset$ 平面 AOF，$BD \not\subset$ 平面 AOF，

所以 $BD //$ 平面 AOF，即 $BM //$ 平面 AOF .

因为 $BM \cap PM = M$，

所以平面 $BMP //$ 平面 AOF .

因为 $BP \subset$ 平面 BMP，所以 $BP //$ 平面 AOF .

可见侧棱 AC 上存在点 P，使得 $BP //$ 平面 AOF，且 $\dfrac{AP}{PC} = \dfrac{1}{2}$.

………………………………………………………………………………14 分

19. （本小题满分 13 分）

解：(Ⅰ) 函数 $f(x)$ 的定义域为 $\{x|x>0\}$, $f'(x)=\dfrac{ax^2-(a+1)x+1}{x^2}=\dfrac{(ax-1)(x-1)}{x^2}$.

（1） 当 $a\le 0$ 时， $ax-1<0$,

令 $f'(x)>0$，解得 $0<x<1$，则函数 $f(x)$ 的单调递增区间为 $(0,1)$

令 $f'(x)<0$，解得 $x>1$，函数 $f(x)$ 单调递减区间为 $(1,+\infty)$.

所以函数 $f(x)$ 的单调递增区间为 $(0,1)$，单调递减区间为 $(1,+\infty)$.

（2） 当 $0<a<1$ 时， $\dfrac{1}{a}>1$,

令 $f'(x)>0$，解得 $0<x<1$ 或 $x>\dfrac{1}{a}$，则函数 $f(x)$ 的单调递增区间为 $(0,1)$；

令 $f'(x)<0$，解得 $1<x<\dfrac{1}{a}$，函数 $f(x)$ 单调递减区间为 $(1,\dfrac{1}{a})$.

所以函数 $f(x)$ 的单调递增区间为 $(0,1)$，$(\dfrac{1}{a},+\infty)$，单调递减区间为 $(1,\dfrac{1}{a})$.

（3） 当 $a=1$ 时， $f'(x)=\dfrac{(x-1)^2}{x^2}\ge 0$ 恒成立，

所以函数 $f(x)$ 的单调递增区间为 $(0,+\infty)$.

（4） 当 $a>1$ 时， $0<\dfrac{1}{a}<1$,

令 $f'(x)>0$，解得 $0<x<\dfrac{1}{a}$ 或 $x>1$，则函数 $f(x)$ 的单调递增区间为 $(0,\dfrac{1}{a})$，$(1,+\infty)$；

令 $f'(x)<0$，解得 $\dfrac{1}{a}<x<1$，则函数 $f(x)$ 的单调递减区间为 $(\dfrac{1}{a},1)$.

所以函数 $f(x)$ 的单调递增区间为 $(0,\dfrac{1}{a})$，$(1,+\infty)$，单调递减区间为 $(\dfrac{1}{a},1)$.

…………………………………………………………………………7 分

(Ⅱ) 依题意，在区间 $[\dfrac{1}{e},e]$ 上 $f(x)_{\min}>1$.

$f'(x)=\dfrac{ax^2-(a+1)x+1}{x^2}=\dfrac{(ax-1)(x-1)}{x^2}$， $a\ge 1$.

令 $f'(x)=0$ 得，$x=1$ 或 $x=\frac{1}{a}$.

若 $a\ge \mathrm{e}$，则由 $f'(x)>0$ 得，$1<x\le \mathrm{e}$，函数 $f(x)$ 在 $(1,\mathrm{e})$ 上单调递增.

由 $f'(x)<0$ 得，$\frac{1}{\mathrm{e}}\le x<1$，函数 $f(x)$ 在 $(\frac{1}{\mathrm{e}},1)$ 上单调递减.

所以 $f(x)_{\min}=f(1)=a-1>1$，满足条件；

若 $1<a<\mathrm{e}$，则由 $f'(x)>0$ 得，$\frac{1}{\mathrm{e}}<x<\frac{1}{a}$ 或 $1<x<\mathrm{e}$；

由 $f'(x)<0$ 得，$\frac{1}{a}<x<1$.

函数 $f(x)$ 在 $(1,\mathrm{e}),(\frac{1}{\mathrm{e}},\frac{1}{a})$ 上单调递增，在 $(\frac{1}{a},1)$ 上单调递减.

$f(x)_{\min}=\min\{f(\frac{1}{\mathrm{e}}),f(1)\}$，

依题意 $\begin{cases} f(\frac{1}{\mathrm{e}})>1 \\ f(1)>1 \end{cases}$，即 $\begin{cases} a>\frac{\mathrm{e}^2}{\mathrm{e}+1} \\ a>2 \end{cases}$，所以 $2<a<\mathrm{e}$；

若 $a=1$，则 $f'(x)\ge 0$.

所以 $f(x)$ 在区间 $[\frac{1}{\mathrm{e}},\mathrm{e}]$ 上单调递增，$f(x)_{\min}=f(\frac{1}{\mathrm{e}})>1$，不满足条件；

综上，$a>2$. ……………………………………………13 分

20. （本小题满分 14 分）

解：(Ⅰ)依题 $a=\sqrt{2}\lambda$，$c=\sqrt{2\lambda^2-\lambda^2}=\lambda$，

所以椭圆 C 离心率为 $e=\frac{\lambda}{\sqrt{2}\lambda}=\frac{\sqrt{2}}{2}$ ……………………………………………3 分

(Ⅱ) 依题意 $x_0\ne 0$，令 $y=0$，由 $\frac{x_0x}{2}+y_0y=1$，得 $x=\frac{2}{x_0}$，则 $A(\frac{2}{x_0},0)$.

令 $x=0$，由 $\frac{x_0x}{2}+y_0y=1$，得 $y=\frac{1}{y_0}$，则 $B(0,\frac{1}{y_0})$.

则 ΔOAB 的面积 $S_{\Delta OAB}=\frac{1}{2}|OA||OB|=\frac{1}{2}\left|\frac{2}{x_0y_0}\right|=\frac{1}{|x_0y_0|}$.

因为 $P(x_0,y_0)$ 在椭圆 $C:\frac{x^2}{2}+y^2=1$ 上，所以 $\frac{x_0^{\ 2}}{2}+y_0^{\ 2}=1$.

所以 $1=\frac{x_0^{\ 2}}{2}+y_0^{\ 2}\ge 2\frac{|x_0y_0|}{\sqrt{2}}$，即 $|x_0y_0|\le\frac{\sqrt{2}}{2}$，则 $\frac{1}{|x_0y_0|}\ge\sqrt{2}$.

所以 $S_{\Delta OAB}=\frac{1}{2}|OA||OB|=\frac{1}{|x_0y_0|}\ge\sqrt{2}$.

当且仅当 $\frac{x_0^{\ 2}}{2}=y_0^{\ 2}$，即 $x_0=\pm1,y_0=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$ 时，ΔOAB 面积的最小值为 $\sqrt{2}$. ……………………………………………………………8 分

（III）由 $\frac{y_0^2}{\lambda^2}=1-\frac{x_0^2}{2\lambda^2}>0$，解得 $-\sqrt{2}\lambda<x_0<\sqrt{2}\lambda$.

①当 $x_0=0$ 时，$P(0,\lambda),Q(-\lambda,2\lambda)$,此时 $k_{F_2P}=-1$，$k_{F_2Q}=-1$.

因为 $k_{F_2Q}=k_{F_2P}$，所以三点 Q,P,F_2 共线.

当 $P(0,-\lambda)$ 时，也满足.

②当 $x_0\neq0$ 时，设 $Q(m,n)$，$m\neq-\lambda$，F_1Q 的中点为 M，则 $M(\frac{m-\lambda}{2},\frac{n}{2})$,代入直线 l 的方程，得：

$x_0m+2y_0n-x_0\lambda-4\lambda^2=0$.

设直线 F_1Q 的斜率为 k，则 $k=\frac{n}{m+\lambda}=\frac{2y_0}{x_0}$，

所以 $2y_0m-x_0n+2y_0\lambda=0$.

由 $\begin{cases}x_0m+2y_0n-x_0\lambda-4\lambda^2=0\\ 2y_0m-x_0n+2y_0\lambda=0\end{cases}$，解得 $m=\frac{2x_0^2\lambda+4x_0\lambda^2}{4y_0^2+x_0^2}-\lambda$，$n=\frac{4x_0y_0\lambda+8y_0\lambda^2}{4y_0^2+x_0^2}$.

所以 $Q(\frac{2x_0^2\lambda+4x_0\lambda^2}{4y_0^2+x_0^2}-\lambda,\frac{4x_0y_0\lambda+8y_0\lambda^2}{4y_0^2+x_0^2})$.

当点 P 的横坐标与点 F_2 的横坐标相等时，把 $x_0=\lambda$，$y_0^2=\frac{\lambda^2}{2}$ 代入 $m=\frac{2x_0^2\lambda+4x_0\lambda^2}{4y_0^2+x_0^2}-\lambda$ 中

得 $m=\lambda$，则 Q,P,F_2 三点共线.

当点 P 的横坐标与点 F_2 的横坐标不相等时，

直线 F_2P 的斜率为 $k_{F_2P}=\dfrac{y_0}{x_0-\lambda}$.

由 $-\sqrt{2}\lambda\le x_0\le\sqrt{2}\lambda$，$x_0\ne-2\lambda$.

所以直线 F_2Q 的斜率为 $k_{F_2Q}=\dfrac{\dfrac{4x_0y_0\lambda+8y_0\lambda^2}{4y_0^2+x_0^2}}{\dfrac{2{x_0}^2\lambda+4x_0\lambda^2}{4y_0^2+x_0^2}-2\lambda}=\dfrac{4x_0y_0\lambda+8y_0\lambda^2}{2{x_0}^2\lambda+4x_0\lambda^2-8y_0^2\lambda-2x_0^2\lambda}$

$=\dfrac{4x_0y_0\lambda+8y_0\lambda^2}{4x_0\lambda^2-8y_0^2\lambda}=\dfrac{x_0y_0+2y_0\lambda}{x_0\lambda-2y_0^2}=\dfrac{y_0(x_0+2\lambda)}{{x_0}^2+\lambda x_0-2\lambda^2}$

$=\dfrac{y_0(x_0+2\lambda)}{(x_0-\lambda)(x_0+2\lambda)}=\dfrac{y_0}{x_0-\lambda}$.

因为 $k_{F_2Q}=k_{F_2P}$，所以 Q,P,F_2 三点共线.

综上所述 Q,P,F_2 三点共线. ……………………………………………………………14 分