房山区 2015 年高三二模

数　学（文科）

本试卷共 4 页，150 分。考试时长 120 分钟。考生务必将答案答在答题卡上，在试卷上作答无效。

一、选择题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项。

（1）若集合 $A=\{x\,|-2\le x\le 1\}$，$B=\{x|x<0\}$，则 $A\cup B=$

（A）$(-\infty,0)$　（B）$(-\infty,1]$　（C）$[-2,0)$　（D）$(1,+\infty)$

（2）下列函数中，既是奇函数又在区间 $(0,+\infty)$ 上单调递增的是

（A）$y=x^3$　（B）$y=\ln x$

（C）$y=\sin x$　（D）$y=2^x$

（3）在△ABC 中，“$A=\frac{\pi}{3}$”是“$\cos A=\frac{1}{2}$”的

（A）充分而不必要条件　（B）必要而不充分条件

（C）充分必要条件　（D）既不充分也不必要条件

（4）若 x,y 满足 $\begin{cases}x-y\ge 0,\\ x+y\le 1,\\ y\ge 0.\end{cases}$ 则 $z=x+2y$ 的最大值为

（A）0　（B）1

（C）2　（D）$\frac{3}{2}$

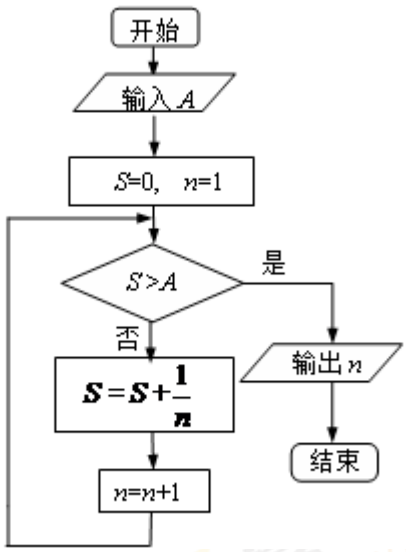
（5）执行如图所示的程序框图，若输入 A 的值为 2，则输出的 n 值为

（A）3

（B）4

（C）5

（D）6



（6）已知△ABC 外接圆的圆心为 O，且 $\overrightarrow{AO}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})$，则 $\overrightarrow{AB}$ 与 $\overrightarrow{AC}$ 的夹角为

（A）$\frac{\pi}{6}$　　（B）$\frac{\pi}{4}$　　（C）$\frac{\pi}{3}$　　（D）$\frac{\pi}{2}$

（7）直线 $y=kx+3$ 被圆 $(x-2)^2+(y-3)^2=4$ 截得的弦长为 $2\sqrt{3}$，则 $k=$

（A）$\pm\frac{\sqrt{3}}{3}$　　（B）$\pm\sqrt{3}$　　（C）$\frac{\sqrt{3}}{3}$　　（D）$\sqrt{3}$

（8）为促进资源节约型和环境友好型社会建设，引导居民合理用电、节约用电，北京居民生活用电试行阶梯电价. 其电价标准如下表：

用户	类别	分档电量（千瓦时/户.月）	电价标准（元/千瓦时）
试行阶梯电价的用户	一档	1-240（含）	0.4883
	二档	241-400（含）	0.5383
	三档	400 以上	0.7883

北京市某户居民 2016 年 1 月的平均电费为 0.4983（元/千瓦时），则该用户 1 月份的用电量为

（A）350 千瓦时　　（B）300 千瓦时　　（C）250 千瓦时　　（D）200 千瓦时

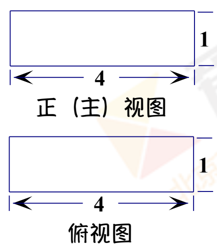
二、填空题共 6 小题，每小题 5 分，共 30 分。

（9）若 $(a-2\mathrm{i})\mathrm{i}=b-\mathrm{i}$，其中 $a,b\in\mathbf{R}$，i 是虚数单位，则 $a^2+b^2=$___.

（10）为了调查野生动物保护区内某种野生动物的数量，调查人员某天捕到这种动物 120 只，做好标记后放回，经过一星期后，又捕到这种动物 100 只，其中做过标记的有 8 只，按概率方法估算，该保护区内有___只这种动物.

（11）$f(x)=\begin{cases}-\frac{3}{x}, & x<0,\\ 1+\log_3 x, & x>0.\end{cases}$ 则 $f(f(-1))$ 等于___.

（12）某几何体的正（主）视图和俯视图如图所示，则该几何体的体积的最大值为___.



（13）抛物线 $x^2=4y$ 的焦点 F 的坐标为___，过 F 的直线与抛物线交于 A,B 两点，若线段 AB 的中点 M 的纵坐标为 4，则线段 AB 的长度为___.

（14）观察下面的数表

2
4　6
8　10　12　14
16　18　20　22　24　26　28　30
……

该表中第 6 行最后一个数是___；设 2016 是该表的 m 行第 n 个数，则 $m+n=$___.

三、解答题共 6 小题，共 80 分。 解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程。

（15）（本小题 13 分）

已知函数 $f(x)=\sqrt{3}\cos(\frac{\pi}{2}-x)+2\cos^2\frac{x}{2}$.

（Ⅰ）求 $f(\frac{\pi}{3})$ 的值和 $f(x)$ 的最小正周期；

（Ⅱ）求 $f(x)$ 在 $[0,\pi]$ 上的取值范围.

（16）（本小题 13 分）

已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 $S_n=-n^2+26n$.

（Ⅰ）求 $\{a_n\}$ 的通项公式；

（Ⅱ）求 $a_2+a_5+a_8+\cdots+a_{3n-1}$ 的值.

（17）（本小题 13 分）

随着 2022 年北京冬奥会的成功申办，冰雪项目已经成为北京市民冬季休闲娱乐的重要方式．为普及冰雪运动，寒假期间学校组织高一年级学生参加冬令营．其中一班有 3 名男生和 1 名女生参加，二班有 1 名男生和 2 名女生参加．活动结束时，要从参加冬令营的学生中选出 2 名进行展示.

（Ⅰ）若要从一班和二班参加冬令营的学生中各任选 1 名，求选出的 2 名学生性别相同的概率；

（Ⅱ）若要从参加冬令营的这 7 名学生中任选 2 名，求选出的 2 名学生来自不同班级且性别不同的概率.

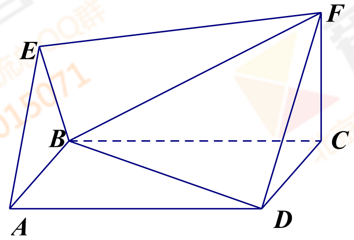
（18）（本小题 14 分）

如图，等腰直角三角形 ABE 与正方形 $ABCD$ 所在的平面互相垂直，$AE \perp BE$，$AB=2$，$FC \perp$ 平面 $ABCD$，且 $FC=1$.

（Ⅰ）求证：$AB \perp$ 平面BCF；

（Ⅱ）求证：$EF //$ 平面 $ABCD$；

（Ⅲ）求点 C 到平面 BDF 的距离.



（19）（本小题 13 分）

已知函数 $f(x)=x+\dfrac{1}{e^x}$.

（Ⅰ）求函数 $f(x)$的单调区间；

（Ⅱ）若直线 $y=kx$ 与曲线 $y=f(x)$没有公共点，求实数 k 的取值范围.

（20）（本小题 14 分）

已知椭圆 C：$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\ (a>b>0)$，点 $A(-4,0)$，$B(0,2)$和点 $P(m,n)\ (m \neq 0)$ 都在椭圆 C 上，$BP \perp AB$，且直线 BP 与 x 轴交于点 M.

（Ⅰ）求椭圆 C 的标准方程和离心率；

（Ⅱ）求点 P 的坐标；

（Ⅲ）若以 M 为圆心、r 为半径的圆在椭圆 C 的内部，求 r 的取值范围.

房山区高考二模

数学（文）答案及评分标准 201604

一、选择题：本大题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分.

题号	1	2	3	4	5	6	7	8
答案	B	A	C	D	C	D	A	B

二、填空题：每小题 5 分，共 30 分．（第一空 3 分，第二空 2 分）

9. 5　　**10.** 1500　　**11.** 2

12. 4　　**13.** (0,1)　10　　**14.** 126,　507

三、解答题：本大题共 6 小题，共 80 分.

15（共 13 分）

解：$f(x)=\sqrt{3}\cos(\frac{\pi}{2}-x)+2\cos^2\frac{x}{2}=\sqrt{3}\sin x+\cos x+1$…………………4 分

$=2\sin(x+\frac{p}{6})+1$ …………………6 分

（Ⅰ）$f(\frac{\pi}{3})=2\sin(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{6})+1=3$ …………………8 分

$f(x)$ 的最小正周期为 2π …………………9 分

（Ⅱ）因为 $x\in[0,\pi]$，　所以 $x+\frac{\pi}{6}\in[\frac{\pi}{6},\frac{7\pi}{6}]$

所以　$\sin(x+\frac{\pi}{6})\in[-\frac{1}{2},1]$

所以　$2\sin(x+\frac{\pi}{6})+1\in[0,3]$　即 $f(x)\in[0,3]$

………………………………13 分

16（共 13 分）

解：（Ⅰ）当 $n=1$ 时，　$a_1=25$ ………………2 分

当 $n\geq 2$ 时，　$a_n=S_n-S_{n-1}=(-n^2+26n)-(-n^2+26n)=-2n+27$ …………4 分

$a_1=25$ 也满足上式 ………………5 分

所以 $\{a_n\}$ 的通项公式 $a_n=-2n+27$ ················6 分

（Ⅱ）由（Ⅰ）知 $a_2=23$，$a_{3n-1}=-2(3n-1)+27=-6n+29$ ······8 分

所以 $\{a_{3n-1}\}$ 是首项为 23，公差为-6 的等差数列 ················10 分

所以 $a_2+a_5+a_8+\cdots+a_{3n-1}=\dfrac{(23-6n+29)n}{2}=-3n^2+26n$

································13 分

17（共 13 分）

解：一班的 3 名男生记作 A_1,A_2,A_3，1 名女生记作 B；二班的 1 名男生记作 a，2 名女生记作 b_1,b_2

（Ⅰ）从一班和二班的学生中各任选 1 名的所有可能结果为

(A_1,a)，(A_1,b_1)，(A_1,b_2)，(A_2,a)，(A_2,b_1)，(A_2,b_2)，(A_3,a)，(A_3,b_1)，(A_3,b_2)，(B,a)，(B,b_1)，(B,b_2)，共 12 种情况···········2 分

其中 2 名学生性别相同的情况有 (A_1,a)，(A_2,a)，(A_3,a)，(B,b_1)，(B,b_2)，共 5 种 ·················4 分

所以 所求概率为 $\dfrac{5}{12}$ ·································6 分

（Ⅱ）从 7 名学生中任选 2 名学生的所有可能的情形为

(A_1,A_2)，(A_1,A_3)，(A_1,B)，(A_1,a)，(A_1,b_1)，(A_1,b_2)，(A_2,A_3)，(A_2,B)，(A_2,a)，(A_2,b_1)，(A_2,b_2)，(A_3,B)，(A_3,a)，(A_3,b_1)，(A_3,b_2)，(B,a)，(B,b_1)，(B,b_2)，(a,b_1)，(a,b_2)，(b_1,b_2) 共 21 种情况．················9 分

2 名学生来自不同班级且性别不同的有 (A_1,b_1)，(A_1,b_2)，(A_2,b_1)，(A_2,b_2)，(A_3,b_1)，(A_3,b_2)，(B,a)，共 7 种情况．················11 分

故所求概率为 $\dfrac{7}{21}=\dfrac{1}{3}$ ························13 分

18（共 14 分）

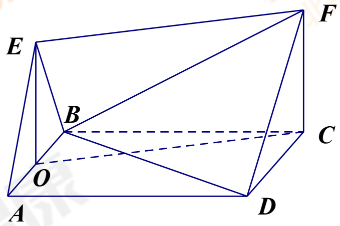
（Ⅰ）因为 $FC\perp$ 平面 $ABCD$，$AB\subset$ 平面 $ABCD$

所以 $FC\perp AB$ ·············2 分

因为 $ABCD$ 为正方形，所以 $AB\perp BC$

所以 $AB\perp$ 平面 BCF

························4 分



（Ⅱ）设 AB 中点为 O，连结 EO,OC

因为 ABE 为斜边长为 2 等腰直角三角形

所以 $EO\perp AB$ 且 $EO=1$ ·····················5 分

因为 平面 $ABE\perp$ 平面 $ABCD$　平面 $ABE\cap$ 平面 $ABCD=AB$

所以 $EO\perp$ 平面 $ABCD$ ···················6 分

又 $FC \perp$ 平面 $ABCD$

所以 EO P FC 且 $EO = FC = 1$ ……………………7 分

所以 $EOCF$ 为平行四边形 所以 EF P OC ……………………8 分

又 $EF \not\subset$ 平面 $ABCD$，$OC \subset$ 平面 $ABCD$

所以 $EF //$ 平面 $ABCD$；

……………………………………9 分

（III）在直角三角形 BCF, DCF 中 $BC = DC = 2, FC = 1$ 所以 $BF = DF = \sqrt{5}$

在正方形 $ABCD$ 中 $BD = 2\sqrt{2}$

所以 $S_{\Delta BDF} = \dfrac{1}{2} \times 2\sqrt{2} \times \sqrt{5-2} = \sqrt{6}$ ……………………11 分

设 点 C 到平面 BDF 的距离 h

由 $V_{F-BCD} = V_{C-BDF}$

$\dfrac{1}{3} \times \dfrac{1}{2} \times BC \times DC \times FC = \dfrac{1}{3} S_{\Delta BDF} h$ ……………………13 分

解得 $h = \dfrac{\sqrt{6}}{3}$

……………………………………14 分

19（共 13 分）

解（I）$f'(x) = 1 - \dfrac{1}{e^x} = \dfrac{e^x - 1}{e^x}$ ……………………2 分

令 $f'(x) = 0$ 得 $x = 0$

$x, f(x), f'(x)$ 变化情况

x	$(-\infty, 0)$	0	$(0, +\infty)$
$f'(x)$	$-$		$+$
$f(x)$	减		增

所以 函数 $f(x)$ 在区间 $(\quad ,0)$ 为减函数，在区间 $(0, \quad)$ 为增函数

……………………………5 分

（II）解法一：直线 $y = kx$ 与曲线 $y = f(x)$ 没有公共点，等价于

方程 $kx = x + \dfrac{1}{e^x}$ 无实数解，即 $(k-1)x = \dfrac{1}{e^x}$ 无实数解

当 $k = 1$ 时，显然方程无实数解； ……………………6 分

当 $k \neq 1$ 时，方程变形为 $\dfrac{1}{k-1} = xe^x$，

设 $g(x) = xe^x$ 则 $g'(x) = e^x + xe^x = e^x(x+1)$ ……………………7 分

令 $g'(x) = 0$ 得 $x = -1$

在区间 $(-\infty, -1)$ 上 $g'(x) < 0$，在区间 $(\ 1, \quad)$ 上 $g'(x) > 0$

所以 $g(x)$ 在区间 (-キ, 1) 上单调递减，$g(x)$ 在区间 $(-1, +\infty)$ 上单调递增

……………………………………9 分

所以，当 $x=-1$ 时， $g(x)$ 取得最小值 $g(-1)=-\frac{1}{e}$ ……………10 分

要使方程 $\frac{1}{k-1}=xe^x$ 无实根，只需 $\frac{1}{k-1}<-\frac{1}{e}$ ……………11 分

解得 $1-e<k<1$ ……………………………………13 分

综上 k 的取值范围为 $(1-e,1]$

解法二：直线 $y=kx$ 与曲线 $y=f(x)$ 没有公共点，等价于

方程 $kx=x+\frac{1}{e^x}$ 无实数解， $x=0$ 不是该方程的解，所以等价

方程 $k=1+\frac{1}{xe^x}$ 无解

设 $g(x)\quad 1\quad \frac{1}{xe^x}(x\quad 0)$ 则 $g'(x)=-\frac{e^x+xe^x}{x^2e^{2x}}=-\frac{e^x(1+x)}{x^2e^{2x}}=-\frac{(1+x)}{x^2e^x}$

令 $g'(x)=0$ 得 $x=-1$

在区间 $(-\infty,-1)$ 上 $g'(x)>0$，

在区间 $(-1,0)$ 上 $g'(x)<0$，在区间 $(0,\quad)$ 上 $g'(x)<0$

所以 $g(x)$ 在 $(-\infty,-1)$ 上递增，在 $(-1,0)$ 上递减，在 $(0,+\infty)$ 上递减

所以，当 $x=-1$ 时， $g(x)$ 取得极大值 $g(-1)=1-e$

当 x 无限增大时， $g(x)$ 无限趋近于 1

所以 $g(x)$ 的值域为 $(-\infty,1-e]\cup(1,+\infty)$

方程 $k=1+\frac{1}{xe^x}$ 无解，则 k 的取值范围为 $(1-e,1]$

解法三：

因为直线 $y=kx$ 与曲线 $y=f(x)$ 没有公共点，

所以方程 $kx=x+\frac{1}{e^x}$，即 $(k-1)x=\frac{1}{e^x}$ 无实数解

所以直线 $y=(k-1)x$ 与曲线 $h(x)=\frac{1}{e^x}$ 没有公共点，

设过点 $O(0,0)$ 的直线 l 与曲线 $h(x)=e^x$ 相切于点 $(x_0,\frac{1}{e^{x_0}})$

因为 $h'(x)=-\frac{1}{e^x}$，所以直线 l 的斜率 $k_0=-\frac{1}{e^{x_0}}$

所以直线 l 的方程为 $y-\frac{1}{e^{x_0}}=-\frac{1}{e^{x_0}}(x-x_0)$

因为直线 l 过点 $O(0,0)$，所以 $x_0=-1$，所以 $k_0=-\frac{1}{e^{-1}}=-e$

因为直线 $y=(k-1)x$ 与曲线 $h(x)=\frac{1}{e^x}$ 无交点

所以 $-e<k-1\le 0$，即 $1-e<k\le 1$

20（共 14 分）

解：（Ⅰ）易知 $a=4,b=2$　所以 $c=\sqrt{a^2-b^2}=2\sqrt{3}$

所以椭圆 C 的标准方程是 $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{4}=1$；……………………………2 分

离心率为 $e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{3}}{2}$ ……………………………4 分

（Ⅱ）易知 $k_{AB}=\frac{1}{2}$ ……………………………5 分

因为 $AB\perp BP$，所以 $k_{BP}=-2$ ……………………………6 分

所以 BP 的方程为 $y=-2x+2$ ……………………………7 分

所以 $\begin{cases} n=-2m+2 \\ \frac{m^2}{16}+\frac{n^2}{4}=1 \end{cases}$　解得 $\begin{cases} m=\frac{32}{17} \\ n=-\frac{30}{17} \end{cases}$ 或 $\begin{cases} m=0 \\ n=0 \end{cases}$（舍）

所以点 P 的坐标为 $(\frac{32}{17},-\frac{30}{17})$ ……………………………………9 分

（Ⅲ）直线 BP 的方程为 $y=-2x+2$

令 $y=0$，得 $x=1$　所以点 M 的坐标为 $(1,0)$ ……………………………10 分

以 M 为圆心，为 r 半径的圆在椭圆 C 的内部，等价于 r 小于椭圆 C 的点到点 M 的最小值.

设点 $Q(x,y)(-4\le x\le 4)$ 为椭圆 C 上任意一点

则 $|MQ|=\sqrt{(x-1)^2+y^2}=\sqrt{(x-1)^2+4-\frac{x^2}{4}}=\sqrt{\frac{3}{4}(x-\frac{4}{3})^2+\frac{11}{3}}\ge\frac{\sqrt{33}}{3}$

所以 r 的取值范围是 $(0,\frac{\sqrt{33}}{3})$

……………………………………14 分