北京市西城区 2016 年高三二模试卷

数　　学（文科）

2016.5

第 I 卷（选择题　共 40 分）

一、选择题：本大题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分．在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项．

1. 设全集 $U=\mathbf{R}$，集合 $A=\{x\mid x>0\}$，$B=\{x\mid x<1\}$，则集合 $(\complement_U A)\cap B=$（　　）

（A）$(-\infty,0)$　　（B）$(-\infty,0]$

（C）$(1,+\infty)$　　（D）$[1,+\infty)$

2. 下列函数中，既是奇函数又在 $\mathbf{R}$ 上单调递减的是（　　）

（A）$y=\dfrac{1}{x}$　　（B）$y=\mathrm{e}^{-x}$

（C）$y=-x^3$　　（D）$y=\ln x$

3. 设 x，y 满足约束条件 $\begin{cases} y\leqslant 2x, \\ x+y\leqslant 1, \\ y+1\geqslant 0, \end{cases}$ 则 $z=x+3y$ 的最大值是（　　）

（A）$\dfrac{4}{3}$　　（B）$\dfrac{7}{3}$

（C）$-\dfrac{1}{3}$　　（D）1

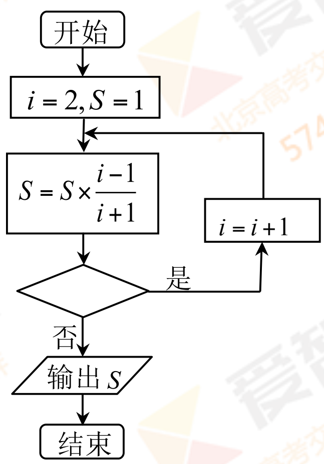
4．执行如图所示的程序框图，如果输出的 $S=\dfrac{1}{15}$，那么判断框内应填入的条件是（　　）

（A）$i<3$

（B）$i<4$

（C）$i<5$

（D）$i<6$



5. 在ΔABC中，角A,B,C所对的边分别为a,b,c. 若$\sin(A+B)=\frac{1}{3}$，$a=3$，$c=4$，则$\sin A=$（　　）

（A）$\frac{2}{3}$　　　　（B）$\frac{1}{4}$

（C）$\frac{3}{4}$　　　　（D）$\frac{1}{6}$

6. “$m>n>0$”是“曲线$mx^2+ny^2=1$为焦点在x轴上的椭圆”的（　　）

（A）充分而不必要条件　　　　（B）必要而不充分条件

（C）充分必要条件　　　　（D）既不充分也不必要条件

7.某市家庭煤气的使用量 x（m^3）和煤气费 $f(x)$(元) 满足关系 $f(x)=\begin{cases} C, & 0<x\leqslant A, \\ C+B(x-A), & x>A. \end{cases}$ 已知某家庭今年前三个月的煤气费如下表：

月份	用气量	煤气费
一月份	4 m^3	4 元
二月份	25 m^3	14 元
三月份	35 m^3	19 元

若四月份该家庭使用了 20 m^3 的煤气，则其煤气费为（　　）

（A）11.5 元　　　　（B）11 元

（C）10.5 元　　　　（D）10 元

8. 设直线l：$3x+4y+a=0$，圆C: $(x-2)^2+y^2=2$，若在直线l上存在一点M，使得过M的圆C的切线MP，MQ（P,Q为切点）满足$\angle PMQ$ 90°，则a的取值范围是（　　）

（A）$[-18,6]$　　　　（B）$[6-5\sqrt{2},6+5\sqrt{2}]$

（C）$[-16,4]$　　　　（D）$[-6-5\sqrt{2},-6+5\sqrt{2}]$

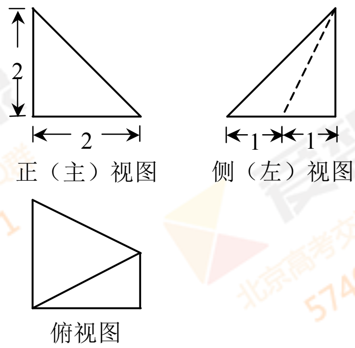
第 II 卷（非选择题　共 110 分）

二、填空题：本大题共 6 小题，每小题 5 分，共 30 分．

9. 已知复数 $z=(2-\mathrm{i})(1+\mathrm{i})$，则在复平面内，$z$ 对应点的坐标为_____.

10. 设平面向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 满足 $|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|=2$，$\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=7$，则向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 夹角的余弦值为_____.

11. 某四棱锥的三视图如图所示，该四棱锥最长棱的棱长为_____.



12．设双曲线 C 的焦点在 x 轴上，渐近线方程为 $y=\pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}x$，则其离心率为____；若点 $(4,2)$ 在 C 上，则双曲线 C 的方程为____.

13. 设函数 $f(x)=\begin{cases}2^{-x}, & x<1,\\ \log_2 x, & x\geqslant 1,\end{cases}$ 那么 $f[f(-\dfrac{1}{2})]=$____；若函数 $y=f(x)-k$ 有且只有两个零点，则实数 k 的取值范围是_____.

14. 在某中学的“校园微电影节”活动中，学校将从微电影的“点播量”和“专家评分”两个角度来进行评优. 若 A 电影的“点播量”和“专家评分”中至少有一项高于 B 电影，则称 A 电影不亚于 B 电影. 已知共有 5 部微电影参展，如果某部电影不亚于其他 4 部，就称此部电影为优秀影片. 那么在这 5 部微电影中，最多可能有____部优秀影片.

三、解答题：本大题共 6 小题，共 80 分．解答应写出必要的文字说明、证明过程或演算步骤．

15．（本小题满分 13 分）

已知函数 $f(x)=(1+\sqrt{3}\tan x)\cos^2 x$．

（Ⅰ）求函数 $f(x)$ 的定义域和最小正周期；

（Ⅱ）当 $x\in(0,\dfrac{\pi}{2})$时，求函数 $f(x)$ 的值域．

16．（本小题满分 13 分）

已知数列 $\{a_n\}$的前 n 项和 S_n 满足 $4a_n-3S_n=2$，其中 $n\in\mathbf{N}^*$．

（Ⅰ）求证：数列 $\{a_n\}$为等比数列；

（Ⅱ）设 $b_n=\dfrac{1}{2}a_n-4n$，求数列 $\{b_n\}$的前 n 项和 T_n．

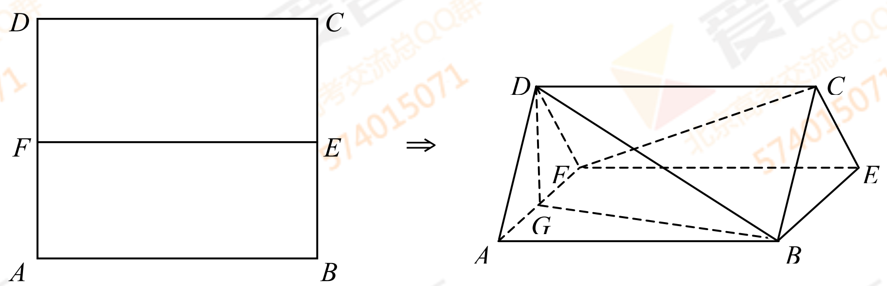
17．（本小题满分 14 分）

如图，在周长为 8 的矩形 $ABCD$ 中，E,F 分别为 BC,DA 的中点．将矩形 $ABCD$ 沿着线段 EF 折起，使得 $\angle DFA=60^\circ$．设 G 为 AF 上一点，且满足 $CF//$ 平面 BDG．

（Ⅰ）求证：$EF\perp DG$；

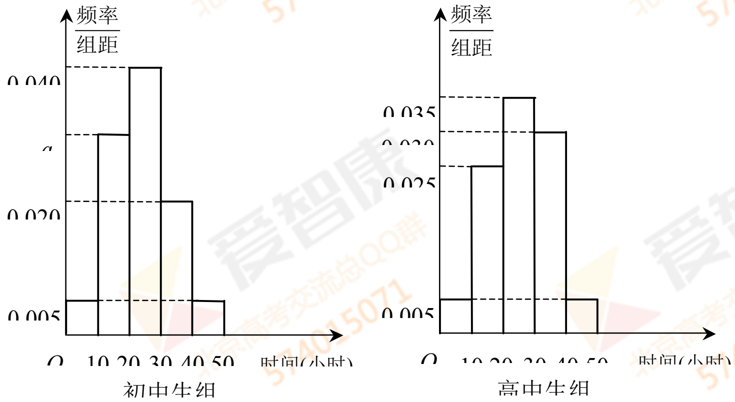
（Ⅱ）求证：G 为线段 AF 的中点；

（Ⅲ）求线段 CG 长度的最小值．



18．（本小题满分 13 分）

某中学有初中学生 1800 人，高中学生 1200 人. 为了解学生本学期课外阅读时间，现采用分层抽样的方法，从中抽取了 100 名学生，先统计了他们课外阅读时间，然后按“初中学生”和“高中学生”分为两组，再将每组学生的阅读时间（单位：小时）分为 5 组：$[0,10)$，$[10,20)$，$[20,30)$，$[30,40)$，$[40,50]$，并分别加以统计，得到如图所示的频率分布直方图.



（Ⅰ）写出 a 的值；

（Ⅱ）试估计该校所有学生中，阅读时间不小于 30 个小时的学生人数；

（Ⅲ）从阅读时间不足 10 个小时的样本学生中随机抽取 2 人，求至少抽到 1 名高中生的概率.

19. （本小题满分 13 分）

已知函数 $f(x)=\dfrac{x-a}{(x+a)^2}$.

（Ⅰ）若 $f'(a)=1$，求 a 的值；

（Ⅱ）设 $a\leqslant 0$，若对于定义域内的任意 x_1，总存在 x_2 使得 $f(x_2)<f(x_1)$，求 a 的取值范围.

20. （本小题满分 14 分）

已知抛物线 C： $x^2=4y$，过点 $P(0,m)(m>0)$ 的动直线 l 与 C 相交于 A,B 两点，抛物线 C 在点 A 和点 B 处的切线相交于点 Q，直线 AQ,BQ 与 x 轴分别相交于点 E,F.

（Ⅰ）写出抛物线 C 的焦点坐标和准线方程；

（Ⅱ）求证：点 Q 在直线 $y=-m$ 上；

（Ⅲ）判断是否存在点 P，使得四边形 $PEQF$ 为矩形？若存在，求出点 P 的坐标；若不存在，说明理由.

北京市西城区 2016 年高三二模试卷参考答案及评分标准

高三数学（文科）

2016.5

一、选择题：本大题共 **8** 小题，每小题 **5** 分，共 **40** 分.

1．B	2．C	3．B	4．C
5．B	6．D	7．A	8．C

二、填空题：本大题共 **6** 小题，每小题 **5** 分，共 **30** 分.

9．$(3,1)$　　10．$\frac{3}{4}$

11．3　　12．$\frac{\sqrt{6}}{2}$　　$\frac{x^2}{8}-\frac{y^2}{4}=1$

13．$\frac{1}{2}$　　$(\frac{1}{2},+\infty)$　　14．5

注：第 12，13 题第一问 2 分，第二问 3 分.

三、解答题：本大题共 **6** 小题，共 **80** 分. 其他正确解答过程，请参照评分标准给分.

15．（本小题满分 13 分）

（Ⅰ）解：函数 $f(x)$ 的定义域为 $\{x\,|\,x\in\mathbf{R}$，且 $x\neq k\pi+\frac{\pi}{2},k\in\mathbf{Z}\}$. ………………… 2 分

又因为 $f(x)=(1+\sqrt{3}\tan x)\cos^2 x$

$=(1+\sqrt{3}\frac{\sin x}{\cos x})\cos^2 x$ ………………… 3 分

$=\cos^2 x+\sqrt{3}\sin x\cos x$

$=\frac{1+\cos 2x}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2x$ ………………… 7 分

$=\sin(2x+\frac{\pi}{6})+\frac{1}{2}$， ………………… 9 分

所以 $f(x)$ 的最小正周期为 $T=\frac{2\pi}{2}=\pi$.（验证知其定义域与之相符） …………… 10 分

（Ⅱ）解：由 $x\in(0,\frac{\pi}{2})$，得 $\frac{\pi}{6}<2x+\frac{\pi}{6}<\frac{7\pi}{6}$， ………………… 11 分

所以 $-\frac{1}{2}<\sin(2x+\frac{\pi}{6})\leqslant 1$，

所以当 $x\in(0,\frac{\pi}{2})$ 时，$f(x)\in(0,\frac{3}{2}]$，

即函数 $f(x)$ 在区间 $(0,\frac{\pi}{2})$ 的值域为 $(0,\frac{3}{2}]$. ………………… 13 分

16. （本小题满分 13 分）

（Ⅰ）**证明**：因为 $4a_n-3S_n=2$，①

所以当 $n=1$ 时，$4a_1-3S_1=2$，解得 $a_1=2$；…………………… 2 分

当 $n\geqslant 2$ 时，$4a_{n-1}-3S_{n-1}=2$，② …………………3 分

由①—②，得 $4a_n-4a_{n-1}-3(S_n-S_{n-1})=0$，

所以 $a_n=4a_{n-1}$，

由 $a_1=2$，得 $a_n\neq 0$，

所以 $\dfrac{a_n}{a_{n-1}}=4$，其中 $n\geqslant 2$.

故 $\{a_n\}$ 是首项为 2，公比为 4 的等比数列. …………………6 分

（Ⅱ）**解**：由（Ⅰ），得 $a_n=2\times 4^{n-1}$. …………………… 8 分

所以 $b_n=\dfrac{1}{2}a_n-4n=4^{n-1}-4n$.

则 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 $T_n=(4^0-4)+(4^1-8)+\cdots+(4^{n-1}-4n)$

$=(4^0+4^1+\cdots+4^{n-1})-(4+8+\cdots+4n)$ ……………… 10 分

$=\dfrac{1-4^n}{1-4}-\dfrac{n(4+4n)}{2}$

$=\dfrac{4^n-1}{3}-2n^2-2n$. ………………13 分

17. （本小题满分 14 分）

（Ⅰ）**证明**：因为在折起前的矩形 $ABCD$ 中，E,F 分别为 BC,DA 的中点，

所以 $EF\perp FD$，$EF\perp FA$，

又因为 $FD\cap FA=F$，

所以 $EF\perp$ 平面 DFA. ………………2 分

又因为 $DG\subset$ 平面 DFA，

所以 $EF\perp DG$. ………………4 分

（Ⅱ）**证明**：因为在折起前的矩形 $ABCD$ 中，E,F 分别为 BC,DA 的中点，

所以在立体图中，$AB//EF//CD$.

即在立体图中，四边形 $ABCD$ 为平行四边形.

连接 AC，设 $AC \cap BD = O$，则 $AO = CO$． ………………6 分

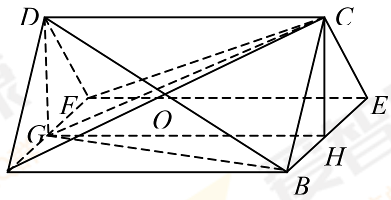
又因为 $CF //$ 平面 BDG， $CF \subset$ 平面 ACF，平面 $ACF \cap$ 平面 $BDG = OG$，

所以 $CF // OG$，

所以在 ΔACF 中， OG 为中位线，

即 G 为线段 AF 的中点． ………………9 分

（III）**解**：因为 G 为线段 AF 的中点， $\angle DFA = 60^{\circ}$



所以 ΔDFA 为等边三角形，且 $DG \perp FA$，

又因为 $EF \perp DG$， $EF \cap FA = F$，

所以 $DG \perp$ 平面 $ABEF$．

设 BE 的中点为 H，连接 GH, CH，

易得四边形 $DGHC$ 为平行四边形，

所以 $CH \perp$ 平面 $ABEF$，

所以 $CG^2 = GH^2 + CH^2$． ………………11 分

设 $DF = x$，由题意得 $CH = DG = \dfrac{\sqrt{3}}{2}x$， $GH = CD = 4 - 2x$，

所以 $CG^2 = (4-2x)^2 + (\dfrac{\sqrt{3}}{2}x)^2 = \dfrac{19}{4}x^2 - 16x + 16$， ………………13 分

所以当 $x = \dfrac{32}{19}$时， $CG^2{}_{\min} = \dfrac{48}{19}$．

所以线段 CG 长度的最小值为 $\dfrac{4\sqrt{57}}{19}$． ………………14 分

18．（本小题满分 13 分）

（I）**解**： $a = 0.03$． ………………3 分

（II）**解**：由分层抽样，知抽取的初中生有 60 名，高中生有 40 名． ………………4 分

因为初中生中，阅读时间不小于 30 个小时的学生频率为 $(0.02 + 0.005) \times 10 = 0.25$，

所以所有的初中生中，阅读时间不小于 30 个小时的学生约有 $0.25 \times 1800 = 450$ 人，

………………6 分

同理，高中生中，阅读时间不小于 30 个小时的学生频率为 $(0.03 + 0.005) \times 10 = 0.35$，学生人数约有 $0.35 \times 1200 = 420$ 人．

所以该校所有学生中，阅读时间不小于 30 个小时的学生人数约有 $450+420=870$ 人.

………………8 分

（III）**解**：记“从阅读时间不足 10 个小时的样本学生中随机抽取 2 人，至少抽到 1 名高中生”为事件 A，………………9 分

初中生中，阅读时间不足 10 个小时的学生频率为 $0.005\times10=0.05$，样本人数为 $0.05\times60=3$ 人.

高中生中，阅读时间不足 10 个小时的学生频率为 $0.005\times10=0.05$，样本人数为 $0.05\times40=2$ 人.………………10 分

记这 3 名初中生为 A_1,A_2,A_3，这 2 名高中生为 B_1,B_2，

则从阅读时间不足 10 个小时的样本学生中随机抽取 2 人，所有可能结果有 10 种，即：(A_1,A_2)，(A_1,A_3)，(A_1,B_1)，(A_1,B_2)，(A_2,A_3)，(A_2,B_1)，(A_2,B_2)，(A_3,B_1)，(A_3,B_2)，(B_1,B_2)，

而事件 A 的结果有 7 种，它们是 (A_1,B_1)，(A_1,B_2)，(A_2,B_1)，(A_2,B_2)，(A_3,B_1)，(A_3,B_2)，(B_1,B_2)，

所以 $P(A)=\dfrac{7}{10}$.………………13 分

19. （本小题满分 13 分）

（Ⅰ）**证明**：函数 $y=f(x)$ 的定义域 $D=\{x\,|\,x\in\mathbf{R}且x\neq -a\}$，

由题意，$f'(a)$ 有意义，所以 $a\neq0$.

求导，得 $f'(x)=\dfrac{(x+a)^2-(x-a)\cdot2(x+a)}{(x+a)^4}=-\dfrac{(x+a)\cdot(x-3a)}{(x+a)^4}$.………………3 分

所以 $f'(a)=\dfrac{4a^2}{16a^4}=\dfrac{1}{4a^2}=1$，

解得 $a=\pm\dfrac{1}{2}$.………………5 分

（Ⅱ）**解**：“对于定义域内的任意 x_1，总存在 x_2 使得 $f(x_2)<f(x_1)$”等价于“$f(x)$ 不存在最小值”.………………6 分

① 当 $a=0$ 时，

由 $f(x)=\dfrac{1}{x}$，得 $f(x)$ 无最小值，符合题意.………………8 分

② 当 $a<0$ 时，

令 $f'(x)=-\dfrac{(x+a)\cdot(x-3a)}{(x+a)^4}=0$，得 $x=-a$ 或 $x=3a$． …………………9 分

随着 x 的变化时，$f'(x)$ 与 $f(x)$ 的变化情况如下表：

x	$(-\infty,3a)$	$3a$	$(3a,-a)$	$-a$	$(-a,+\infty)$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	不存在	$-$
$f(x)$	↘	极小	↗	不存在	↘

…………………11 分

所以函数 $f(x)$ 的单调递减区间为 $(-\infty,3a)$，$(-a,+\infty)$，单调递增区间为 $(3a,-a)$．

因为当 $x>a$ 时，$f(x)=\dfrac{x-a}{(x+a)^2}>0$，当 $x<a$ 时，$f(x)<0$，

所以 $f(x)_{\min}=f(3a)$．

所以当 $x_1=3a$ 时，不存在 x_2 使得 $f(x_2)<f(x_1)$．

综上所述，a 的取值范围为 $a\in\{0\}$． …………………13 分

20．（本小题满分 14 分）

（Ⅰ）**解**：焦点坐标为 $(0,1)$，准线方程为 $y=-1$． …………………2 分

（Ⅱ）**证明**：由题意，知直线 l 的斜率存在，故设 l 的方程为 $y=kx+m$．

由方程组 $\begin{cases} y=kx+m, \\ x^2=4y, \end{cases}$ 得 $x^2-4kx-4m=0$，

由题意，得 $\Delta=16k^2+16m>0$．

设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，则 $x_1+x_2=4k$，$x_1x_2=-4m$， …………………4 分

由抛物线方程 $x^2=4y$，得 $y=\dfrac{1}{4}x^2$，所以 $y'=\dfrac{1}{2}x$，

所以抛物线在点 A 处的切线方程为 $y-\dfrac{1}{4}{x_1}^2=\dfrac{1}{2}x_1(x-x_1)$，

化简，得 $y=\dfrac{1}{2}x_1x-\dfrac{1}{4}{x_1}^2$， ①

同理，抛物线在点 B 处的切线方程为 $y=\dfrac{1}{2}x_2x-\dfrac{1}{4}{x_2}^2$． ② …………………6 分

联立方程①②，得 $\dfrac{1}{2}x_1x-\dfrac{1}{4}{x_1}^2=\dfrac{1}{2}x_2x-\dfrac{1}{4}{x_2}^2$，

即 $\dfrac{1}{2}(x_1-x_2)x=\dfrac{1}{4}(x_1-x_2)(x_1+x_2)$，

因为 $x_1 \neq x_2$，所以 $x = \frac{1}{2}(x_1 + x_2)$，

代入①，得 $y = \frac{1}{4}x_1x_2 = -m$，

所以点 $Q(\frac{x_1+x_2}{2}, -m)$，即 $Q(2k, -m)$.

所以点 Q 在直线 $y = -m$ 上. ………………8 分

（III）**解**：假设存在点 P，使得四边形 $PEQF$ 为矩形，

由四边形 $PEQF$ 为矩形，得 $EQ \perp FQ$，即 $AQ \perp BQ$，

所以 $k_{AQ} \cdot k_{BQ} = -1$，即 $\frac{1}{2}x_1 \cdot \frac{1}{2}x_2 = -1$.

由（II），得 $\frac{1}{4}x_1x_2 = \frac{1}{4}(-4m) = -1$，

解得 $m = 1$.

所以 $P(0,1)$. ………………10 分

以下只要验证此时的四边形 $PEQF$ 为平行四边形即可.

在①中，令 $y = 0$，得 $E(\frac{1}{2}x_1, 0)$.

同理得 $F(\frac{1}{2}x_2, 0)$.

所以直线 EP 的斜率为 $k_{EP} = \dfrac{1-0}{0-\frac{1}{2}x_1} = \dfrac{-2}{x_1}$，

直线 FQ 的斜率 $k_{FQ} = \dfrac{0-(-1)}{\frac{1}{2}x_2 - \frac{x_1+x_2}{2}} = \dfrac{-2}{x_1}$， ………………12 分

所以 $k_{EP} = k_{FQ}$，即 $EP // FQ$.

同理 $PF // EQ$.

所以四边形 $PEQF$ 为平行四边形.

综上所述，存在点 $P(0,1)$，使得四边形 $PEQF$ 为矩形. ………………14 分