北京市东城区 2015-2016 学年度第二学期高三综合练习（二）

数学　（理科）

学 校 ______________ 班 级 ________________ 姓 名 _______________ 考 号 ____________

本试卷分第 I 卷和第 II 卷两部分，第 I 卷 1 至 2 页，第 II 卷 3 至 5 页，共 150 分。考试时长 120 分钟。考生务必将答案答在答题卡上，在试卷上作答无效。考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回。

第 I 卷（选择题　共 40 分）

一、选择题(本大题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分. 在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项)

1．集合 $A=\{1,2,3,4\}$，$B=\{x\in R\,|\,x\le 3\}$，则 $A\cap B=$

A. $\{1,2,3,4\}$　　B. $\{1,2,3\}$　　C. $\{2,3\}$　　D. $\{1,4\}$

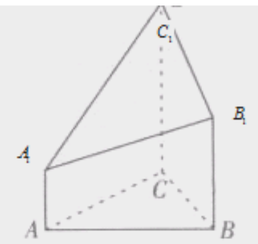
2．已知命题 p：$\exists x\in \mathbf{R}$ 有 $sinx\ge 1$，则 $\neg p$ 为

A. $\forall x\in R$，$\sin x\le 1$　　B. $\exists x\in R$，$\sin x<1$

C. $\forall x\in R$，$\sin x<1$　　D. $\exists x\in R$，$\sin x\le 1$

3．如图，$\triangle ABC$ 为正三角形，$AA_1//BB_1//CC_1$，$CC_1\perp$ 底面 $\triangle ABC$，若 $BB_1=2AA_1=2$，$AB=CC_1=3AA_1$，则多面体 $ABC-A_1B_1C_1$ 在平面 A_1ABB_1 上的投影的面积为

A. $\dfrac{27}{4}$　　B. $\dfrac{9}{2}$　　C. 9　　D. $\dfrac{27}{2}$



3题图

4．若向量 $\boldsymbol{a}=(1,0)$，$\boldsymbol{b}=(2,1)$，$\boldsymbol{c}=(x,1)$满足条件 $3\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ 与 $\mathbf{c}$ 共线，则 x 的值

A. 1　　B. -3　　C. -2　　D. -1

5．成等差数列的三个正数的和等于 6，并且这三个数分别加上 3、6、13 后成　为等比数列 $\{b_n\}$ 中的 b_3、b_4、b_5，则数列 $\{b_n\}$ 的通项公式为

A. $b_n=2^{n-1}$　　B. $b_n=3^{n-1}$　　C. $b_n=2^{n-2}$　　D. $b_n=3^{n-2}$

6．一名顾客计划到商场购物，他有三张优惠券，每张优惠券只能购买一件商品。根据购买商品的标价，三张优惠券的优惠方式不同，具体如下：

优惠券 1：若标价超过 50 元，则付款时减免标价的 10%；

优惠券 2：若标价超过 100 元，则付款时减免 20 元；

优惠券 3：若标价超过 100 元，则超过 100 元的部分减免 18%。

若顾客购买某商品后，使用优惠券 1 比优惠券 2、优惠券 3 减免的都多，则他购买的商品的标价可能为

A. 179 元　　B. 199 元　　C. 219 元　　D. 239 元

7．已知函数 $f(x)=\begin{cases}2^x & x\ge 4,\\ f(x+1) & x<4\end{cases}$ 则 $f(2+\log_2 3)$ 的值为

A．24　　B．16　　C．12　　D．8

8．集合 $A=\{(x,y)\mid x,\ y\in R\}$，若 $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in A$，已知 $\boldsymbol{x}=(x_1,\ y_1)$，$\boldsymbol{y}=(x_2,\ y_2)$，定义集合 A 中元素间的运算 $\boldsymbol{x}*\boldsymbol{y}$，称为"$*$"运算，此运算满足以下运算规律：

①任意 $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in A$ 有 $\boldsymbol{x}*\boldsymbol{y}=\boldsymbol{y}*\boldsymbol{x}$

②任意 $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}\in A$ 有 $(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})*\boldsymbol{z}=\boldsymbol{x}*\boldsymbol{z}+\boldsymbol{y}*\boldsymbol{z}$（其中 $\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}=(x_1+x_2,\ y_1+y_2)$）

③任意 $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in A$，$a\in R$ 有 $(a\boldsymbol{x})*\boldsymbol{y}=a(\boldsymbol{x}*\boldsymbol{y})$

④任意 $\boldsymbol{x}\in A$ 有 $\boldsymbol{x}*\boldsymbol{x}\ge 0$，且 $\boldsymbol{x}*\boldsymbol{x}=0$ 成立的充分必要条件是 $\boldsymbol{x}=(0,0)$ 为向量.

如果 $\boldsymbol{x}=(x_1,\ y_1)$，$\boldsymbol{y}=(x_2,\ y_2)$，那么下列运算属于"$*$"正确运算的是

A．$\boldsymbol{x}*\boldsymbol{y}=x_1y_1+2x_2y_2$　　B．$\boldsymbol{x}*\boldsymbol{y}=x_1y_1-x_2y_2$

C．$\boldsymbol{x}*\boldsymbol{y}=x_1y_1+x_2y_2+1$　　D．$\boldsymbol{x}*\boldsymbol{y}=2x_1x_2+y_1y_2$

第Ⅱ卷（共 110 分）

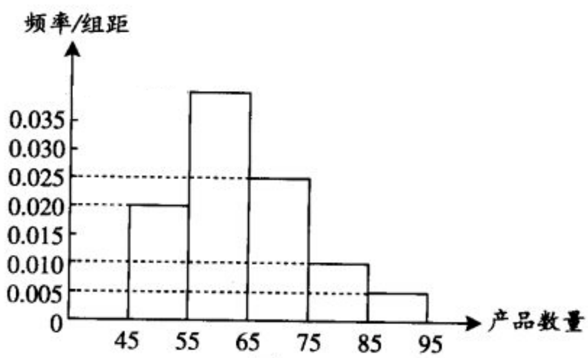
二、填空题（本大题共 6 小题，每小题 5 分，共 30 分）

9．设 i 是虚数单位，复数 $\dfrac{1+ai}{2-i}$ 所对应的点在第一象限，则实数 a 的取值范围为___.

10．设变量 x，y 满足约束条件 $\begin{cases}x+y\le 2\\ x-y\ge 0\\ y\ge -1\end{cases}$，则目标函数 $z=2x+y$ 的最大值为__.

11．已知直线 $l_1:\begin{cases}x=1+3t\\ y=2-4t\end{cases}$（$t$为参数）与直线 $l_2:2x-4y=5$ 相交于点 B，又点 $A(1,2)$，则 $|AB|=$__.

12．为了调查某厂工人生产某种产品的能力，随机抽查了 20 位工人某天生产该产品的数量.产品数量的分组区间为 $[45,55)$，



$[55,65)$,$[65,75)$,$[75,85)$，$[85,95)$由此得到频率分布直方图如图. 则产品数量位于$[55,65)$范围内的频率为_____；这 20 名工人中一天生产该产品数量在$[55,75)$的人数是______.

13．若点O和点$F_2(-\sqrt{2},0)$分别为双曲线$\dfrac{x^2}{a^2}-y^2=1$（>0）的中心和左焦点，点P为双曲线右支上的任意一点，则$\dfrac{|PF_2|^2}{|OP|^2+1}$的取值范围为___.

14．已知函数$f_n(x)=\dfrac{\sin nx}{\sin x}(n\in N^*)$，关于此函数的说法正确的序号是__.

① $f_n(x)\ (n\in N^*)$为周期函数； ② $f_n(x)\ (n\in N^*)$有对称轴； ③ $(\dfrac{\pi}{2},0)$为$f_n(x)\ (n\in N^*)$的对称中心 ；④$|f_n(x)|\le n\ (n\in N^*)$.

三、解答题（本大题共 6 小题，共 80 分. 解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程）

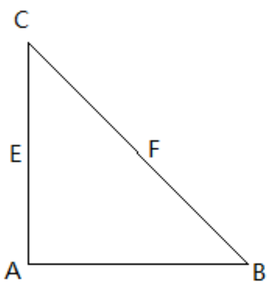
15．（本小题共 13 分）

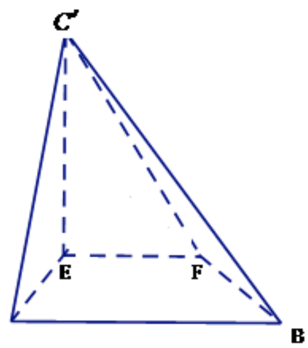
已知函数$f(x)=2\sqrt{3}\sin(\dfrac{1}{2}\omega x)\cdot\cos(\dfrac{1}{2}\omega x)+2\cos^2(\dfrac{1}{2}\omega x)(\omega>0)$，且函数$f(x)$的最小正周期为$\pi$.

(Ⅰ)求ω的值；

(Ⅱ)求$f(x)$在区间$[0,\dfrac{\pi}{2}]$上的最大值和最小值.

16．（本小题共 14 分）





如图，ΔABC是等腰直角三角形$\angle CAB=90^\circ$，$AC=2a$，E，F分别为AC，BC的中点，沿EF将ΔCEF折起，得到如图所示的四棱锥C'-$ABFE$

（Ⅰ）求证：$AB\perp$平面AEC'；

（Ⅱ）当四棱锥C'-$ABFE$体积取最大值时，

(i)若G为BC'中点，求异面直线GF与AC'所成角；

(ii)在C'-$ABFE$中AE交BF于C，求二面角$A-CC'-B$的余弦值.

17．（本小题共 13 分）

在 2015-2016 赛季 CBA 联赛中，某队甲、乙两名球员在前 10 场比赛中投篮命中情况统计如下表（注：表中分数 $\frac{n}{N}$，N 表示投篮次数，n 表示命中次数），假设各场比赛相互独立.

场次 球员	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
甲	$\frac{5}{13}$	$\frac{4}{12}$	$\frac{14}{30}$	$\frac{5}{9}$	$\frac{14}{19}$	$\frac{10}{16}$	$\frac{12}{23}$	$\frac{4}{8}$	$\frac{6}{13}$	$\frac{10}{19}$
乙	$\frac{13}{26}$	$\frac{9}{18}$	$\frac{9}{14}$	$\frac{8}{16}$	$\frac{6}{15}$	$\frac{10}{14}$	$\frac{7}{21}$	$\frac{9}{16}$	$\frac{10}{22}$	$\frac{12}{20}$

根据统计表的信息：

（Ⅰ）从上述比赛中等可能随机选择一场，求甲球员在该场比赛中投篮命中率大于 0.5 的概率；

（Ⅱ）试估计甲、乙两名运动员在下一场比赛中恰有一人命中率超过 0.5 的概率；

（Ⅲ）在接下来的 3 场比赛中，用 X 表示这 3 场比赛中乙球员命中率超过 0.5 的场次，试写出 X 的分布列，并求 X 的数学期望.

18．（本小题共 14 分）

已知 $f(x)=2\ln(x+2)-(x+1)^2$，$g(x)=k(x+1)$.

（Ⅰ）求 $f(x)$ 的单调区间；

（Ⅱ）当 $k=2$ 时，求证：对于 $\forall x>-1$，$f(x)<g(x)$ 恒成立；

（Ⅲ）若存在 $x_0>-1$，使得当 $x\in(-1,x_0)$ 时，恒有 $f(x)>g(x)$ 成立，试求 k 的取值范围.

19．（本小题共 13 分）

已知椭圆 C：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 过点($\sqrt{2}$，1)，且以椭圆短轴的两个端点和一个焦点为顶点的三角形是等腰直角三角形.

(Ⅰ)求椭圆的标准方程；

(Ⅱ)设 M（x,y）是椭圆 C 上的动点，P（$p,0$）是 X 轴上的定点，求 $|MP|$ 的最小值及取最小值时点 M 的坐标.

20．（本小题共 13 分）

数列$\{a_n\}$中，定义：$d_n = a_{n+2} + a_n - 2a_{n+1}\ (n \ge 1)$，$a_1 = 1$.

（Ⅰ）若$d_n = a_n$，$a_2 = 2$，求a_n；

（Ⅱ）若$a_2 = -2$，$d_n \ge 1$，求证此数列满足$a_n \ge -5\ (n \in N^*)$；

（Ⅲ）若$|d_n| = 1$，$a_2 = 1$且数列$\{a_n\}$的周期为 4，即$a_{n+4} = a_n (n \ge 1)$，写出所有符合条件的$\{d_n\}$.

北京市东城区 2015-2016 学年度第二学期高三综合练习（二）

数学参考答案及评分标准 （理科）

第 I 卷（选择题 共 40 分）

一、选择题（本大题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分）

1.B 2.C 3.A 4.D 5.A 6.C 7. A 8. D

第 II 卷（共 110 分）

二、填空题(本大题共 6 小题，每小题 5 分，共 30 分)

9. $-\frac{1}{2}<a<2$ 10. 5 11. $\frac{5}{2}$ 12. 0.4; 13. 13. $\left(1,\frac{3}{2}+\sqrt{2}\right]$ 14. ①②④

三、解答题(本大题共 6 小题，共 80 分)

15.（本小题共 13 分）

解：(Ⅰ)因为 $f(x)=\sqrt{3}\sin\omega x+\cos\omega x+1=2\sin(\omega x+\frac{\pi}{6})+1$，

又 $f(x)$ 的最小正周期为 π，

所以 $\pi=\frac{2\pi}{\omega}$，即 $\omega=2$. --6 分

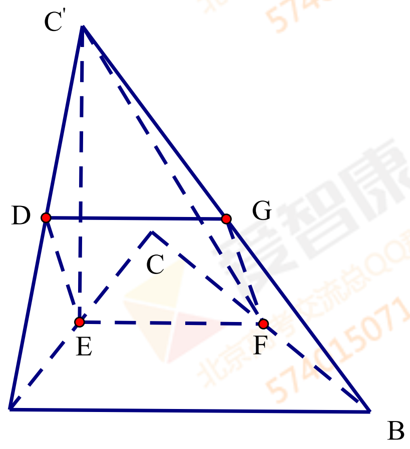
(Ⅱ)由(Ⅰ)可知 $f(x)=2\sin(2x+\frac{\pi}{6})+1$，

因为 $0\le x\le\frac{\pi}{2}$，

所以 $\frac{\pi}{6}\le 2x+\frac{\pi}{6}\le\frac{7\pi}{6}$.

由正弦函数的性质可知，当 $2x+\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{2}$，即 $x=\frac{\pi}{6}$ 时，函数 $f(x)$ 取得最大值，最大值为 $f(\frac{\pi}{6})=3$；

当 $2x+\frac{\pi}{6}=\frac{7\pi}{6}$ 时，即 $x=\frac{\pi}{2}$ 时，函数 $f(x)$ 取得最小值，最小值为 $f(\frac{\pi}{2})=0$. ------13 分



16.（本小题共 14 分）

证明：（Ⅰ）因为 ΔABC 是等腰直角三角形 $\angle CAB=90^\circ$，

E，F 分别为 AC，BC 的中点，

所以 $EF\perp AE$，$EF\perp C'E$.

又因为 $AE\cap C'E=E$，

所以 $EF \perp$ 平面AEC'.

由于 $EF \parallel AB$,

所以有 $AB \perp$ 平面AEC'.　　　　　　　　　　------------------------4 分

解：（Ⅱ）(i)

取 AC' 中点 D，连接 DE, EF, FG, GD,

由于 GD 为 $\Delta ABC'$ 中位线，以及 EF 为 ΔABC 中位线,

所以四边形 $DEFG$ 为平行四边形.

直线 GF 与 AC' 所成角就是 DE 与 AC' 所成角.

所以四棱锥 $C'-ABFE$ 体积取最大值时，$C'E$ 垂直于底面 $ABFE$.

此时 $\Delta AEC'$ 为等腰直角三角形，ED 为中线，

所以直线 $ED \perp AC'$.

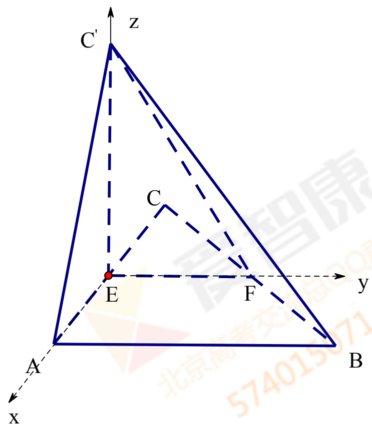
又因为 $ED \parallel GF$,

所以直线 GF 与 AC' 所成角为 $\frac{\pi}{2}$.

--10 分

(ii) 因为四棱锥 $C'-ABFE$ 体积取最大值,

分别以 EA、EF、EC' 所在直线为 x 轴、y 轴、z 轴，建立空间



直角坐标系如图，

则 $C'(0,0,a)$，$B(a,2a,0)$，$F(0,a,0)$，$\overrightarrow{C'B}(a,2a,-a)$，

$\overrightarrow{C'F}(0,a,-a)$.

设平面 $C'BF$ 的一个法向量为 $n=(x,y,z)$，由 $\begin{cases}\mathbf{n}\cdot\overrightarrow{C'B}=0,\\ \mathbf{n}\cdot\overrightarrow{C'F}=0\end{cases}$ 得

$$\begin{cases}ax+2ay-az=0,\\ ay-az=0\end{cases}$$

取 $y=1$，得 $x=-1, z=1$.

由此得到 $n=(-1,1,1)$.

同理，可求得平面 $C'AE$ 的一个法向量 $m=(0,1,0)$.

所以 $\cos\langle \mathbf{n}\cdot\mathbf{m}\rangle=\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$.

故平面 C'AE 与平面 C'BF 的平面角的夹角的余弦值为 $\frac{\sqrt{3}}{3}$.--------------------------------------14 分

17.（本小题共 13 分）

解：（Ⅰ）根据投篮统计数据，在 10 场比赛中，甲球员投篮命中率超过 0.5 的场次有 5 场，分别是 4，5，6，7，10，

所以在随机选择的一场比赛中，甲球员的投篮命中率超过 0.5 的概率是 $\frac{1}{2}$.

在 10 场比赛中，乙球员投篮命中率超过 0.5 的场次有 4 场，分别是 3，6，8，10，

所以在随机选择的一场比赛中，甲球员的投篮命中率超过 0.5 的概率是 $\frac{2}{5}$.

--------------------------------------3 分

（Ⅱ）设在一场比赛中，甲、乙两名运动员恰有一人命中率超过 0.5 为事件 A，甲队员命中率超过 0.5 且乙队员命中率不超过 0.5 为事件 B_1，乙队员命中率超过 0.5 且甲队员命中率不超过 0.5 为事件 B_2.

则 $P(A)=P(B_1)+P(B_2)=\frac{1}{2}\times\frac{3}{5}+\frac{1}{2}\times\frac{2}{5}=\frac{1}{2}$. --7 分

（Ⅲ）X 的可能取值为 $0,1,2,3$.

$P(X=0)=C_3^0(\frac{2}{5})^0(\frac{3}{5})^3=\frac{27}{125}$;

$P(X=1)=C_3^1(\frac{2}{5})^1(\frac{3}{5})^2=\frac{54}{125}$;

$P(X=2)=C_3^2(\frac{2}{5})^2(\frac{3}{5})^1=\frac{36}{125}$;

$P(X=3)=C_3^3(\frac{2}{5})^3=\frac{8}{125}$;

X 的分布列如下表：

X	0	1	2	3
P	$\frac{27}{125}$	$\frac{54}{125}$	$\frac{36}{125}$	$\frac{8}{125}$

$EX=np=3\times\frac{2}{5}=\frac{6}{5}$. ---13 分

18.（本小题共 14 分）

解：（Ⅰ）$f'(x)=\dfrac{2}{x+2}-2(x+1)=\dfrac{-2(x^2+3x+1)}{x+2}\quad(x>-2)$，

当 $f'(x)>0$ 时，

所以 $x^2+3x+1<0$.

解得 $-2<x<\dfrac{-3+\sqrt{5}}{2}$.

当 $f'(x)>0$ 时，解得 $x>\dfrac{-3+\sqrt{5}}{2}$.

所以 $f(x)$ 单调增区间为 $(-2,\dfrac{-3+\sqrt{5}}{2})$，单调减区间为 $(\dfrac{-3+\sqrt{5}}{2},+\infty)$.------------4 分

（Ⅱ）设 $h(x)=f(x)-g(x)=2\ln(x+2)-(x+1)^2-k(x+1)\quad(x>-1)$，

当 $k=2$ 时，由题意，当 $x\in(-1,+\infty)$ 时，$h(x)<0$ 恒成立.

$h'(x)=\dfrac{-2(x^2+3x+1)}{x+2}-2=\dfrac{-2(x+3)(x+1)}{x+2}$，

∴ 当 $x>-1$ 时，$h'(x)<0$ 恒成立，$h(x)$ 单调递减.

又 $h(-1)=0$，

∴ 当 $x\in(-1,+\infty)$ 时，$h(x)<h(-1)=0$ 恒成立，即 $f(x)-g(x)<0$.

∴ 对于 $\forall x>-1$，$f(x)<g(x)$ 恒成立. --------------------------------8 分

（Ⅲ）因为 $h'(x)=\dfrac{-2(x^2+3x+1)}{x+2}-k=-\dfrac{2x^2+(k+6)x+2k+2}{x+2}$.

由(II)知，当 $k=2$ 时，$f(x)<g(x)$ 恒成立，

即对于 $\forall x>-1$，$2\ln(x+2)-(x+1)^2<2(x+1)$，不存在满足条件的 x_0；

当 $k>2$ 时，对于 $\forall x>-1$，$x+1>0$，此时 $2(x+1)<k(x+1)$.

∴ $2\ln(x+2)-(x+1)^2<2(x+1)<k(x+1)$，即 $f(x)<g(x)$ 恒成立，

不存在满足条件的 x_0；

当 $k<2$ 时，令 $t(x)=-2x^2-(k+6)x-(2k+2)$，可知 $t(x)$ 与 $h'(x)$ 符号相同，

当 $x\in(x_0,+\infty)$ 时，$t(x)<0$，$h'(x)<0$，$h(x)$ 单调递减.

∴ 当 $x\in(-1,x_0)$ 时，$h(x)>h(-1)=0$，即 $f(x)-g(x)>0$ 恒成立.

综上，k 的取值范围为 $(-\infty,2)$. ---14 分

19.（本小题共 13 分）

解:（Ⅰ）由题意,以椭圆短轴的两个端点和一个焦点为顶点的三角形是等腰直角三角形,

所以 $b=c$，$a^2=2b^2$，则椭圆 C 的方程为 $\dfrac{x^2}{2b^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$.

又因为椭圆 C:过点 A($\sqrt{2}$，1)，所以 $\frac{2}{2b^2}+\frac{1}{b^2}=1$，故 a=2,b=.$\sqrt{2}$

所以 椭圆的的标准方程为 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{2}=1$. --4 分

(Ⅱ) $|MP|^2=(x-p)^2+y^2$.

因为 M(x,y)是椭圆 C 上的动点，所以 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{2}=1$，

故 $y^2=2(1-\frac{x^2}{4})=2-\frac{x^2}{2}$.

所以 $|MP|^2=(x-p)^2+2-\frac{x^2}{2}=\frac{1}{2}x^2-2px+p^2+2=\frac{1}{2}(x-2p)^2-p^2+2.$

因为 M(x,y)是椭圆 C 上的动点，

所以 $|x|\le 2$.

（1） 若 $|2p|\le 2$ 即 $|p|\le 1$，则当 $x=2p$ 时 $|MP|$ 取最小值 $\sqrt{2-p^2}$，

此时 M $(2p,\pm\sqrt{2-2p^2})$.

（2）若 $p>1$，则当 $x=2$ 时，$|MP|$ 取最小值 $|p-2|$，此时 M $(2,0)$.

（3）若 $p<-1$，则当 $x=-2$ 时，$|MP|$ 取最小值 $|p+2|$，此时 M $(-2,0)$. -------13 分

20.（本小题共 13 分）

（Ⅰ）由 $d_n=a_{n+2}+a_n-2a_{n+1}\ (n\ge 1)$ 以及 $d_n=a_n$ 可得：

$$a_{n+2}-2a_{n+1}=0\ (n\ge 1)$$

所以从第二项起为等比数列. 经过验证 $\{a_n\}$ 为等比数列 $a_n=2^{n-1}$. -------------------2 分

(Ⅱ) 由于 $d_n\ge 1$ 所以有 $a_{n+2}+a_n-2a_{n+1}\ge 1$.

令 $c_n=a_{n+1}-a_n$ 则有 $c_{n+1}-c_n\ge 1$ 叠加得：

$c_n\ge n-4$ 所以有 $a_{n+1}-a_n\ge n-4$，叠加可得：$a_n\ge\frac{n^2-9n+10}{2}$，

所以最小值为-5. --6 分

（III）由于 $|d_n|=1$，$a_1=1$，$a_2=1$

若 $d_1=1$ 可得 $a_3=2$，若 $d_1=-1$ 可得 $a_3=0$

同理，若 $d_2=1$ 可得 $a_4=4$ 或 $a_4=2$，若 $d_2=-1$ 可得 $a_4=0$ 或 $a_4=-2$

具体如下表所示

$$1\quad 1\begin{cases} 2 & \begin{cases} 4 & \begin{cases} 7 \\ 5 \end{cases} \\ 2 & \begin{cases} 3 \\ 1 \end{cases} \end{cases} \\ 0 & \begin{cases} 0 & \begin{cases} 1 \\ -1 \end{cases} \\ -2 & \begin{cases} -3 \\ -5 \end{cases} \end{cases} \end{cases}$$

所以 $\{a_n\}$ 可以为

$1\quad 1\quad 2\quad 2\quad 1\quad 1\quad 2\quad 2\quad 1\quad 1\quad 2\quad 2\quad$ L L

或 $1\quad 1\quad 0\quad 0\quad 1\quad 1\quad 0\quad 0\quad 1\quad 1\quad 0\quad 0$ L L

此时相应的 $\{d_n\}$ 为 $1\quad -1\quad -1\quad 1\quad 1\quad -1\quad -1\quad 1$ L L

或 $-1\quad 1\quad 1\quad -1\quad -1\quad 1\quad 1\quad -1$ L L

---13 分