房山区 2016 年高三二模

数　学（理科）

本试卷共 4 页，150 分。考试时长 120 分钟。考生务必将答案答在答题卡上，在试卷上作答无效。

一、选择题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项。

（1）已知集合 $M=\{1,2,3,4,5\}, N=\{0,2,4\}, P=M\cap N$，则 P 的子集共有

（A）2 个　　（B）4 个　　（C）6 个　　（D）8 个

（2）若 x,y 满足 $\begin{cases} x-y\geq 0, \\ x+y\leq 1, \\ y\geq 0. \end{cases}$ 则 $z=x+2y$ 的最大值为

（A）0　　（B）1　　（C）2　　（D）$\frac{3}{2}$

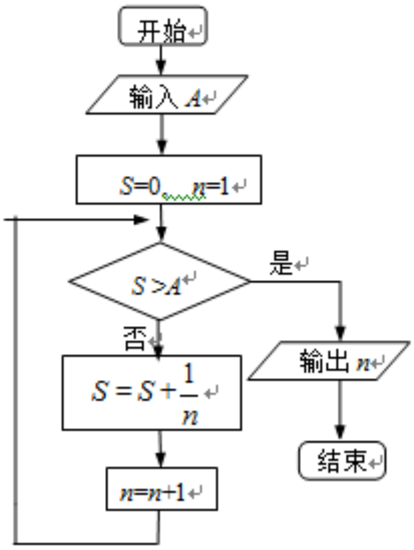
（3）执行如图所示的程序框图，若输入 A 的值为 2，则输出的 n 值为

（A）3

（B）4

（C）5

（D）6



（4）在 $(x-\frac{1}{2x})^6$ 的展开式中，x^4 的系数为

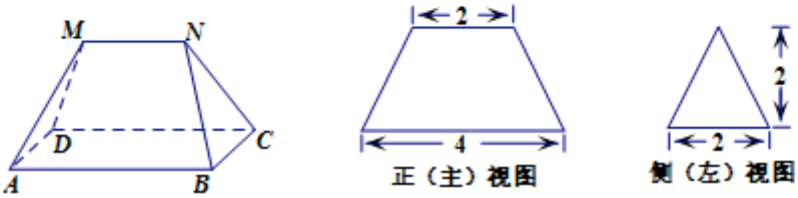
（A）-3　　（B）$-\frac{1}{2}$　　（C）3　　（D）6

（5）设函数 $f(x)=a\sin x+x^2$，若 $f(1)=2$，则 $f(-1)=$

（A）2　　（B）-2

（C）1　　（D）0

（6）多面体 $MN-ABCD$ 的底面 $ABCD$ 为矩形，其正（主）视图和侧（左）视图如图，其中正（主）视图为等腰梯形，侧（左）视图为等腰三角形，则 AM 的长为



（A）$\sqrt{3}$　　（B）$\sqrt{5}$　　（C）$\sqrt{6}$　　（D）$2\sqrt{2}$

（7）已知等差数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_n \in \mathbf{N}^*$，且前10项和 $S_{10}=290$，则 a_9 的最大值为

（A）29　　（B）49　　（C）50　　（D）58

（8）为促进资源节约型和环境友好型社会建设，引导居民合理用电、节约用电，北京居民生活用电试行阶梯电价. 其标准如下表：

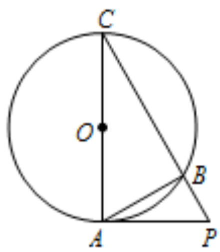
用户	类别	分档电量（千瓦时/户.月）	电价标准（元/千瓦时）
试行阶梯电价的用户	一档	1-240（含）	0.4883
	二档	241-400（含）	0.5383
	三档	400 以上	0.7883

北京市某户居民 2016 年 1 月的平均电费为 0.4983（元/千瓦时），则该用户 1 月份的用电量为

（A）350 千瓦时　　（B）300 千瓦时　　（C）250 千瓦时　　（D）200 千瓦时

二、填空题共 6 小题，每小题 5 分，共 30 分。

（9）定积分 $\int_{-1}^{1} x^2 dx$ 的值为___.



（10）已知 PA 是圆 O 的切线，切点为 A，$PA=2$，AC 是圆 O 的直径，PC 交圆 O 于点圆 B，$\angle PAB=30^\circ$，则圆 O 的半径为___.

（11）已知 p：$x<m$，q：$1 \le x \le 3$，若 p 是 q 的必要而不充分条件，则实数 m 的取值范围是___.

（12）抛物线 $y^2=8x$ 的准线 l 的方程为____，若直线 l 过双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的一个焦点，且双曲线的离心率为 2，则该双曲线的方程为___.

（13）直线 $y=kx$ 与函数 $y=\tan x\ (-\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2})$ 的图象交于 M,N（不与坐标原点 O 重合）两点，点 A 的坐标为 $(-\frac{\pi}{2},0)$，则 $(\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{AN})\cdot\overrightarrow{AO}=$___.

（14）已知函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{a}{x-1}, x\le 0,\\ \log_2 x, x>0.\end{cases}$ ①若 $a=1$，且关于 x 的方程 $f(x)=k$ 有两个不同的实根，则实数 k 的取值范围是___；②若关于 x 的方程 $f(f(x))=0$ 有且只有一个实根，则实数 a 的取值范围是___.

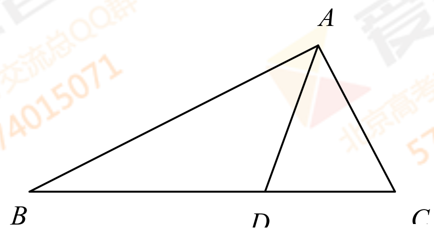
三、解答题共 6 小题，共 80 分。 解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程。

（15）（本小题 13 分）

如图，在△ ABC 中，点 D 在 BC 边上，$\angle CAD=\dfrac{\pi}{4},\cos\angle C=\dfrac{3}{5}$.

（Ⅰ）求 $\sin\angle ADB$ 的值；

（Ⅱ）若 $BD=2DC=5$，求△ ABD 的面积.



（16）（本小题 13 分）

随着 2022 年北京冬奥会的成功申办，冰雪项目已经成为北京市民冬季休闲娱乐的重要方式. 为普及冰雪运动，寒假期间学校组织高一年级学生参加冬令营. 其中一班有 3 名男生和 1 名女生参加，二班有 2 名男生和 2 名女生参加. 活动结束时，要从参加冬令营的学生中选出部分学生进行展示.

（Ⅰ）若要从参加冬令营的这 8 名学生中任选 4 名，求选出的 4 名学生中有女生的概率；

（Ⅱ）若要从一班和二班参加冬令营的学生中各任选 2 名，设随机变量 X 表示选出的女生人数，求 X 的分布列和数学期望.

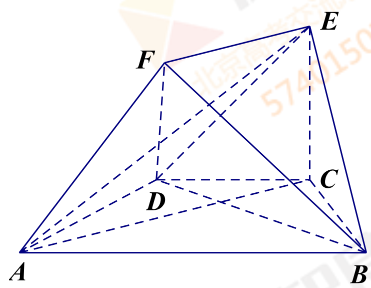
（17）（本小题 14 分）

如图，已知直角梯形 $ACEF$ 与等腰梯形 $ABCD$ 所在的平面互相垂直，$EF/\!/AC$，$EF=\dfrac{1}{2}AC$，$EC\perp AC$，$AD=DC=CB=CE=\dfrac{1}{2}AB=1$.

（Ⅰ）证明：$BC\perp AE$；

（Ⅱ）求二面角 D - BE - F 的余弦值；

（Ⅲ）判断直线 DF 与平面 BCE 的位置关系，并说明理由.



（18）（本小题 13 分）

已知函数 $f(x)=\dfrac{ae^x}{x^2}(a\neq 0)$.

（Ⅰ）当 $a=1$ 时，求函数 $f\left(x\right)$ 的单调区间；

（Ⅱ）设 $g(x)=f(x)-\dfrac{2}{x}-\ln x$，若 $g(x)$ 在区间 $(0,2)$ 上有两个极值点，求实数 a 的取值范围.

（19）（本小题 14 分）

已知椭圆 $C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 过点 $(0,1)$，且长轴长是焦距的 $\sqrt{2}$ 倍. 过椭圆左焦点 F 的直线交椭圆 C 于 A，B 两点，O 为坐标原点.

（Ⅰ）求椭圆 C 的标准方程；

（Ⅱ）若直线 AB 垂直于 x 轴，判断点 O 与以线段 AB 为直径的圆的位置关系，并说明理由；

（Ⅲ）若点 O 在以线段 AB 为直径的圆内，求直线 AB 的斜率 k 的取值范围.

（20）（本小题 13 分）

已知函数 $f(x)=\dfrac{x^2}{1-x}(x\neq 1)$，数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=m\,(m\neq 1)$， $a_{n+1}=f(a_n)$.

（Ⅰ）当 $m=-1$ 时，写出数列 $\{a_n\}$ 的通项公式；

（Ⅱ）是否存在实数 m，使得数列 $\{a_n\}$ 是等比数列？若存在，求出所有符合要求的 m 的值；若不存在，请说明理由；

（Ⅲ）当 $0<m<\dfrac{1}{2}$ 时，求证：$\prod\limits_{i=1}^{n}(a_{i+1}+a_i)<\dfrac{1}{2m}$.

（其中 $\prod$ 是求乘积符号，如 $\prod\limits_{i=1}^{5}i=1\times2\times3\times4\times5$，$\prod\limits_{i=1}^{n}a_i=a_1\times a_2\times\cdots\times a_n$）

房山区 2016 年高考二模

数学（理）答案及评分标准 201604

一、选择题：本大题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分．

题号	1	2	3	4	5	6	7	8
答案	B	D	C	A	D	C	C	B

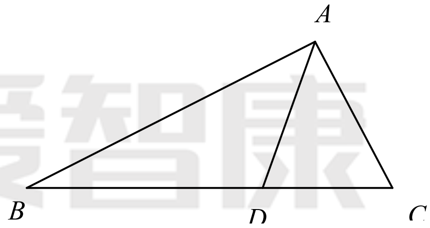
二、填空题：每小题 5 分，共 30 分．（第一空 3 分，第二空 2 分）

9. $\frac{2}{3}$　　**10.** $\sqrt{3}$　　**11.** $m>3$

12. $x=-2,\quad x^2-\frac{y^2}{3}=1$　　**13.** $\frac{\pi^2}{2}$　　**14.** $[-1,0),\quad (-1,0)\cup(0,+\infty)$

三、解答题：本大题共 6 小题，共 80 分．

15（共 13 分）



解：（Ⅰ）因为 $\cos\angle C=\frac{3}{5}$，C 是三角形内角

所以 $\sin\angle C=\sqrt{1-\cos^2\angle C}=\frac{4}{5}$．　………2 分

又因为 $\angle CAD=\frac{\pi}{4}$，所以 $\angle ADB=\angle C+\frac{\pi}{4}$．

$\sin\angle ADB=\sin(\angle C+\frac{\pi}{4})=\sin\angle C\cdot\cos\frac{\pi}{4}+\cos\angle C\cdot\sin\frac{\pi}{4}$ …………………5 分

$=\frac{4}{5}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{3}{5}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{7\sqrt{2}}{10}$．　…………………7 分

（Ⅱ）在 ΔACD 中，由 $\frac{DC}{\sin\angle CAD}=\frac{AD}{\sin\ C}$，　…………………9 分

得 $AD=\frac{DC\cdot\sin\angle C}{\sin\angle CAD}=\frac{\frac{5}{2}\cdot\frac{4}{5}}{\frac{\sqrt{2}}{2}}=2\sqrt{2}$．　…………………11 分

所以 $S_{\Delta ABD}=\frac{1}{2}AD\cdot BD\cdot\sin\angle ADB=\frac{1}{2}\cdot2\sqrt{2}\cdot5\cdot\frac{7\sqrt{2}}{10}=7$ ……………13 分

16（共 13 分）

（Ⅰ）从参加冬令营的 8 名学生中任选 4 名，有女生的概率为

$1-\frac{C_5^4}{C_8^4}=1-\frac{4}{\frac{8\times7\times6\times4}{4\times3\times2\times1}}=\frac{13}{14}$　…………………3 分

（Ⅱ）随机变量 X 的可能取值为 $0,1,2,3$，　　　　　　　　…………………4 分

$$P(X=0)=\frac{C_3^2C_2^2}{C_4^2C_4^2}=\frac{3}{36}=\frac{1}{12} \qquad P(X=1)=\frac{C_3^1C_1^1C_2^2+C_3^2C_2^1C_2^1}{C_4^2C_4^2}=\frac{15}{36}=\frac{5}{12}$$

$$P(X=2)=\frac{C_3^1C_2^1C_2^1+C_3^2C_2^2}{C_4^2C_4^2}=\frac{15}{36}=\frac{5}{12} \qquad P(X=3)=\frac{C_3^1C_1^1C_2^2}{C_4^2C_4^2}=\frac{3}{36}=\frac{1}{12}$$

…………………………………8 分

所以　X 的分布列为

X	0	1	2	3
P	$\frac{1}{12}$	$\frac{5}{12}$	$\frac{5}{12}$	$\frac{1}{12}$

…………………………………10 分

$$EX=0\times\frac{1}{12}+1\times\frac{5}{12}+2\times\frac{5}{12}+3\times\frac{1}{12}=\frac{3}{2}$$ …………………13 分

17（共 14 分）

（Ⅰ）取 AB 中点 G，连结 CG，

由已知可得 $ADCG$ 是平行四边形，所以 $CG=AD=\frac{1}{2}AB$，　所以　$AC\perp BC$

…………………1 分

又　平面 $ACEF\perp$ 平面 $ABCD$，平面 $ACEF\cap$ 平面 $ABCD=AC$

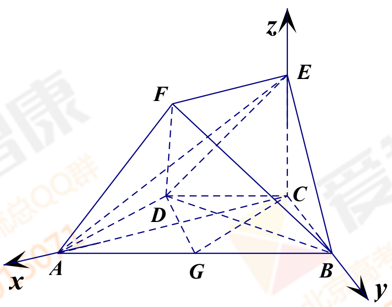
所以　$BC\perp$ 平面 $ACEF$，　　　　　　　　…………………3 分

又　AE　平面 $ACEF$，所以　$BC\perp AE$　　　　…………………4 分

（Ⅱ）因为　平面 $ACEF\perp$ 平面 $ABCD$，平面 $ACEF\cap$ 平面 $ABCD=AC$

　$EC\perp AC$

所以　$EC\perp$ 平面 $ABCD$，由（Ⅰ）知 $AC\perp BC$



如图，以 C 为坐标原点，以 CA,CB,CE 为 x,y,z 轴

建立空间直角坐标系，　　　　…………………5 分

$$C(0,0,0),B(0,1,0),E(0,0,1),F(\frac{\sqrt{3}}{2},0,1),D(\frac{\sqrt{3}}{2},-\frac{1}{2},0)$$

$\overrightarrow{EF}=(\frac{\sqrt{3}}{2},0,0),\overrightarrow{BE}=(0,-1,1),\overrightarrow{BD}=(\frac{\sqrt{3}}{2},-\frac{3}{2},0)$

设平面 BCE 的法向量为 $\vec{n}=(x,y,z)$，则

$\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{EF}=0\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{BE}=0\end{cases}$ 即 $\begin{cases}\frac{\sqrt{3}}{2}x=0\\ -y+z=0\end{cases}$ 所以 $\vec{n}=(0,1,1)$ …………………7 分

设平面 BDE 的法向量为 $\vec{m}=(x,y,z)$，则

$\begin{cases}\vec{m}\cdot\overrightarrow{BD}=0\\ \vec{m}\cdot\overrightarrow{BE}=0\end{cases}$ 即 $\begin{cases}\frac{\sqrt{3}}{2}x-\frac{3}{2}y=0\\ -y+z=0\end{cases}$ 所以 $\vec{m}=(\sqrt{3},1,1)$…………………9 分

$\cos<\vec{m},\vec{n}>=\frac{\vec{m}\cdot\vec{n}}{|\vec{m}||\vec{n}|}=\frac{2}{\sqrt{2}\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{10}}{5}$ …………………11 分

所以 二面角 $D-BE-F$ 的余弦值为 $\frac{\sqrt{10}}{5}$

（III）直线 DF 与平面 BCE 平行. …………………12 分

平面 BCE 的法向量为 $\vec{t}=(1,0,0)$，$\overrightarrow{DF}=(0,\frac{1}{2},1)$

因为 $\vec{t}\cdot\overrightarrow{DF}=0$ 所以 $\vec{t}\perp\overrightarrow{DF}$ 所以 $DF\parallel$ 平面 BCE

…………………………14 分

18（共 13 分）

解：（Ⅰ）当 $a=1$ 时，$f(x)=\frac{e^x}{x^2}$

$f'(x)=\frac{x^2e^x-2xe^x}{x^4}=\frac{e^x x(x-2)}{x^4}=\frac{e^x(x-2)}{x^3}\ (x\neq 0)$…………2 分

令 $f'(x)=0$ 得 $x=2$

$x,f(x),f'(x)$ 变化情况

x	$(\ \ ,0)$	$(0,2)$	$(2,\ \ )$
$f'(x)$	+	−	+
$f(x)$	增	减	增

所以 函数 $f(x)$ 增区间为 $(-\infty,0)$，$(2,+\infty)$，减区间为 $(0,2)$

…………………………5 分

（Ⅱ）方法一：$g(x)=\frac{ae^x}{x^2}-\frac{2}{x}-\ln x$

$g'(x)=\frac{axe^x-2ae^x}{x^3}+\frac{2}{x^2}-\frac{1}{x}=\frac{(ae^x-x)(x-2)}{x^3}$ ………7 分

当 $x\in(0,2)$ 时， $x-2<0, x^3>0$

若 $g(x)$ 在 $(0,2)$ 上有两个极值点， $g'(x)$ 在 $(0,2)$ 上至少有两零点，

即方程 $ae^x-x=0$ 在 $(0,2)$ 上至少有两个不等实根，

即方程 $a=\frac{x}{e^x}$ 在 $(0,2)$ 上至少有两个不等实根

设 $F(x)=\frac{x}{e^x}(x\in(0,2))$， $F'(x)=\frac{e^x-xe^x}{e^{2x}}=\frac{1-x}{e^x}$ ………8 分

解 $F'(x)=0$ 的 $x=1$

$F(x)$ 在 $(0,1)$ 上单增，在 $(1,2)$ 上单减

所以 $F(x)$ 在 $(0,2)$ 上的最大值为 $F(1)=\frac{1}{e}$

又 $F(0)=0, F(2)=\frac{2}{e^2}$ ……………………………………10 分

所以 要使方程 $a=\frac{x}{e^x}$ 有两个不等实根， a 的取值范围为 $(\frac{2}{e^2},\frac{1}{e})$

……………………………………11 分

设 $h(x)=ae^x-x$， 解 $h'(x)=ae^x-1=0$ 得 $x=\ln\frac{1}{a}$

当 $a\in(\frac{2}{e^2},\frac{1}{e})$ 时， $x=\ln\frac{1}{a}\in(0,2)$

且 $h(x)$ 在 $(0,\ln\frac{1}{a})$ 单调递减；在 $(\ln\frac{1}{a},2)$ 单调递增.

设 $x_1,x_2(x_1<x_2)$ 为方程 $ae^x-x=0$ 的两个不等实根，

则在 $(0,x_1)$ 上 $h(x)>0$，在 (x_1,x_2) 上 $h(x)<0$，在 $(x_2,2)$ 上 $h(x)>0$

所以在 $(0,x_1)$ 上 $g(x)<0$，在 (x_1,x_2) 上 $g(x)>0$，在 $(x_2,2)$ 上 $g(x)<0$

即 x_1,x_2 为 $g(x)$ 的两个极值点

综上所述，$g(x)$ 在 $(0,2)$ 内存在两个极值点时，a 的取值范围为 $(\frac{2}{e^2},\frac{1}{e})$.

……………………………………………13 分

方法二：

（II）$g(x)=\frac{ae^x}{x^2}-\frac{2}{x}-\ln x$，

$$g'(x)=\frac{axe^x-2ae^x}{x^3}+\frac{2}{x^2}-\frac{1}{x}=\frac{(ae^x-x)(x-2)}{x^3}$$

因为 $g(x)$ 在 $(0,2)$ 上有两个极值点，所以 $g'(x)$ 在 $(0,2)$ 上至少有两零点，

所以方程 $ae^x-x=0$，即方程 $\frac{1}{a}x=e^x$ 在 $(0,2)$ 上至少有两个不等实根，

所以直线 $y=\frac{1}{a}x$ 与曲线 $h(x)=e^x$ 在 $(0,2)$ 上有两个不同的交点

因为 $h(2)=e^2$，所以过点 $P(2,e^2)$ 和 $O(0,0)$ 的直线的斜率 $k_1=\frac{e^2}{2}$

设过点 $O(0,0)$ 的直线 l 与曲线 $h(x)=e^x$ 相切于点 (x_0,e^{x_0})

因为 $h'(x)=e^x$，所以直线 l 的斜率 $k_0=e^{x_0}$

所以直线 l 的方程为 $y-e^{x_0}=e^{x_0}(x-x_0)$

因为直线 l 过点 $O(0,0)$，所以 $x_0=1$，所以 $k_0=e$

因为直线 $y=\frac{1}{a}x$ 与曲线 $h(x)=e^x$ 在 $(0,2)$ 上有两个不同的交点

所以 $e<\frac{1}{a}<\frac{e^2}{2}$，即 $\frac{2}{e^2}<a<\frac{1}{e}$

设 $x_1,x_2(x_1<x_2)$ 为直线 $y=\frac{1}{a}x$ 与曲线 $h(x)=e^x$ 在 $(0,2)$ 上两个交点的横坐标，显然在 $(0,x_1)$ 上 $e^x-\frac{1}{a}x>0$，在 (x_1,x_2) 上 $e^x-\frac{1}{a}x<0$，在 $(x_2,2)$ 上 $e^x-\frac{1}{a}x>0$

所以在 $(0,x_1)$ 上 $g(x)<0$，在 (x_1,x_2) 上 $g(x)>0$，在 $(x_2,2)$ 上 $g(x)<0$

即 x_1,x_2 为 $g(x)$ 的两个极值点

所以当 $g(x)$ 在 $(0,2)$ 内有两个极值点时，a 的取值范围为 $(\frac{2}{e^2},\frac{1}{e})$.

方法三：$g(x)=\frac{ae^x}{x^2}-\frac{2}{x}-\ln x$

$$g'(x)=\frac{axe^x-2ae^x}{x^3}+\frac{2}{x^2}-\frac{1}{x}=\frac{(ae^x-x)(x-2)}{x^3}$$

当 $a<0$ 时，在区间 $(0,2)$ 上，$ae^x-x<0,x-2<0,x^3>0$

所以 $g'(x)>0$

从而 $g(x)$ 在区间 $(0,2)$ 上是增函数，故 $g(x)$ 在区间 $(0,2)$ 上无极值点；

当 $a>0$ 时，设 $h(x)=ae^x-x$，$x\in(0,2)$

若 $g(x)$ 在 $(0,2)$ 上有两个极值点，$g'(x)$ 在 $(0,2)$ 上至少有两零点，

即 $h(x)$ 在 $(0,2)$ 上至少有两零点

$h'(x)=ae^x-1$

令 $h'(x)=0$ 得 $x=\ln\frac{1}{a}$

当 $\ln\frac{1}{a}<0$ 即 $a>1$ 时，$x\in(0,2)$，$h'(x)=ae^x-1>0$，

所以 $h(x)$ 在 $x\in(0,2)$ 单调递增，$h(x)>h(0)=a>0$

故 $g(x)$ 在 $(0,2)$ 内不存在两个极值点.

当 $\ln\frac{1}{a}>2$ 即 $0<a<\frac{1}{e^2}$ 时，

$x\in(0,2)$，$h'(x)=ae^x-1<0$，

所以 $h(x)$ 在 $x\in(0,2)$ 单调递减，$h(0)=a>0,h(2)=ae^2-2<1-2<0$

所以 $h(x)$ 在 $(0,2)$ 上只有一个零点 x_0

$x\in(0,x_0)$，$g'(x)<0$，$x\in(x_0,2)$，$g'(x)>0$

所以 $x\in(0,x_0)$，$g(x)$ 单调增，$x\in(x_0,2)$，$g(x)$ 单调减

所以 $g(x)$ 在 $(0,2)$ 上只有一个极值点（$g(x)$ 在 $(0,2)$ 内不存在两个极值点）

当$0<\ln\frac{1}{a}<2$即$\frac{1}{e^2}<a<1$时，

$x\in(0,\ln\frac{1}{a})$时，$h'(x)<0$，$x\in(\ln\frac{1}{a},2)$，$h'(x)>0$

所以 $x\in(0,\ln\frac{1}{a})$时，函数$h(x)$单调递减；

$x\in(\ln\frac{1}{a},2)$，函数$h(x)$单调递增.

所以函数$h(x)$的最小值为$h(\ln\frac{1}{a})=ae^{\ln\frac{1}{a}}-\ln\frac{1}{a}$.

函数$g(x)$在$(0,2)$内存在两个极值点

当且仅当$\begin{cases}h(0)>0\\h(\ln\frac{1}{a})<0\\h(2)>0\end{cases}$ 解得$\frac{2}{e^2}<a<\frac{1}{e}$.

综上所述，函数$g(x)$在$(0,2)$内存在两个极值点时，a的取值范围为$(\frac{2}{e^2},\frac{1}{e})$.

19（共 14 分）

解：（Ⅰ）因为长轴长是焦距的$\sqrt{2}$倍，所以$2a=2\sqrt{2}c$，即$a=\sqrt{2}c$

又因为椭圆过点$(0,1)$，所以$b=1$

由$a^2=b^2+c^2$，得$a=\sqrt{2},c=1$

所以椭圆的标准方程为：$\frac{x^2}{2}+y^2=1$ ……………………4 分

（Ⅱ）由（Ⅰ）得$F(-1,0)$，

当直线AB垂直于x轴时，直线AB的方程是$x=-1$

由$\begin{cases}x=-1\\\frac{x^2}{2}+y^2=1\end{cases}$得$y=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$

所以$|AB|=2|y|=\sqrt{2}$，又$|OF|=c=1$

因为$\frac{|AB|}{2}<|OF|$

所以点O在以线段AB为直径的圆外 ……………………8 分

方法二：点 A,B 的坐标为 $(-1,\frac{\sqrt{2}}{2}),(-1,-\frac{\sqrt{2}}{2})$

$$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=|\overrightarrow{OA}||\overrightarrow{OB}|\cos\angle AOB=(-1,\frac{\sqrt{2}}{2})\cdot(-1,-\frac{\sqrt{2}}{2})=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}>0$$

所以 $\cos\angle AOB>0$，即 $\angle AOB$ 为锐角.所以点 O 在以线段 AB 为直径的圆外

（III）设直线 AB 的方程为 $y=k(x+1)$，$A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，

由 $\begin{cases} y=k(x+1) \\ \frac{x^2}{2}+y^2=1 \end{cases}$ 得 $(2k^2+1)x^2+4k^2x+2k^2-2=0$

所以 $x_1+x_2=-\frac{4k^2}{2k^2+1},x_1x_2=\frac{2k^2-2}{2k^2+1}$

方法一：因为点 O 在以线段 AB 为直径的圆内，

所以 $\angle AOB$ 为钝角，所以 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}<0$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}&=x_1x_2+y_1y_2=x_1x_2+k(x_1+1)k(x_2+1)\\&=(1+k^2)x_1x_2+k^2(x_1+x_2)+k^2\\&=\frac{2(k^2-1)(k^2+1)}{2k^2+1}+\frac{-4k^4}{2k^2+1}+k^2<0\end{aligned}$$

整理得 $k^2<2$

所以 $-\sqrt{2}<k<\sqrt{2}$

………………………………………………………14 分

方法二：线段 AB 的中点 $M(x_0,y_0)$，则

$$x_0=\frac{x_1+x_2}{2}=-\frac{2k^2}{2k^2+1},\quad y_0=k(-\frac{2k^2}{2k^2+1}+1)=\frac{k}{2k^2+1}$$

$$|AB|=\sqrt{(1+k^2)\left[(x_1+x_2)^2-4x_1x_2\right]}=\sqrt{(1+k^2)\left[\left(-\frac{4k^2}{2k^2+1}\right)^2-\frac{8k^2-8}{2k^2+1}\right]}$$

$$=\sqrt{\frac{8(k^2+1)^2}{(2k^2+1)^2}}=\frac{k^2+1}{2k^2+1}$$

$$|OM|=\sqrt{{x_0}^2+{y_0}^2}=\sqrt{\frac{4k^4+k^2}{(2k^2+1)^2}}$$

因为点 O 在以线段 AB 为直径的圆内，所以 $|AB|>2|OM|$

所以$|AB|^2>4|OM|^2$

所以$\dfrac{8(k^2+1)^2}{(2k^2+1)^2}>\dfrac{4(4k^4+k^2)}{(2k^2+1)^2}$

$2k^4-3k^2-2<0$

$0\le k^2<2$

所以$-\sqrt{2}<k<\sqrt{2}$

20（共 13 分）

解：（Ⅰ）$a_1=m=-1$，　$a_2=f(a_1)=\dfrac{1}{1+1}=\dfrac{1}{2}$

$a_3=f(a_2)=\dfrac{(\frac{1}{2})^2}{1-\frac{1}{2}}=\dfrac{1}{2}$

所以 数列$\{a_n\}$的通项公式为$a_n=\begin{cases}-1, & n=1\\ \frac{1}{2}, & n\ge 2\end{cases}$ ……………………3 分

（Ⅱ）由已知 $a_1=m$，$a_{n+1}=f(a_n)=\dfrac{a_n^2}{1-a_n}$

所以$a_2=\dfrac{m^2}{1-m}$，$a_3=\dfrac{a_2^2}{1-a_2}$，

假设存在实数m，使数列$\{a_n\}$为等比数列，

则必有$a_2^2=a_1a_3$，且$a_n\ne 0, a_n\ne 1$

所以$a_2^2=a_1\dfrac{a_2^2}{1-a_2}$，即$1-a_2=a_1$，$1-\dfrac{m^2}{1-m}=m$　　解得　$m=\dfrac{1}{2}$

因为当$m=\dfrac{1}{2}$时，$a_1=\dfrac{1}{2}$，$a_{n+1}=f(a_n)=\dfrac{1}{2}$，数列$\{a_n\}$为等比数列，

所以存在$m=\dfrac{1}{2}$，使得数列$\{a_n\}$是等比数列 ……………………6 分

（注：只写出当 $m=\frac{1}{2}$ 时，数列 $\{a_n\}$ 是等比数列，没有说明理由，只给 1 分）

（III）因为 $a_1=m$，$0<m<\frac{1}{2}$，$a_{n+1}=f(a_n)=\frac{a_n^2}{1-a_n}$

所以 $a_n\neq 0$ 且 $a_{n+1}-a_na_{n+1}=a_n^2$，即 $a_{n+1}=a_n^2+a_na_{n+1}=a_n\left(a_{n+1}+a_n\right)$

所以 $a_{n+1}+a_n=\frac{a_{n+1}}{a_n}$ …………………8 分

所以 $\prod_{i=1}^{n}(a_{i+1}+a_i)=\frac{a_2}{a_1}\cdot\frac{a_3}{a_2}\cdot\frac{a_4}{a_3}\cdots\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{a_{n+1}}{a_1}=\frac{a_{n+1}}{m}$ …………………9 分

设 $y=2x^2+x-1=2\left(x+\frac{1}{4}\right)^2-\frac{9}{4}$

当 $0<x<\frac{1}{2}$ 时，$y<0$，所以 $0<2x^2<1-x$

即当 $0<x<\frac{1}{2}$ 时，$0<\frac{x^2}{1-x}<\frac{1}{2}$ …………………11 分

所以当 $0<m<\frac{1}{2}$ 时，$0<a_{n+1}<\frac{1}{2}$ …………………12 分

$\prod_{i=1}^{n}(a_{i+1}+a_i)=\frac{a_{n+1}}{m}<\frac{1}{2m}$

……………………………………13 分