



丰台区 2015 年高三年级第二学期统一练习（二）

2016.5

数学（理科）

第一部分（选择题 共 40 分）

选择题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项。

1. 已知集合 $A = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 < x < 1\}$, $B = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 2x < 0\}$, 那么 $A \cap B =$

- (A) $(-2, 0)$ (B) $(-2, 1)$ (C) $(0, 2)$ (D) $(0, 1)$

2. 极坐标方程 $\rho = 2\cos\theta$ 表示的圆的半径是

- (A) $\frac{1}{2}$ (B) $\frac{1}{4}$ (C) 2 (D) 1

3. “ $x > 0$ ”是“ $x^2 + \frac{1}{x^2} \geq 2$ ”的

- (A) 充分而不必要条件 (B) 必要而不充分条件
(C) 充分必要条件 (D) 既不充分也不必要条件

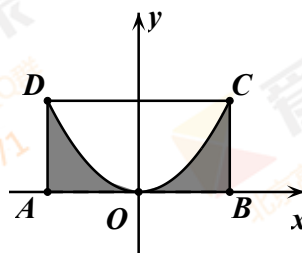
4. 已知向量 $\vec{a} = (\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$, $\vec{b} = (-\sqrt{3}, 1)$, $\vec{c} = \vec{a} + \lambda\vec{b}$, 则 $\vec{c} \cdot \vec{a}$ 等于_____.

- (A) λ (B) $-\lambda$ (C) 1 (D) -1

5. 如图，设不等式组 $\begin{cases} -1 \leq x \leq 1, \\ 0 \leq y \leq 1 \end{cases}$ 表示的平面区域为长方形 $ABCD$ ，长方形 $ABCD$ 内的曲线

为抛物线 $y = x^2$ 的一部分，若在长方形 $ABCD$ 内随机取一个点，则此点取自阴影部分的概率等于

- (A) $\frac{2}{3}$
(B) $\frac{1}{3}$
(C) $\frac{1}{2}$
(D) $\frac{1}{4}$



6. 要得到 $g(x) = \log_2(2x)$ 的图象，只需将函数 $f(x) = \log_2 x$ 的图象

- (A) 向上平移 1 个单位 (B) 向下平移 1 个单位
(C) 向左平移 1 个单位 (D) 向右平移 1 个单位

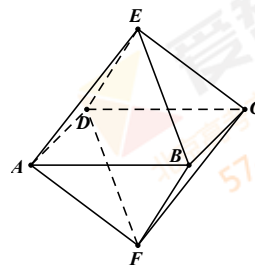
7. 已知等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n ，则下列结论中一定成立的

- (A) 若 $a_5 > 0$, 则 $a_{2015} < 0$ (B) 若 $a_5 > 0$, 则 $S_{2015} > 0$
(C) 若 $a_6 > 0$, 则 $a_{2016} < 0$ (D) 若 $a_6 > 0$, 则 $S_{2016} > 0$



8. 如图, 已知一个八面体的各条棱长均为 1, 四边形 $ABCD$ 为正方形, 给出下列命题:

- ① 不平行的两条棱所在的直线所成的角是 60° 或 90° ;
- ② 四边形 $AECF$ 是正方形;
- ③ 点 A 到平面 BCE 的距离为 1.



其中正确的命题有

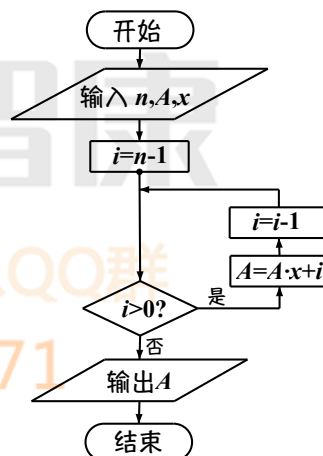
- (A) 0 个 (B) 1 个
(C) 2 个 (D) 3 个

第二部分 (非选择题 共 110 分)

二、填空题共 6 小题, 每小题 5 分, 共 30 分.

9. 在复平面内, 点 A 对应的复数是 $2+i$. 若点 A 关于实轴的对称点为点 B , 则点 B 对应的复数为 _____.

10. 执行右侧程序框图, 输入 $n=4, A=4, x=2$, 输出结果 A 等于 _____.



11. 已知点 $P(t, 4)$ 在抛物线 $y^2 = 4x$ 上, 抛物线的焦点为 F , 那么 $|PF| =$ _____.

12. 已知等差数列 $\{a_n\}$ 的公差不为零, 且 $a_2 + a_3 = a_6$, 则 $\frac{a_1 + a_2}{a_3 + a_4 + a_5} =$ _____.

13. 安排 6 志愿者去做 3 项不同的工作, 每项工作需要 2 人, 由于工作需要, A, B 二人必须做同一项工作, C, D 二人不能做同一项工作, 那么不同的安排方案有 _____ 种.

14. 已知 $x = 1, x = 3$ 是函数 $f(x) = \sin(\omega x + \varphi) (\omega > 0)$ 两个相邻的两个极值点, 且 $f(x)$ 在 $x = \frac{3}{2}$ 处的导数 $f'(\frac{3}{2}) < 0$, 则 $f(\frac{1}{3}) =$ _____;



三、解答题共 6 小题，共 80 分。解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程。

15. (本小题共 13 分)

设 $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c ，且 $a \cos C + \frac{1}{2}c = b$ 。

(I) 求角 A 的大小；

(II) 若 $a = \sqrt{21}$ ， $b = 5$ ，求 c 的值。

16. (本小题共 13 分)

某地区人民法院每年要审理大量案件，去年审理的四类案件情况如下表所示：

编号	项目	收案 (件)	结案(件)	
			判决(件)	其他(件)
1	刑事案件	2400	2400	2400
2	婚姻家庭、继承纠纷案件	3000	2900	1200
3	权属、侵权纠纷案件	4100	4000	2000
4	合同纠纷案件	14000	13000	n

其中结案包括：法庭调解案件、撤诉案件、判决案件等。根据以上数据，回答下列问题。

(I) 在编号为 1、2、3 的收案案件中随机取 1 件，求该件是结案案件的概率；

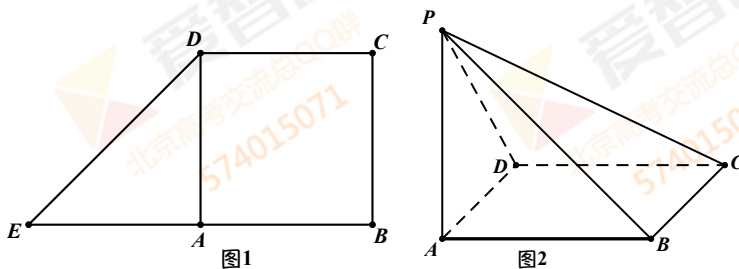
(II) 在编号为 2 的结案案件中随机取 1 件，求该件是判决案件的概率；

(III) 在编号为 1、2、3 的三类案件中，判决案件数的平均数为 \bar{x} ，方差为 S_1^2 ，如果表中 $n = \bar{x}$ ，

表中全部 (4 类) 案件的判决案件数的方差为 S_2^2 ，试判断 S_1^2 与 S_2^2 的大小关系，并写出你的结论 (结论不要求证明)。

17. (本小题共 14 分)

如图 1，已知四边形 $BCDE$ 为直角梯形， $\angle B = 90^\circ$ ， $BE \parallel CD$ ，且 $BE = 2CD = 2BC = 2$ ， A 为 BE 的中点。将 $\triangle EDA$ 沿 AD 折到 $\triangle PDA$ 位置 (如图 2)，连结 PC, PB 构成一个四棱锥 $P-ABCD$ 。



(I) 求证 $AD \perp PB$ ；

(II) 若 $PA \perp$ 平面 $ABCD$ 。

① 求二面角 $B-PC-D$ 的大小；

② 在棱 PC 上存在点 M ，满足 $\overrightarrow{PM} = \lambda \overrightarrow{PC}$ ($0 \leq \lambda \leq 1$)，使得直线 AM 与平面 PBC 所成的角为 45° ，求 λ 的值。



18. (本小题共 13 分)

设函数 $f(x) = e^{ax}$ ($a \in \mathbb{R}$).

(I) 当 $a = -2$ 时, 求函数 $g(x) = x^2 f(x)$ 在区间 $(0, +\infty)$ 内的最大值;

(II) 若函数 $h(x) = \frac{x^2}{f(x)} - 1$ 在区间 $(0, 16)$ 内有两个零点, 求实数 a 的取值范围.

19. (本小题共 13 分)

已知椭圆 $C: \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$.

(I) 求椭圆 C 的离心率;

(II) 若椭圆 C 与直线 $y = x + m$ 交于 M, N 两点, 且 $|MN| = \frac{12\sqrt{2}}{7}$, 求 m 的值;

(III) 若点 $A(x_1, y_1)$ 与点 $P(x_2, y_2)$ 在椭圆 C 上, 且点 A 在第一象限, 点 P 在第二象限, 点 B 与点 A 关于原点对称, 求证: 当 $x_1^2 + x_2^2 = 4$ 时, 三角形 $\triangle PAB$ 的面积为定值.

20. (本小题共 13 分)

对于数对序列 $P: (a_1, b_1), (a_2, b_2), \dots, (a_n, b_n)$, ($a_i, b_i \in \mathbb{R}^+, i = 1, 2, 3, \dots, n$), 记 $f_0(y) = 0 (y \geq 0)$, $f_k(y) = \max_{x_k=0,1,2,3,\dots,m} \{b_k x_k + f_{k-1}(y - a_k x_k)\} (y \geq 0, 1 \leq k \leq n)$, 其中 m

为不超过 $\frac{y}{a_k}$ 的最大整数. (注: $\max_{x_k=0,1,2,3,\dots,m} \{b_k x_k + f_{k-1}(y - a_k x_k)\}$ 表示当 x_k 取 $0, 1, 2, 3, \dots, m$

时, $b_k x_k + f_{k-1}(y - a_k x_k)$ 中的最大数)

已知数对序列 $P: (2, 3), (3, 4), (3, p)$, 回答下列问题:

(I) 写出 $f_1(7)$ 的值;

(II) 求 $f_2(7)$ 的值, 以及此时的 x_1, x_2 的值;

(III) 求得 $f_3(11)$ 的值时, 得到 $x_1 = 4, x_2 = 0, x_3 = 1$, 试写出 p 的取值范围. (只需写出结论, 不用说明理由).

注: 下面的内容不在试卷上, 共讲评时参考

(1) 8 题原来命制的如下:

已知一个八面体 (如图), 它们的各条棱长均为 $a, ABCD$ 为正方形. 给出下列命题:

①若 P, Q 分别是不相交的两条棱上的点, 则 $|PQ|$ 的最小值为 a ;

②不平行的两条棱所成的角是 60° 或 90° ;

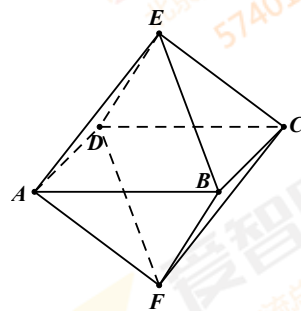
③共面四点组成的四边形是正方形.

其中正确的命题有

(A) 0 个 (B) 1 个 (C) 2 个 (D) 3 个

(2) 19 题 (II) 原来命制如下:

(II) 已知点 $P(x_1, y_1)$ 和点 $A(x_2, y_2)$ 都在椭圆 C 上, 且 $x_1 x_2 < 0, y_1 > 0, y_2 > 0$, 点 B 与点 A





关于坐标原点对称, 求证: 当 $x_1^2 + x_2^2 = 4$ 时, 三角形 $\triangle ABC$ 的面积取得最大值.

(3) 20 题的实际模型为文科 14 题.



爱智康

北京高考交流总QQ群

574015071



得: $\sin A \cos C + \frac{1}{2} \sin C = \sin B$. -----2分

化简 $\sin A \cos C + \frac{1}{2} \sin C = \sin(A+C)$ -----4分

解得: $\cos A = \frac{1}{2}$, -----6分

因为 $0^\circ < A < 180^\circ$, 所以 $A = 60^\circ$. -----7分

(II) 由余弦定理得: $21 = 25 + c^2 - 5c$, 即 $c^2 - 5c + 4 = 0$. -----10分

解得 $c = 1$ 和 $c = 4$, -----12分

经检验 1, 4 都是解, 所以 c 的值是 1 和 4. -----13分

16. (本小题共 13 分)

解:

(I) 在编号为 1、2、3 的收案案件中随机取 1 件, 共有 $2400+3000+4100=9500$ 种取法, 其中取到的是结案案件方法数为 $2400+2900+4000=9300$ 种 -----3分

设“在收案案件中取 1 件结案案件”为事件 A , 则 $P(A) = \frac{93}{95}$. -----5分

(II) 在该结案案件中任取一件共有 2900 种取法, 其中是判决案件有 1200 种取法. -----8分

设“在该结案案件中取 1 件判决案件”为事件 B , 则 $P(B) = \frac{12}{29}$. -----10分

(注: 讲评时应告诉学生这个概率低是因为人民法院做了大量工作如法庭调解案件、使得当事人撤诉等工作, 有时法律不能解决感情问题)

(III) $S_1^2 > S_2^2$. -----13分

(可以简单直观解释, 也可以具体:

设 4 类案件的均值为 \bar{X} , 则 $\bar{X} = \frac{3x + x}{4} = \bar{x}$.

$$S_2^2 = \frac{(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + (x_3 - \bar{x})^2 + (x_4 - \bar{x})^2}{4}$$



爱智康

北京高考交流总QQ群

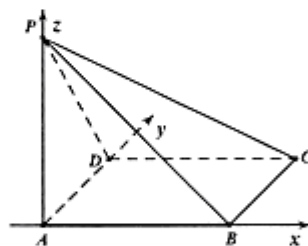
574015071



所以 $ABCD$ 为平行四边形, 所以 $AD \parallel BC$,
 因为 $\angle B = 90^\circ$, 所以 $AD \perp BE$, 当三角形 EDA 沿 AD 折起时, $AD \perp AB$, $AD \perp AE$,
 即: $AD \perp AB$, $AD \perp PA$, -----3分
 又 $AB \cap PA = A$.
 所以 $AD \perp$ 平面 PAB , -----4分
 又因为 PB 在平面 PAB 上, 所以 $AD \perp PB$. -----5分

(II)

①以点 A 为坐标原点, 分别以 AB , AD , AP 为 x, y, z 轴建立空间直角坐标系, 如图. -----6分
 则 $A(0,0,0)$, $B(1,0,0)$, $C(1,1,0)$, $P(0,0,1)$.
 即 $\overrightarrow{PC} = (1,1,-1)$, $\overrightarrow{BC} = (0,1,0)$, $\overrightarrow{DC} = (1,0,0)$



-----7分

设平面 PBC 的法向量为 $\vec{n} = (x, y, z)$, 则

$$\begin{cases} \overrightarrow{PC} \cdot \vec{n} = 0, \\ \overrightarrow{BC} \cdot \vec{n} = 0 \end{cases}, \text{ 所以 } \begin{cases} x + y - z = 0, \\ y = 0. \end{cases}, \text{ 取 } z = 1, \text{ 取 } x = 1, \text{ -----8分}$$

所以 $\vec{n} = (1, 0, 1)$; 同理求得平面 PCD 的法向量 $\vec{m} = (0, -1, -1)$.

设二面角 $B-PC-D$ 为 α , 所以 $\cos \alpha = \frac{|\vec{n} \cdot \vec{m}|}{|\vec{n}| \cdot |\vec{m}|} = \frac{-1}{2}$, -----9分

所求二面角 $B-PC-D$ 为 120° . -----10分

北京高考交流总QQ群
574015071



最大值 $g(1) = \frac{1}{e^2}$. -----5分

(II)

(1) 当 $a = 0$ 时, $h(x) = x^2 - 1$, 显然在区间 $(0, 16)$ 内没有两个零点, $a = 0$ 不合题意. -----6分

(2) 当 $a \neq 0$ 时, $h(x) = \frac{x^2}{e^{ax}} - 1$, $h'(x) = \frac{(2x - ax^2)e^{ax}}{e^{2ax}} = \frac{-ax(x - \frac{2}{a})}{e^{ax}}$. -----8分

① 当 $a < 0$ 且 $x \in (0, 16)$ 时, $h'(x) > 0$, 函数 $h(x)$ 区间 $(0, +\infty)$ 上是增函数, 所以函数 $h(x)$ 区间 $(0, 16)$ 上不可能有两个零点, 所以 $a < 0$ 不合题意; -----9分

② 当 $a > 0$ 时, 在区间 $(0, +\infty)$ 上 x 与 $h'(x)$ 、 $h(x)$ 之间的关系如下表:

x	$(0, \frac{2}{a})$	$\frac{2}{a}$	$(\frac{2}{a}, +\infty)$
$h'(x)$	+	0	-
$h(x)$	增函数	极大值	减函数

-----10分

因为 $h(0) = -1$, 若函数 $h(x)$ 区间 $(0, 16)$ 上有两个零点,

$$\text{则} \begin{cases} h(\frac{2}{a}) > 0, \\ \frac{2}{a} < 16, \\ h(16) < 0 \end{cases}, \text{ 所以} \begin{cases} \frac{4}{e^2 a^2} - 1 > 0, \\ a > \frac{1}{8}, \\ \frac{2^8}{e^{16a}} - 1 < 0 \end{cases}, \text{ 化简} \begin{cases} 0 < a < \frac{2}{e}, \\ a > \frac{1}{8}, \\ a > \frac{\ln 2}{2} \end{cases}. \quad \text{-----11分}$$

$$\text{因为} \frac{1}{8} < \frac{\ln 2}{2} \Leftrightarrow 1 < 4 \ln 2 \Leftrightarrow 1 < \ln 16 \Leftrightarrow e < 16.$$



北京高考交流总QQ群

574015071



(III) 直线 AB 的方程为 $y = \frac{y_1}{x_1}x$, 即 $y_1x - x_1y = 0$.

点 $P(x_2, y_2)$ 到直线 AB 的距离 $d = \frac{|x_2y_1 - y_2x_1|}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2}}$, $|AB| = 2\sqrt{x_1^2 + y_1^2}$9分

$S_{\Delta PAB} = \frac{1}{2}|AB|d = \sqrt{x_1^2 + y_1^2} \frac{|x_2y_1 - y_2x_1|}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2}} = |y_2x_1 - x_2y_1|$. -----10分

因为 $x_1 > 0, x_2 < 0, y_1 > 0, y_2 > 0$,

$y_1^2 = \frac{3}{4}(4 - x_1^2), y_2^2 = \frac{3}{4}(4 - x_2^2), y_1 = \frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{4 - x_1^2}, y_2 = \frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{4 - x_2^2}$. -12分

所以 $|y_2x_1 - x_2y_1| = y_2|x_1| + y_1|x_2|$ -----13分

$$= \frac{\sqrt{3}}{2}(\sqrt{4 - x_1^2}|x_2| + \sqrt{4 - x_2^2}|x_1|)$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2}(x_2^2 + x_1^2).$$

$$= 2\sqrt{3}.$$

所以当 $x_1^2 + x_2^2 = 4$ 时, 三角形 ΔPAB 的面积为定值 $2\sqrt{3}$. -----14分

(III) 方法二: 设直线 AB 的方程为 $y = kx$, 即 $kx - y = 0$.

$$\begin{cases} kx - y = 0, \\ 3x^2 + 4y^2 = 12 \end{cases}, \text{解得 } x_1^2 = \frac{12}{3 + 4k^2}.$$

$$|AB| = 2\sqrt{x_1^2 + k^2x_1^2} = 2|x_1|\sqrt{1 + k^2}.$$

点 $P(x_2, y_2)$ 到直线 AB 的距离 $d = \frac{|kx_2 - y_2|}{\sqrt{k^2 + 1}}$.

4



爱智康

北京高考交流总QQ群

574015071





$$S_{\Delta PAB} = \frac{1}{2} |AB| |d| = |x_1| \sqrt{1+k^2} \times \frac{|kx_2 - y_2|}{\sqrt{k^2+1}} = |x_1| |kx_2 - y_2|, \text{-----10分}$$

因为 $x_1 > 0, x_2 < 0, y_1 > 0, y_2 > 0$, 则 $k > 0$.

$$\text{所以 } x_1 = \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{3+4k^2}}, \quad x_2 = -\sqrt{4-x_1^2} = \frac{-4k}{\sqrt{3+4k^2}},$$

$$y_2 = \frac{\sqrt{3}}{2} \sqrt{4-x_2^2} = \frac{\sqrt{3}}{2} x_1 = \frac{3}{\sqrt{3+4k^2}}, \text{-----12分}$$

$$kx_2 - y_2 = k \times \left(\frac{-4k}{\sqrt{3+4k^2}} \right) - \frac{3}{\sqrt{3+4k^2}} = -\sqrt{3+4k^2}$$

$$S_{\Delta PAB} = |x_1| |kx_2 - y_2| = \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{3+4k^2}} \times \sqrt{3+4k^2} = 2\sqrt{3}.$$

所以三角形 ΔPAB 的面积为定值. -----14分

20. (本小题共 13 分)

解:

$$(I) f_1(7) = \max_{x_1=0,1,2,3} \{3x_1\} = \max\{0, 3, 6, 9\} = 9, \text{ 当 } x_1 = 3 \text{ 时, } f_1(7) = 9. \text{-----4分}$$

$$(II) f_2(7) = \max_{x_2=0,1,2} \{4x_2 + f_1(7-3x_2)\},$$

$$= \max\{0 + f_1(7), 4 + f_1(4), 8 + f_1(1)\}$$

$$\text{当 } x_2 = 1 \text{ 时, } f_1(4) = \max_{x_1=0,1,2} \{3x_1\} = \max\{0, 3, 6\} = 6, \text{ 当 } x_1 = 2 \text{ 时 } f_1(4) = 6.$$

$$\text{当 } x_2 = 2 \text{ 时, } f_1(1) = \max_{x_1=0} \{2x_1\} = 0, \text{ 即当 } x_1 = 0 \text{ 时, } f_1(1) = 0.$$

$$f_2(7) = \max\{9, 4+6, 8+0\} = 10, \text{ 即当 } x_2 = 1, x_1 = 2 \text{ 时 } f_2(7) = 10. \text{-----10分}$$

(III) 答: $4 < p \leq 4.5$. -----13分