



海淀区高三年级第二学期期末练习

数学(理科) 2016.5

本试卷共4页,150分。考试时长120分钟。考生务必将答案答在答题卡上,在试卷上作答无效。考试结束后,将本试卷和答题卡一并交回。

一、选择题共8小题,每小题5分,共40分。在每小题列出的四个选项中,选出符合题目要求的一项。

1. 已知全集 $U=\mathbf{R}$, $M=\{x|x\leq 1\}$, $P=\{x|x\geq 2\}$, 则 $_{U}(M\cup P)=$

- A. $\{x|1<x<2\}$ B. $\{x|x\geq 1\}$ C. $\{x|x\leq 2\}$ D. $\{x|x\leq 1\text{或}x\geq 2\}$

2. 在数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1=2$, 且 $(n+1)a_n=na_{n+1}$, 则 a_3 的值为

- A. 5 B. 6 C. 7 D. 8

3. 若点 $P(2,4)$ 在直线 $l: \begin{cases} x=1+t, \\ y=3-at \end{cases}$ (t 为参数) 上, 则 a 的值为

- A. 3 B. 2 C. 1 D. -1

4. 在 $\triangle ABC$ 中, $\cos A=\frac{3}{5}$, $\cos B=\frac{4}{5}$, 则 $\sin(A-B)=$

- A. $-\frac{7}{25}$ B. $\frac{7}{25}$ C. $-\frac{9}{25}$ D. $\frac{9}{25}$

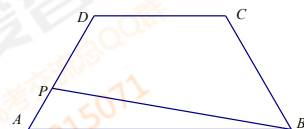
5. 在 $(x+a)^5$ (其中 $a\neq 0$) 的展开式中, x^2 的系数与 x^3 的系数相同, 则 a 的值为

- A. -2 B. -1 C. 1 D. 2

6. 函数 $f(x)=\ln x-x+1$ 的零点个数是

- A. 1个 B. 2个 C. 3个 D. 4个

7. 如图, 在等腰梯形 $ABCD$ 中, $AB=8$, $BC=4$, $CD=4$. 点 P 在线段 AD 上运动,



则 $|PA+PB|$ 的取值范围是

- A. $[6, 4+4\sqrt{3}]$ B. $[4\sqrt{2}, 8]$ C. $[4\sqrt{3}, 8]$ D. $[6, 12]$

8. 直线 $l: ax + \frac{1}{a}y - 1 = 0$ 与 x, y 轴的交点分别为 A, B , 直线 l 与圆 $O: x^2 + y^2 = 1$ 的交点为 C, D .

给出下面三个结论:

- ① $\forall a \geq 1, S_{\triangle AOB} = \frac{1}{2}$; ② $\exists a \geq 1, |AB| < |CD|$; ③ $\exists a \geq 1, S_{\triangle COD} < \frac{1}{2}$



则所有正确结论的序号是

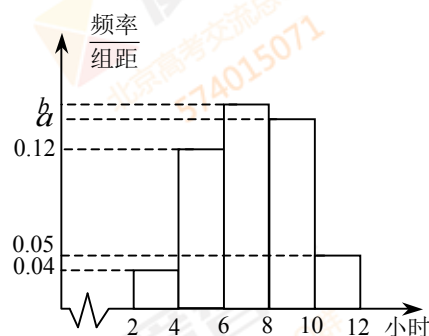
A. ①② B. ②③

C. ①③ D. ①②③

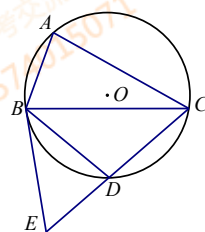
二、填空题共 6 小题，每小题 5 分，共 30 分。

9. 已知 $\frac{2}{a+i} = 1-i$, 其中 i 为虚数单位, $a \in \mathbf{R}$, 则 $a = \underline{\hspace{1cm}}$.

10. 某校为了解全校高中同学五一小长假参加实践活动的情况, 抽查了 100 名同学, 统计他们假期参加实践活动的时间, 绘成频率分布直方图 (如图). 则这 100 名同学中参加实践活动时间在 6~10 小时内的人数为 $\underline{\hspace{1cm}}$.

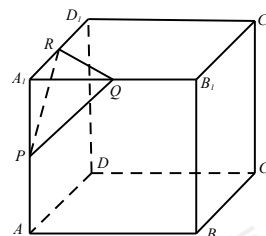


11. 如图, A, B, C 是 $\odot O$ 上的三点, 点 D 是劣弧 BC 的中点, 过点 B 的切线交弦 CD 的延长线交 BE 于点 E . 若 $\angle BAC = 80^\circ$, 则 $\angle BED = \underline{\hspace{1cm}}$.



12. 若点 $P(a, b)$ 在不等式组 $\begin{cases} x+y-2 \leq 0, \\ x-y-2 \leq 0, \\ x \geq 1 \end{cases}$ 所表示的平面区域内, 则原点 O 到直线 $ax+by-1=0$ 距离的取值范围是 $\underline{\hspace{1cm}}$.

13. 已知点 $A(\frac{\pi}{6}, \frac{\sqrt{3}}{2}), B(\frac{\pi}{4}, 1), C(\frac{\pi}{2}, 0)$, 若这三个点中有且仅有两个点在函数 $f(x) = \sin \omega x$ 的图象上, 则正数 ω 的最小值为 $\underline{\hspace{1cm}}$.



14. 正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 1, 点 P, Q, R 分别是棱 AA_1, A_1B_1, A_1D_1 的中点, 以 $\triangle PQR$ 为底面作正三棱柱, 若此三棱柱另一底面三个顶点也都在该正方体的表面上, 则这个正三棱柱的高 $h = \underline{\hspace{1cm}}$.



三、解答题共 6 小题，共 80 分。解答应写出文字说明、演算步骤或证明过程。

15. (本小题满分 13 分)

已知函数 $f(x) = -2\sin x - \cos 2x$.

(I) 比较 $f(\frac{\pi}{4})$, $f(\frac{\pi}{6})$ 的大小;

(II) 求函数 $f(x)$ 的最大值.

16. (本小题满分 13 分)

某家电专卖店试销 A、B、C 三种新型空调，销售情况如下表所示：

	第一周	第二周	第三周	第四周	第五周
A 型数量 (台)	11	10	15	A_4	A_5
B 型数量 (台)	10	12	13	B_4	B_5
C 型数量 (台)	15	8	12	C_4	C_5

(I) 求 A 型空调前三周的平均周销售量;

(II) 根据 C 型空调连续 3 周销售情况，预估 C 型空调连续 5 周的平均周销量为 10 台.

请问：当 C 型空调周销售量的方差最小时，求 C_4 , C_5 的值;

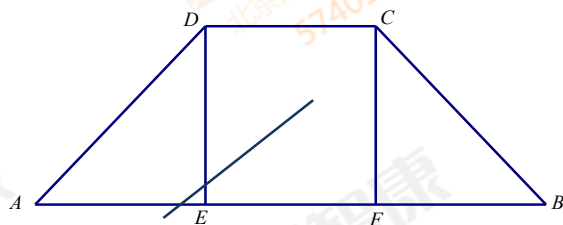
(注：方差 $s^2 = \frac{1}{n}[(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \dots + (x_n - \bar{x})^2]$ ，其中 $\bar{x}$ 为 $x_1, x_2, \dots, x_n$ 的平均数)

(III) 为跟踪调查空调的使用情况，根据销售记录，从该家电专卖店第二周和第三周售出的空调中分别随机抽取一台，求抽取的两台空调中 A 型空调台数 X 的分布列和数学期望.



17. (本小题满分 14 分)

如图, 等腰梯形 $ABCD$ 中, $AB \parallel CD$, $DE \perp AB$ 于 E , $CF \perp AB$ 于 F , 且 $AE = BF = EF = 2$, $DE = CF = 2$. 将 $\triangle AED$ 和 $\triangle BFC$ 分别沿 DE 、 CF 折起, 使 A 、 B 两点重合, 记为点 M , 得到一个四棱锥 $M-CDEF$, 点 G , N , H 分别是 MC , MD , EF 的中点.



(I) 求证: $GH \parallel$ 平面 DEM ;

(II) 求证: $EM \perp CN$;

(III) 求直线 GH 与平面 NFC 所成的角的大小.

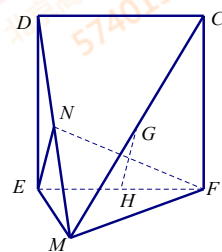
18. (本小题满分 14 分)

已知函数 $f(x) = e^x(x^2 + ax + a)$.

(I) 当 $a = 1$ 时, 求函数 $f(x)$ 的单调区间;

(II) 若关于 x 的不等式 $f(x) \leq e^a$ 在 $[a, +\infty)$ 上有解, 求实数 a 的取值范围;

(III) 若曲线 $y = f(x)$ 存在两条互相垂直的切线, 求实数 a 的取值范围. (只需直接写出结果)



19. (本小题满分 13 分)

已知点 $A(x_1, y_1), D(x_2, y_2)$ (其中 $x_1 < x_2$) 是曲线 $y^2 = 4x (y \geq 0)$ 上的两点, A, D 两点在 x 轴上的射影分别为点 B, C , 且 $|BC| = 2$.

(I) 当点 B 的坐标为 $(1, 0)$ 时, 求直线 AD 的斜率;

(II) 记 $\triangle OAD$ 的面积为 S_1 , 梯形 $ABCD$ 的面积为 S_2 , 求证: $\frac{S_1}{S_2} < \frac{1}{4}$.



20. (本小题满分 13 分)

已知集合 $\Omega_n = \{X \mid X = (x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_n), x_i \in \{0, 1\}, i = 1, 2, \dots, n\}$, 其中 $n \geq 3$.

$\forall X = (x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_n) \in \Omega_n$, 称 x_i 为 X 的第 i 个坐标分量. 若 $S \subseteq \Omega_n$, 且满足如下两条性质:

- ① S 中元素个数不少于 4 个;
- ② $\forall X, Y, Z \in S$, 存在 $m \in \{1, 2, \dots, n\}$, 使得 X, Y, Z 的第 m 个坐标分量都是 1;

则称 S 为 Ω_n 的一个好子集.

(I) 若 $S = \{X, Y, Z, W\}$ 为 Ω_3 的一个好子集, 且 $X = (1, 1, 0), Y = (1, 0, 1)$, 写出 Z, W ;

(II) 若 S 为 Ω_n 的一个好子集, 求证: S 中元素个数不超过 2^{n-1} ;

(III) 若 S 为 Ω_n 的一个好子集且 S 中恰好有 2^{n-1} 个元素时, 求证: 一定存在唯一一个

$k \in \{1, 2, \dots, n\}$, 使得 S 中所有元素的第 k 个坐标分量都是 1.

海淀区高三年级第二学期期末练习参考答案

数学(理科) 2016.5

阅卷须知:

- 评分参考中所注分数, 表示考生正确做到此步应得的累加分数。
- 其它正确解法可以参照评分标准按相应步骤给分。

一、选择题(本大题共 8 小题, 每小题 5 分, 共 40 分)

题号	1	2	3	4	5	6	7	8
答案	A	B	D	B	C	A	C	C

二、填空题(本大题共 6 小题, 每小题 5 分, 共 30 分)

9. 1	10. 58	11. 60°
12. $[\frac{1}{2}, 1]$	13. 4	14. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

三、解答题(本大题共 6 小题, 共 80 分)

15. 解: (I) 因为 $f(x) = -2\sin x - \cos 2x$

所以 $f(\frac{\pi}{4}) = -2\sin \frac{\pi}{4} - \cos 2 \cdot \frac{\pi}{4} = -\sqrt{2} \dots\dots\dots 2$ 分



$$f\left(\frac{\pi}{6}\right) = -2\sin\frac{\pi}{6} - \cos 2 \cdot \frac{\pi}{6} = -\frac{3}{2} \cdots \cdots 4 \text{ 分}$$

$$\text{因为 } -\sqrt{2} > -\frac{3}{2}, \text{ 所以 } f\left(\frac{\pi}{4}\right) > f\left(\frac{\pi}{6}\right) \cdots \cdots 6 \text{ 分}$$

$$(II) \text{ 因为 } f(x) = -2\sin x - (1 - 2\sin^2 x) \cdots \cdots 9 \text{ 分}$$

$$= 2\sin^2 x - 2\sin x - 1$$

$$= 2\left(\sin x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{3}{2}$$

$$\text{令 } t = \sin x, t \in [-1, 1], \text{ 所以 } y = 2\left(t - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{3}{2}, \cdots \cdots 11 \text{ 分}$$

$$\text{因为对称轴 } t = \frac{1}{2},$$

$$\text{根据二次函数性质知, 当 } t = -1 \text{ 时, 函数取得最大值 } 3 \cdots \cdots 13 \text{ 分}$$

16 解: (I) A 型空调前三周的平均销售量

$$\bar{x} = \frac{11+10+15}{5} = 12 \text{ 台} \cdots \cdots 2 \text{ 分}$$

(II) 因为 C 型空调平均周销售量为 10 台,

$$\text{所以 } c_4 + c_5 = 10 \times 5 - 15 - 8 - 12 = 15 \cdots \cdots 4 \text{ 分}$$

$$\text{又 } s^2 = \frac{1}{5}[(15-10)^2 + (8-10)^2 + (12-10)^2 + (c_4-10)^2 + (c_5-10)^2]$$

$$\text{化简得到 } s^2 = \frac{1}{5}\left[2\left(c_4 - \frac{15}{2}\right)^2 + \frac{91}{2}\right] \cdots \cdots 5 \text{ 分}$$

因为 $c_4 \in \mathbb{N}$, 所以当 $c_4 = 7$ 或 $c_4 = 8$ 时, s^2 取得最小值

$$\text{所以当 } \begin{cases} c_4 = 7 \\ c_5 = 8 \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} c_4 = 8 \\ c_5 = 7 \end{cases} \text{ 时, } s^2 \text{ 取得最小值} \cdots \cdots 7 \text{ 分}$$

(III) 依题意, 随机变量 X 的可能取值为 0, 1, 2, $\cdots \cdots 8$ 分

$$P(X=0) = \frac{20}{30} \cdot \frac{25}{40} = \frac{5}{12},$$



$$P(X=1) = \frac{10}{30} \cdot \frac{25}{40} + \frac{20}{30} \cdot \frac{15}{40} = \frac{11}{24},$$

$$P(X=2) = \frac{10}{30} \cdot \frac{15}{40} = \frac{1}{8}, \dots\dots\dots 11 \text{ 分}$$

随机变量 X 的分布列为

X	0	1	2
p	$\frac{5}{12}$	$\frac{11}{24}$	$\frac{1}{8}$

$$\text{随机变量 } X \text{ 的期望 } E(X) = 0 \times \frac{5}{12} + 1 \times \frac{11}{24} + 2 \times \frac{1}{8} = \frac{17}{24}. \dots\dots\dots 13 \text{ 分}$$



17 解:

(I) 证明: 连结 NG, NE .

在 $\triangle MCD$ 中, 因为 N, G 分别是所在边的中点, 所以 $NG \parallel \frac{1}{2}CD$, $\dots\dots\dots 1 \text{ 分}$

又 $EH \parallel \frac{1}{2}CD$, 所以 $NG \parallel EH$, $\dots\dots\dots 2 \text{ 分}$

所以 $NEHG$ 是平行四边形, 所以 $EN \parallel GH$, $\dots\dots\dots 3 \text{ 分}$

又 $EN \subset \text{平面 } DEM$, $GH \not\subset \text{平面 } DEM$, $\dots\dots\dots 4 \text{ 分}$

所以 $GH \parallel \text{平面 } DEM$. $\dots\dots\dots 5 \text{ 分}$

(II) 证明: 方法一:

在平面 $EFCD$ 内, 过点 H 作 DE 的平行线 HP ,

因为 $DE \perp EM, DE \perp EF, EM \cap EF = E$, 所以 $DE \perp \text{平面 } EFM$,

所以 $HP \perp \text{平面 } EFM$, 所以 $HP \perp EF$.

又在 $\triangle EMF$ 中, 因为 $EM = MF = EF$, 所以 $MH \perp EF$.

以 H 为原点, HM, HF, HP 分别为 x, y, z 轴建立空间直角坐标系 $\dots\dots\dots 6 \text{ 分}$

所以 $E(0, -1, 0), M(\sqrt{3}, 0, 0), C(0, 1, 2), N(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}, 1) \dots\dots\dots 7 \text{ 分}$



所以 $\overrightarrow{EM} = (\sqrt{3}, 1, 0), \overrightarrow{CN} = (\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{3}{2}, -1)$,8分

所以 $\overrightarrow{EM} \cdot \overrightarrow{CN} = 0$, 所以 $EM \perp CN$9分

方法二:

取 EM 中点 K , 连接 NK, FK .

又 NK 为 $\triangle EMD$ 的中位线, 所以 $NK \parallel DE$

又 $DE \perp PCF$, 所以 $NK \perp PCF$, 所以 $NKFC$ 在一个平面中.6分

因为 $\triangle EMF$ 是等边三角形, 所以 $EM \perp FK$,

又 $DE \perp EM$, 所以 $NK \perp EM$,7分

且 $NK \cap FK = K$,

所以 $EM \perp$ 平面 $NKFC$,8分

而 $CN \subset$ 平面 $NKFC$,

所以 $EM \perp CN$9分

(III) 因为 $\overrightarrow{CF} = (0, 0, -2)$, 所以 $\overrightarrow{EM} \cdot \overrightarrow{CF} = 0$, 即 $EM \perp CF$,

又 $CF \cap CN = C$, 所以 $EM \perp$ 平面 NFC ,

所以 $\overrightarrow{EM}$ 就是平面 NFC 的法向量.11分

又 $\overrightarrow{HG} = (\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}, 1)$, 设 GH 与平面 NFC 所成的角为 θ ,

则有 $\sin \theta = |\cos \langle \overrightarrow{HG}, \overrightarrow{EM} \rangle| = \frac{|\overrightarrow{HG} \cdot \overrightarrow{EM}|}{|\overrightarrow{HG}| |\overrightarrow{EM}|} = \frac{\frac{3}{2} + \frac{1}{2}}{\sqrt{2} \cdot 2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ 13分

所以 GH 与平面 NFC 所成的角为 $\frac{\pi}{4}$14分

18 解: (I) 函数 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$.

当 $a = 1$ 时,

$f'(x) = e^x(x+2)(x+1)$ 2分

当 x 变化时, $f'(x)$, $f(x)$ 的变化情况如下表:

x	$(-\infty, -2)$	-2	$(-2, -1)$	-1	$(-1, +\infty)$
$f'(x)$	+	0	-	0	+



$f(x)$	Z	极大值	]	极小值	Z
--------	---	-----	---	-----	---

.....4 分

函数 $f(x)$ 的单调递增区间为 $(-\infty, -2)$, $(-1, +\infty)$,

函数 $f(x)$ 的单调递减区间为 $(-2, -1)$5 分

(II) 解: 因为 $f(x) \leq e^a$ 在区间 $[a, +\infty)$ 上有解,

所以 $f(x)$ 在区间 $[a, +\infty)$ 上的最小值小于等于 e^a .

因为 $f'(x) = e^x(x+2)(x+a)$, 令 $f'(x) = 0$, 得 $x_1 = -2, x_2 = -a$6 分

当 $-a \leq -2$ 时, 即 $a \geq 2$ 时,

因为 $f'(x) > 0$ 对 $x \in [a, +\infty)$ 成立, 所以 $f(x)$ 在 $[a, +\infty)$ 上单调递增,

此时 $f(x)$ 在 $[a, +\infty)$ 上的最小值为 $f(a)$,

所以 $f(a) = e^a(a^2 + a^2 + a) \leq e^a$,

解得 $-1 \leq a \leq \frac{1}{2}$, 所以此种情形不成立,8 分

当 $-a > -2$, 即 $a < 2$ 时,

若 $a \geq 0$, 则 $f'(x) > 0$ 对 $x \in [a, +\infty)$ 成立, 所以 $f(x)$ 在 $[a, +\infty)$ 上单调递增,

此时 $f(x)$ 在 $[a, +\infty)$ 上的最小值为 $f(a)$, 所以 $f(a) = e^a(a^2 + a^2 + a) \leq e^a$,

解得 $-1 \leq a \leq \frac{1}{2}$, 所以 $0 \leq a \leq \frac{1}{2}$9 分

若 $a < 0$,

若 $a \geq -2$, 则 $f'(x) < 0$ 对 $x \in (a, -a)$ 成立, $f'(x) > 0$ 对 $x \in [-a, +\infty)$ 成立.

则 $f(x)$ 在 $(a, -a)$ 上单调递减, 在 $[-a, +\infty)$ 上单调递增,

此时 $f(x)$ 在 $[a, +\infty)$ 上的最小值为 $f(-a)$,

所以有 $f(-a) = e^{-a}(a^2 - a^2 + a) = e^{-a} \cdot a \leq e^a$, 解得 $-2 \leq a < 0$,10 分

当 $a < -2$ 时, 注意到 $-a \in [a, +\infty)$, 而 $f(-a) = e^{-a}(a^2 - a^2 + a) = e^{-a} \cdot a \leq e^a$,

此时结论成立.11 分

综上, a 的取值范围是 $(-\infty, \frac{1}{2}]$12 分

法二: 因为 $f(x) \leq e^a$ 在区间 $[a, +\infty)$ 上有解,

所以 $f(x)$ 在区间 $[a, +\infty)$ 上的最小值小于等于 e^a ,

当 $a \leq 0$ 时, 显然 $0 \in [a, +\infty)$, 而 $f(0) = a \leq 0 \leq e^a$ 成立,8 分



当 $a > 0$ 时, $f'(x) > 0$ 对 $x \in [a, +\infty)$ 成立, 所以 $f(x)$ 在 $[a, +\infty)$ 上单调递增,

此时 $f(x)$ 在 $[a, +\infty)$ 上的最小值为 $f(a)$,

所以有 $f(a) = e^a(a^2 + a^2 + a) \leq e^a$,

解得 $-1 \leq a \leq \frac{1}{2}$, 所以 $0 \leq a \leq \frac{1}{2}$ 11 分

综上, $a \in (-\infty, \frac{1}{2}]$ 12 分

(III) a 的取值范围是 $a \neq 2$ 14 分

19 解: (I) 因为 $B(1, 0)$, 所以 $A(1, y_1)$,

代入 $y^2 = 4x$, 得到 $y_1 = 2$, 1 分

又 $|BC| = 2$, 所以 $x_2 - x_1 = 2$, 所以 $x_2 = 3$, 2 分

代入 $y^2 = 4x$, 得到 $y_1 = 2\sqrt{3}$, 3 分

所以 $k_{AD} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{2\sqrt{3} - 2}{2} = \sqrt{3} - 1$ 5 分

(II) 法一: 设直线 AD 的方程为 $y = kx + m$.

则 $S_1 = S_{\triangle OMD} - S_{\triangle OMA} = \frac{1}{2}|m(x_2 - x_1)| = |m|$ 7 分

由 $\begin{cases} y = kx + m \\ y^2 = 4x \end{cases}$, 得 $k^2x^2 + (2km - 4)x + m^2 = 0$,

所以 $\begin{cases} \Delta = (2km - 4)^2 - 4k^2m^2 = 16 - 16km > 0 \\ x_1 + x_2 = \frac{4 - 2km}{k^2} \\ x_1x_2 = \frac{m^2}{k^2} \end{cases}$ 9 分

又 $S_2 = \frac{1}{2}(y_1 + y_2)(x_2 - x_1) = y_1 + y_2 = kx_1 + m + kx_2 + m = \frac{4}{k}$, 11 分

又注意到 $y_1y_2 = \frac{km}{4} > 0$, 所以 $k > 0, m > 0$,

所以 $\frac{S_1}{S_2} = \frac{m}{y_1 + y_2} = \frac{km}{4}$, 12 分





因为 $\Delta = 16 - 16km > 0$, 所以 $0 < km < 1$, 所以 $\frac{S_1}{S_2} = \frac{km}{4} < \frac{1}{4}$13 分

法二: 设直线 AD 的方程为 $y = kx + m$.

$$\text{由 } \begin{cases} y = kx + m \\ y^2 = 4x \end{cases}, \text{ 得 } k^2x^2 + (2km - 4)x + m^2 = 0,$$

$$\text{所以 } \begin{cases} \Delta = (2km - 4)^2 - 4k^2m^2 = 16 - 16km > 0 \\ x_1 + x_2 = \frac{4 - 2km}{k^2} \\ x_1x_2 = \frac{m^2}{k^2} \end{cases} \dots\dots\dots 7 \text{ 分}$$

$$|AD| = \sqrt{1 + k^2} |x_1 - x_2| = \sqrt{1 + k^2} |x_1 - x_2| = 2\sqrt{1 + k^2}, \dots\dots\dots 8 \text{ 分}$$

点 O 到直线 AD 的距离为 $d = \frac{|m|}{\sqrt{1 + k^2}}$, 所以 $S_1 = \frac{1}{2} |AD| \cdot d = |m| = |m| \dots\dots\dots 9 \text{ 分}$

$$\text{又 } S_2 = \frac{1}{2} (y_1 + y_2)(x_2 - x_1) = y_1 + y_2 = kx_1 + m + kx_2 + m = \frac{4}{k}, \dots\dots\dots 11 \text{ 分}$$

又注意到 $y_1y_2 = \frac{km}{4} > 0$, 所以 $k > 0, m > 0$,

$$\text{所以 } \frac{S_1}{S_2} = \frac{m}{y_1 + y_2} = \frac{km}{4}, \dots\dots\dots 12 \text{ 分}$$

因为 $\Delta = 16 - 16km > 0$, 所以 $0 < km < 1$, 所以 $\frac{S_1}{S_2} = \frac{km}{4} < \frac{1}{4}$13 分

法三: 直线 OD 的方程为 $y = \frac{y_2}{x_2}x$,6 分

$$\text{所以点 } A \text{ 到直线 } OD \text{ 的距离为 } d = \frac{|x_1y_2 - x_2y_1|}{\sqrt{x_2^2 + y_2^2}} \dots\dots\dots 7 \text{ 分}$$

$$\text{又 } |OD| = \sqrt{x_2^2 + y_2^2}, \dots\dots\dots 8 \text{ 分}$$

$$\text{所以 } S_1 = \frac{1}{2} |OD| d = \frac{1}{2} |x_1y_2 - x_2y_1|$$

$$\text{又 } S_2 = \frac{1}{2} (y_1 + y_2)(x_2 - x_1) = y_1 + y_2, \dots\dots\dots 9 \text{ 分}$$

$$\text{所以 } \frac{S_1}{S_2} = \frac{\frac{1}{2} |x_1y_2 - x_2y_1|}{y_1 + y_2} = \frac{|x_1y_2 - x_2y_1|}{2(y_1 + y_2)}$$



$$= \frac{|\frac{y_1^2}{4}y_2 - \frac{y_2^2}{4}y_1|}{2(y_1 + y_2)} = \frac{y_1y_2|y_1 - y_2|}{8(y_1 + y_2)} \cdots \cdots 10 \text{ 分}$$

$$\text{因为 } \begin{cases} y_1^2 = 4x_1 \\ y_2^2 = 4x_2 \end{cases}, \text{ 所以 } y_2^2 - y_1^2 = 4(x_2 - x_1) = 8 \cdots \cdots 11 \text{ 分}$$

$$\text{代入得到, } \frac{S_1}{S_2} = \frac{y_1y_2|y_1 - y_2|}{8(y_1 + y_2)} = \frac{y_1y_2|y_1^2 - y_2^2|}{8(y_1 + y_2)^2} = \frac{y_1y_2}{(y_1 + y_2)^2} \cdots \cdots 12 \text{ 分}$$

因为 $y_1 + y_2 \geq 2\sqrt{y_1y_2}$, 当且仅当 $y_1 = y_2$ 时取等号,

$$\text{所以 } \frac{S_1}{S_2} < \frac{y_1y_2}{4y_1y_2} = \frac{1}{4} \cdots \cdots 13 \text{ 分}$$

20 解: (I) $Z = (1, 0, 0), W = (1, 1, 1) \cdots \cdots 2 \text{ 分}$

(II) 对于 $X \subseteq \Omega_n$, 考虑元素 $X' = (1 - x_1, 1 - x_2, \cdots, 1 - x_i, \cdots, 1 - x_n)$,

显然, $X' \in \Omega_n$, $\forall X, Y, X'$, 对于任意的 $i \in \{1, 2, \cdots, n\}$, $x_i, y_i, 1 - x_i$ 不可能都为 1,

可得 X, X' 不可能都在好子集 S 中 $\cdots \cdots 4 \text{ 分}$

又因为取定 X , 则 X' 一定存在且唯一, 而且 $X \neq X'$,

且由 X 的定义知道, $\forall X, Y \in \Omega_n$, $X' = Y' \Leftrightarrow X = Y$, $\cdots \cdots 6 \text{ 分}$

这样, 集合 S 中元素的个数一定小于或等于集合 Ω_n 中元素个数的一半,

而集合 Ω_n 中元素个数为 2^n , 所以 S 中元素个数不超过 2^{n-1} ; $\cdots \cdots 8 \text{ 分}$

(III) $\forall X = (x_1, x_2, \cdots, x_{n-1}, x_n), Y = (y_1, y_2, \cdots, y_{n-1}, y_n) \in \Omega_n$

定义元素 X, Y 的乘积为: $XY = (x_1y_1, x_2y_2, \cdots, x_{n-1}y_{n-1}, x_ny_n)$, 显然 $XY \in \Omega_n$.

我们证明:

“对任意的 $X = (x_1, x_2, \cdots, x_{n-1}, x_n) \in S$, $Y = (y_1, y_2, \cdots, y_{n-1}, y_n) \in S$, 都有 $XY \in S$.”

假设存在 $X, Y \in S$, 使得 $XY \notin S$,



则由 (II) 知, $(XY)' = (1-x_1y_1, 1-x_2y_2, \dots, 1-x_{n-1}y_{n-1}, 1-x_ny_n) \in S$

此时, 对于任意的 $k \in \{1, 2, \dots, n\}$, $x_k, y_k, 1-x_ky_k$ 不可能同时为 1, 矛盾,

所以 $XY \in S$.

因为 S 中只有 2^{n-1} 个元素, 我们记 $Z = (z_1, z_2, \dots, z_{n-1}, z_n)$ 为 S 中所有元素的乘积,

根据上面的结论, 我们知道 $Z = (z_1, z_2, \dots, z_{n-1}, z_n) \in S$,

显然这个元素的坐标分量不能都为 0, 不妨设 $z_k = 1$,

根据 Z 的定义, 可以知道 S 中所有元素的 k 坐标分量都为 1 11 分

下面再证明 k 的唯一性:

若还有 $z_t = 1$, 即 S 中所有元素的 t 坐标分量都为 1,

所以此时集合 S 中元素个数至多为 2^{n-2} 个, 矛盾.

所以结论成立 13 分

爱智康
北京高考交流总QQ群
574015071