

## 第十二讲 质数、合数、分解质因数

### 知识导航：

自然数可以根据它们的因数个数分为质数和合数。

1. 质数：一个数如果只有 1 和它本身两个因数，这个数叫做质数。

例： $2=1\times 2$ ， $5=1\times 5$ ， $13=1\times 13\cdots$ 像这些数都是质数。

2. 合数：一个数如果除了 1 和它本身外，还有别的因数，这个数叫做合数。

例： $12=1\times 12=2\times 6=3\times 4$ ， $36=1\times 36=2\times 18=3\times 12=4\times 9=6\times 6\cdots$ 像这些数都是合数。

特别注意 1 既不是质数也不是合数。

注意：质数与合数是根据一个数的因数的个数定义的。

3. 分解质因数：指的就是把一个合数用几个质数乘积的形式表示出来。

例： $15=3\times 5$ ， $24=2\times 2\times 2\times 3\cdots$ 这就是分解质因数。

注意 1：分解质因数是解决数论最有效最直接的途径；

注意 2：100 以内的质数 2、3、5、7、11、13、17、19、23、29、31、37、41、43、47、53、59、61、67、71、73、79、83、89、97 共 25 个。

4. 唯一分解定理： $N=a_1^{p_1}\times a_2^{p_2}\times\cdots\times a_n^{p_n}$  ( $a_1, a_2, \cdots, a_n$  均为  $N$  的不同质因数)

那么  $N$  的因数个数  $n=(1+p_1)\times(1+p_2)\times\cdots(1+p_n)$

5. 互质数的概念和特征

互质数：公因数只有 1 的两个数叫做互质数。

互质数的特征：(1) 1 和任何数都是互质数。

(2) 两个不相等的质数一定是互质数。

(3) 相邻的两个自然数一定是互质数。

### 第一关：必须会

例 1. 两个质数的和是 99，这两个质数的乘积是多少？

**解析：**奇数+奇数=偶数，奇数+偶数=奇数。两个质数的和是奇数，所以，一定有一个质数是偶数，偶数中只有 2 是质数。

**解：** $99=2+97$        $97\times 2=194$

答：这两个质数的乘积是 194。

**我试试：**

1、两个质数的和是 39，求这两个质数的积。

2、在自然数 1~20 中，质数分别有（ ）。

3、填一填

(1) 两个连续的质数是（ ）和（ ）；两个连续的合数是（ ）和（ ）

(2) 用质数填一填：22=（ ）+（ ）=（ ）+（ ）

10=（ ）+（ ） 18=（ ）+（ ）

26=（ ）+（ ） 30=（ ）+（ ）

(3) 100 以内最大的质数与最小的合数的和是（ ），差是（ ）。

**例 2.** 两个自然数的和与差的积是 41，那么这两个自然数的积是多少？

**解析：**首先注意到 41 是质数，两个自然数的和与差的积是 41，可见它们的差是 1，这是两个连续的自然数，大数是 21，小数是 20。

**解：**这两个自然数的积是  $20 \times 21 = 420$ 。

**答：**这两个自然数的积是 420。

**我试试：**

1、最小的质数与最接近 100 的质数的乘积是多少？

2、641 除以一个两位数，余数是 46，求这个两位数。

3、三个均小于 20 的质数，它们的和是 30，它们的积是多少？

例 3. 三个连续自然数的积是 1716, 这三个自然数是\_\_\_\_、\_\_\_\_、\_\_\_\_。

解析: 因为 1716 是三个连续自然数的积, 所以, 将 1716 分解质因数就可以求出。

$$\begin{array}{r} \text{解: } 2 \overline{) 1716} \\ \underline{2 \quad 858} \\ 3 \quad 429 \\ \underline{11 \quad 143} \\ 13 \end{array}$$

$$1716=2 \times 2 \times 3 \times 11 \times 13=11 \times (2 \times 2 \times 3) \times 13$$

由此可以看出这三个数是 11, 12, 13。

答: 三个连续自然数是 11, 12, 13。

### 我试试:

1、找出 1992 所有的不同质因数, 它们的和是\_\_\_\_\_。

2、四个连续自然数的乘积是 360, 这四个自然数分别是多少?

3、1972、1982、1992 这三个数, 分别减去同一个四位数时, 得到的差是三个质数, 这个四位数是多少?

### 第二关: 我能会

例 1. 两个质数的和是 40, 求这两个质数的乘积的最大值是多少?

解析: 把 40 分成两个质数的和共有几种情况, 要使乘积最大, 这两个数越接近, 乘积越大。

$$\text{解: } 40=17+23 \quad 40=3+37 \quad 40=11+19$$

$$17 \text{ 和 } 23 \text{ 更接近, 乘积最大 } 17 \times 23=391$$

答: 这两个质数的乘积的最大值是 391。

### 我能行：

- 1、有一个合数，它有三个不同的质因数，这个数最小是多少？
- 2、已知 A、B、C 都是质数，且  $A+B=C$ ，那么  $A \times B \times C$  的最小值是多少？
- 3、如果自然数有四个不同的质因数，那么这样的自然数中最小的是\_\_\_\_\_。

**例 2.** 求 240 有多少个因数？所有因数的和是多少？

**解析：**要想求出一个数的因数个数，和所有因数的和，就必须将这个数分解质因数。

**解：**

$$\begin{array}{r}
 2 \overline{) 240} \\
 \underline{2 \quad 120} \\
 2 \overline{) 60} \\
 \underline{2 \quad 30} \\
 2 \overline{) 30} \\
 \underline{3 \quad 15} \\
 5
 \end{array}$$

$$240 = 2^4 \times 3^1 \times 5^1$$

(1) 求因数个数：把指数加上 1 的和相乘。

$$(4+1) \times (1+1) \times (1+1) = 20$$

(2) 求所有因数的和：

$$(2+4+8+16+1) \times (3+1) \times (5+1) = 744$$

用底数的次方数的和加 1，再相乘，积就是所有因数的和。

答：240 有 20 个因数，所有因数的和是 744。

### 我能行：

- 1、150 有多少个因数？它的所有因数的和是多少？
- 2、360 有多少个因数？它的所有因数的和是多少？
- 3、504 的所有因数的和是多少？

**例 3.**  $1 \times 2 \times 3 \times 4 \times \cdots \times 100$  的积的尾数有多少个 0?

**解析:** 因为 2 和 5 相乘积就会出现一个 0, 在 1~100 个数中有 50 个偶数, 所以有许多个质因数 2, 那我们只要找出 1~100 中有多少个质因数 5, 就会有多少个 0。

**解:**  $100 \div 5 = 20$  (个)

$$100 \div 25 = 4 \text{ (个)}$$

$$20 + 4 = 24 \text{ (个)}$$

答: 积的尾数有 24 个 0。

### 我能行:

1、 $1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times \cdots \times 200$  的积的尾部有多少个 0?

2、 $101 \times 102 \times 103 \times 104 \times \cdots \times 199 \times 200$ , 这 100 个数相乘积的尾数有几个 0?

3、 $1 \times 2 \times 3 \times 4 \times \cdots \times 150$  的积末尾有多少个 0?

### 第三关: 我想会

**例 1.** 要使  $185 \times 84 \times 135 \times 52 \times (\quad)$  乘积的末五位数都是 0,  $(\quad)$  中应填入的自然数最小值是多少?

**解析:** 要使乘积末五位都是 0, 就要使这五个因数中有 5 个 2 和 5 个 5。所以要把这四个数分解质因数, 看缺少几个 5 和几个 2, 括号里就填出它们的乘积。

<b>解:</b> $185 = 5 \times 37$	}	
$84 = 2 \times 2 \times 21$		共有 4 个 2 和 2 个 5
$135 = 5 \times 27$		缺少 3 个 5 和 1 个 2
$52 = 2 \times 2 \times 13$		
$5 \times 5 \times 5 \times 2 = 250$		

答: 括号里填 250。

**我要学：**

1、要使  $24 \times 45 \times 35 \times (\quad)$  的末尾有 4 个 0，括号里最小填几？

2、要使五位数乘积  $195 \times 86 \times 72 \times 380 \times (\quad)$  的末五位数字都是 0，括号里最小填多少？

3、如果  $325 \times 472 \times 765 \times 895 \times (\quad)$  的积的最后五位都是 0，那么括号内填入的自然数最小是多少？

**例 2.** 四个连续偶数的乘积是 5760，求这四个数各是多少？

**解析：** 根据已知条件必须将 5760 分解质因数后，重新组合四个连续偶数。

解：  $5760 = 2 \times 3 \times 3 \times 5$

8                  6                  10                  12

答：这四个连续偶数是 6、8、10、12。

**我要学：**

1、6 个相邻自然数的乘积是 60480，求这六个自然数。

2、5 个连续自然数的乘积是 55440，求这 5 个数。

3、四个连续偶数的乘积是 13440，求这四个偶数各是多少？

例 3. 630 乘一个自然数  $a$ , 得到一个完全平方数, 求  $a$  的最小值。

解析: 完全平方数是指能把一个数写成另一个数的平方的数。如:  $36=6^2$      $49=7^2$      $144=12^2$

像 36、49、144 这样的数就是完全平方数。把 630 分解质因数, 看最少填几, 就能成为完全平方数, 就是  $a$  的最小值。

解:  $630=2 \times 3^2 \times 5 \times 7$     要使 630 成为完全平方数还少  $2 \times 5 \times 7=70=a$

答:  $a$  的最小值是 70。

### 我要学:

1、已知 1176 乘一个自然数得到一个完全平方数, 这个自然数最小是多少?

2、用 156 乘一个自然数  $A$ , 得到一个完全平方数, 求  $A$  的最小值。

3、自然数  $a$  乘以 338, 恰好是自然数  $b$  的平方, 求  $a$  的最小值以及  $b$  值。

### 大显身手:

1、314 被一个两位数除, 余数是 41, 求这个两位数。

2、 $975 \times 935 \times 972 \times (\quad)$ ，要使这个连乘积的最末 4 个数字是 0，那么括号内最小应填几？

3、筐中共有 96 个苹果，如果不一次全拿出，也不一个个地拿；要求每次拿出的个数同样多，拿完时又正好不多不少，共有多少种不同的拿法？

4、相邻三个奇数的乘积是  $1\square\square 7$ ，这三个自然数分别是多少？

5、有三个自然数，最大的比最小的大 6，另一个是它们的平均数，且三数的乘积是 42560。求这三个自然数。

6、某班同学在班主任老师带领下去种树，学生恰好平均分成三组，如果老师与学生每人种树一样多。共种了 1073 棵，那么平均每人种了\_\_\_\_\_棵树。

7、二十几个小朋友围成一圈，按顺时针方向一圈一圈的连续报数。如果报 2 和 200 的是同一个人，问共有几个小朋友？

8、一个自然数 A 共有 10 个因数（包括 1 与 A），求这些因数积的最小值。

9、 $A^3=1008\times B$ ，其中 A、B 均为自然数，求 B 的最小值。

10、 $1\times 2\times 3\times \cdots\times 10 = 6^n\times M$ ，其中 n, M 都是自然数，求 n 的最大值。

### 真题欣赏：

1、a、b 两数都恰含有质因数 3 和 5，它们的最大公因数是 75，已知 a 数有 12 个因数，b 数有 10 个因数。那么，a、b 两数的和等于多少？

2、从一块正方形的木板上锯下宽为 3 分米的一个木条以后，剩下的面积是 108 平方分米。木条的面积是\_\_\_\_\_平方分米。

3、今有 10 个质数：17, 23, 31, 41, 53, 67, 79, 83, 101, 103。如果将它们分成两组，每组五个数，并且每组的五个数之和相等，那么把含有 101 的这组数从小到大排列，第二个数应是\_\_\_\_\_。

4、2, 3, 5, 7, 11, …都是质数, 也就是说每个数只以 1 和它本身为约数。已知一个长方形的长和宽都是质数个单位, 并且周长是 36 个单位。问这个长方形的面积至多是多少个平方单位?

5、把 7、14、20、21、28、30 分成两组, 每三个数相乘, 使两组数的乘积相等。

6、学生 1430 人参加团体操, 分成人数相等的若干队, 每队人数在 100 至 200 之间, 问有哪几种分法?

7、四只同样的瓶子内分别装有一定数量的油, 每瓶和其他各瓶分别合称一次, 记录千克数如下: 8、9、10、11、12、13。已知四只空瓶的重量之和以及油的重量之和均为质数, 求最重的两瓶内有多少油?