

# 第十三讲 最大公因数与最小公倍数

## 知识导航:

### 1. 最大公因数和最小公倍数的概念和最简单的表示方法

(1) 几个数公有的因数, 叫做这几个数的公因数, 其中最大的一个, 叫做这几个数的最大公因数。自然数  $a$ 、 $b$  最大公因数记作  $(a,b)$ 。例如: 12 和 18 的最大公因数是 6, 可以记作  $(12,18)=6$ 。

(2) 几个数公有的倍数, 叫做这几个数的公倍数, 其中最小的一个, 叫做这几个数的最小公倍数。自然数  $a$ 、 $b$  的最小公倍数记作  $[a,b]$

例如: 24 和 18 的最小公倍数是 72, 记作  $[24,18]=72$ 。

### 2. 关于最大公因数和最小公倍数的有关性质

(1) 如果  $a$  和  $b$  互质, 那么  $a$  和  $b$  的最大公因数是 1, 最小公倍数是  $ab$ 。

(2) 如果  $a$  是  $b$  的整数倍, 那么  $a$  和  $b$  的最大公因数是  $b$ , 最小公倍数是  $a$ 。

(3) 非零自然数  $a$ 、 $b$  分别除以它们的最大公因数  $d$ , 所得商是互质的。

(4) 公因数是最大公因数的因数。

(5) 若两个数同时扩大  $m$  倍, 它们的最大公因数也扩大  $m$  倍。

(6) 两个数的任意公倍数是它们最小公倍数的倍数。

(7) 两个数的最小公倍数等于这两个数的乘积与它们最大公因数的商。

### 3. 求最大公因数和最小公倍数的方法

(1) 列举法: 例: 12 的因数: 1、2、3、4、6、12; 12 的倍数: 12、24、36、48...

18 的因数: 1、2、3、6、9、18; 18 的倍数: 18、36、54...

即  $(12, 18)=6$

$[12, 18]=36$

(2) 短除法: 求几个数的最大公因数, 用几个数的公因数去除, 除到这几个数只有公因数“1”为止, 将左半边的公因数相乘。求几个数的最小公倍数, 也是用几个数的公因数去除, 除到两两互质为止。将左半边的公因数和拐弯处剩下的数都相乘。

(3) 分解质因数法:  $12=2\times 2\times 3$ ;  $18=2\times 3\times 3$  即  $(12, 18)=6$   $[12, 18]=36$

(4) 辗转相除法: 主要针对两个较大数求最大公因数而言的。就是用其中较大数除以较小数, 得余数  $r_1$ ; 接下来每一步都用上一步的除数除以余数  $r_2$ ... 以此类推, 直到除尽为止, 最后一步除数就是它们的最大公因数。

## 第一关：必须会

**例 1.**求 24 和 32 的最大公因数

**解析：**要想求几个数的最大公因数，我们要掌握求最大公因数的几种方法。有：列举法、短除法、分解质因数法、和辗转相除法等。最常用、最方便的方法是短除法。

$$\begin{array}{r}
 \text{解：} \quad 2 \left| \begin{array}{cc} 24 & 32 \\ \hline 12 & 16 \\ \hline 6 & 8 \\ \hline 3 & 4 \end{array} \right. \\
 \end{array}$$

$$(24, 32) = 2 \times 2 \times 2 = 8$$

答：24 和 32 的最大公因数是 8。

## 我试试：

1、用短除法求出下面各组的最大公因数

(1) 56 和 42

(2) 225 和 15

(3) 84 和 105

(4) 72 和 90

(5) 60、90 和 120

(6) 48、12 和 16

2、直接说出下面各组数的最大公因数，你能发现什么规律？

(1) 8 和 9

7 和 11

13 和 20

(2) 4 和 12

16 和 32

15 和 30

(3) 1 和 10

7、8、和 9

5、10 和 15

3、填空

(1) 最小质数与最小合数的最大公约数是 (     )

(2) 自然数 a 除以自然数 b，商是 15，最大公因数是 (     )

(3) 甲 =  $2 \times 3 \times 5$ ，乙 =  $2 \times 3 \times 7$ ，甲和乙的最大公因数是 (     )

(4) 两个数为互质数，这两个数的最大公因数是 (     )

- (5) 相邻的两个自然数一定只有公因数 ( )
- (6) 甲、乙两数的最大公因数是 7，甲数的 3 倍与乙数的 5 倍的最大公因数是 ( )
- (7) 所有偶数的最大公约数是 ( )，所有奇数的最大公约数 ( )
- (8) 把自然数  $a$  与  $b$  分解质因数，得到  $a=2 \times 5 \times 7 \times m$ ， $b=3 \times 5 \times m$  ( $a, b$ ) = ( )

**例 2.** 求 36 和 60 的最小公倍数。

**解析：** 求最小公倍数和求最大公因数的方法有相同之处，都可以用短除法。

**解：**

$$\begin{array}{r|l}
 3 & 36 \quad 60 \\
 \hline
 2 & 12 \quad 20 \\
 \hline
 2 & 6 \quad 10 \\
 \hline
 & 3 \quad 5
 \end{array}$$

$$(36, 60) = 3 \times 2 \times 2 \times 3 \times 5 = 180$$

答：36 和 60 的最小公倍数是 180。

**我试试：**

1、求下列各组数的最小公倍数

- (1) 25 和 15                      (2) 140 和 35                      (3) 24 和 36

- (4) 4, 8 和 16                      (5) 45 和 135                      (6) 48, 16 和 24

2、直接说出下列各组数的最小公倍数，你发现了什么？

- (1) 18 和 36                      12 和 24                      8、16 和 72

- (2) 9 和 10                      5、7 和 11                      3、4 和 5

3、填一填，判一判，选一选。

## (1) 填一填

- ①a 和 b 都是自然数，如果 a 除以 b 商是 5 没有余数，那么 a 和 b 的最大公约数是 ( )，最小公倍数 ( )。
- ②如果 a 和 b 是互质的自然数，那么 a 和 b 的最大公约数是 ( )，最小公倍数是 ( )。
- ③三个质数的最小公倍数是 42，这三个质数是 ( )。
- ④100 以内能同时被 3 和 7 整除的最大奇数是 ( )，最大偶数是 ( )。
- ⑤已知两个互质数的最小公倍数是 153，这两个互质数是 ( ) 和 ( )。
- ⑥所有偶数的最大公约数是 ( )，所有奇数的最大公约数 ( )。
- ⑦甲数 $=2 \times 3 \times 5 \times 7$ ，乙数 $=2 \times 3 \times 11$ ，甲乙两数的最大公约数是 ( )，最小公倍数是 ( )

## (2) 判一判

- ①几个数的公倍数是无限的，最小的只有一个。( )
- ②两个不同的自然数的最大公因数一定比最小公倍数小。( )
- ③如果三个自然数两两互质，它们的最大公约数是 1，最小公倍数就是三个数的乘积。( )
- ④如果一个质数与一个合数不是互质数，那么这个合数是这两个数的最小公倍数。( )
- ⑤一个数的约数必定小于它的倍数。( )

## (3) 选一选

- ①96 是 16 和 12 的 ( )
- A、倍数      B、最小公倍数      C、公约数
- ②几个质数的连乘积是 ( )
- A、合数      B、质数      C、最大公约数      D、最小公倍数
- ③甲是乙的 15 倍，甲和乙的最小公倍数是 ( )
- A、15      B、甲      C、乙      D、甲 $\times$ 乙
- ④12 是 24 和 36 的 ( )
- A、约数      B、质因数      C、最大公约数

⑤一个数的最大约数（ ）它的最小倍数。

- A、>                      B、<                      C、=                      D、≤

⑥ $M=2 \times 2 \times 5$ ， $N=2 \times 3 \times 5$ ，那么 M 和 N 的最小公倍数是（ ）

- A、600                      B、300                      C、60                      D、10

**例 3.**有一筐苹果 4 个 4 个拿，6 个 6 个拿，或者 8 个 8 个拿都正好拿完，这筐苹果最少有（ ）个。

**解析：**因为 4 个 4 个拿，6 个 6 个拿，或者 8 个 8 个拿都正好拿完，说明苹果的总个数一定是 4、6、8 的公倍数，要求苹果至少有多少个，就是求它们的最小公倍数。

**解：**

$$\begin{array}{r|l}
 2 & 4 \quad 6 \quad 8 \\
 \hline
 2 & 2 \quad 3 \quad 4 \\
 & 1 \quad 3 \quad 2 \\
 & (4, 6, 8) = 24
 \end{array}$$

答：这筐苹果至少有 24 个。

### 我试试：

1、某班学生做操，每行 12 人或每行 16 人，都正好整行。这个班学生不到 50 人，算一算这个班究竟有多少人？

2、老师组织同学们去植树，分成 5 人一组、9 人一组和 15 人一组，都恰好无剩余。植树学生至少有多少人？

3、公共汽车站有三路汽车通往不同地方，第一路车每隔 5 分钟发车一次，第二路车每隔 10 分钟发车一次，第三路车每隔 6 分钟发车一次，三路汽车在同一时间发车后，最少再过多长时间能同时发车？

例4. 有三根铁丝，一根长15米，一根长18米，一根长27米，把它们截成同样长的小段，不许有剩余，每段最长有几米？一共可以分成几段？

解析：如果把三根铁丝截成同样长的小段，没有剩余有许多种方法，但是，截成最长的一段，只有一种，可以求三根铁丝的最大公因数。

解：

$$\begin{array}{r} 3 \overline{) 15 \quad 18 \quad 27} \\ \underline{5 \quad 6 \quad 9} \end{array}$$

$(15, 18, 27) = 3$            $5+6+9=20$  (段)

答：每段最长3米，一共可以分成20段。

### 我试试：

1、把一张长72厘米，宽60厘米的长方形纸，裁成同样大小、面积尽可能大的正方形纸，纸无剩余，至少能裁多少张？

2、用 96 朵红花和 72 朵白花做花束，如果每个花束里的红花朵数都相等，每个花束里的白花的朵数也都相等，每个花束里最少有几朵花？

3、有一个长 80 厘米，宽 60 厘米，高 115 厘米的长方体储冰容器，往里面装入大小相同的立方体冰块，这个容器最少能装多少数量冰块？

## 第二关：我能会

例1. 学校操场长96米，从一端起到另一端每隔4米插有一面小红旗。现在要改成每隔6米插一面红旗。问可以不必拔出来的小红旗有多少面？

解析：要想求出有多少面小旗不动，就必须知道在96米之内，4和6的公倍数有多少个。在加上—端的。

解：  $(4, 6) = 12$        $96 \div 12 = 8$        $8 + 1 = 9$  (面)

答：可以不必拔出来的小红旗有9面。

### 我能行：

1、一只电子钟，每到整点响一次铃，每走9分亮一次灯。中午12时整，它既响铃又亮灯。下一次既响铃又亮灯是几时？

2、小明和爸爸进行登台阶运动。台阶共有60级，爸爸每步登3级，小明每步登2级。问小明和爸爸都没有登过的台阶有多少级？

3、已知某小学六年级学生超过100人，而不足140人。将他们按每组12人分组，多3人；按每组8人分，也多3人。这个学校六年级学生多少？

**例2.** 用某数去除47、61、75，结果都有余数5，问这个数最大是多少？

**解析：**根据题意可知  $47 \div a = X \cdots 5$ ，  $61 \div a = Y \cdots 5$      $75 \div a = Z \cdots 5$  用  $75 - 47 = 28$ ，相当于把余数5消去了，就剩下几个除数，再用  $61 - 47 = 14$ ，最后求28和14的最大公因数。

解：  $75 - 47 = 28$

$$61 - 47 = 14$$

$$(28, 14) = 14$$

答：这个数最大是14。

### 我能行：

1、有一个整数，除300、262、205得到的余数相同，问这个整数是几？

2、一个整数除3073余28，除1883余27，问这个整数是几？

3、某数除1186余1，除2609余2，除4263少3，这个数最大是几？

**例3.** 甲数是32，甲乙两数的最小公倍数是224，最大公因数是8，求乙数。

**解析：** 由于两个数的最大公因数和最小公倍数的乘积等于这两个数的乘积，所以求乙数就用最大公因数乘最小公倍数再除以甲数。

**解：**  $224 \times 8 \div 32 = 56$

答：乙数是56。

### 我能行：

1、两个数的最大公因数是4，最小公倍数是252，其中一个数是28，求另一个数。

2、已知两个数的最大公因数是21，最小公倍数是126，这两个数各是多少？

3、两个整数的最小公倍数是140，最大公因数是4，且小数不能整除大数，这两个数分别是多少？

**例4.** 把一些糖果平均分成若干包，每包10粒余9粒，每包12粒余11粒，每包15粒余14粒，这些糖果最少有多少粒？

**解析：** 根据已知条件可知，如果糖果总数增加1粒后，则恰好是10、12、15的倍数，求糖果最少有多少粒，就是求三个数的最小公倍数，再减去1粒。

**解：**  $(10, 12, 15) = 60$

$$60-1=59 \text{ (粒)}$$

答：这些糖果最少有59粒。

### 我能行：

1、一个自然数被4除余1，被5除余2，被6除余3，这个自然数最小是多少？

2、一个自然数加上7是7的倍数，加上8是8的倍数，减去9是9的倍数，求这个数最小是多少？

3、有一个数，被4除余1，被5除余4，被7除余2，这个数最小是多少？

### 第三关：我想会

例1. 求  $\frac{3}{14}$ 、 $\frac{9}{28}$ 、 $\frac{27}{70}$  的最大公因数。

**解析：**求几个最简分数的最大公因数的方法是：取各最简分数分子的最大公因数做分子，取各最简分数分母的最小公倍数做分母，所得新分数就是这几个最简分数的最大公因数。

**解：**  $(3,9,27)=3$

$$(14,28,70)=140 \quad \left(\frac{3}{14}, \frac{9}{28}, \frac{27}{70}\right)=\frac{3}{140}$$

答： $\frac{3}{14}$ 、 $\frac{9}{28}$ 、 $\frac{27}{70}$  的最大公因数是  $\frac{3}{140}$ 。

### 我要学：

1、求  $\frac{7}{15}$  和  $\frac{21}{22}$  的最大公因数。

2、求  $\frac{12}{25}$ 、 $\frac{9}{40}$ 、 $\frac{18}{35}$  的最大公因数。

3、求  $\frac{7}{13}$ 、 $\frac{8}{9}$ 、 $\frac{12}{25}$  的最大公因数。

例 2. 求  $\frac{10}{21}$ 、 $\frac{15}{56}$ 、 $\frac{5}{14}$  的最小公倍数。

解析：求几个最简分数的最小公倍数的方法是：取各分数的分子的最小公倍数做分子，取各分数分母的最大公因数做分母，所得到的新分数就是这几个最简分数的最小公倍数

解：  $(10, 15, 5) = 30$

$(21, 56, 14) = 7$

$$\left( \frac{10}{21}, \frac{15}{56}, \frac{5}{14} \right) = \frac{30}{7}$$

答：  $\frac{10}{21}$ 、 $\frac{15}{56}$ 、 $\frac{5}{14}$  的最小公倍数是  $\frac{30}{7}$ 。

### 我要学：

1、求  $\frac{11}{30}$ 、 $\frac{22}{25}$  和  $\frac{33}{40}$  的最小公倍数。

2、求  $\frac{7}{30}$ 、 $\frac{35}{48}$  和  $\frac{7}{24}$  的最小公倍数。

3、求  $\frac{2}{9}$ 、 $\frac{4}{15}$  和  $\frac{5}{12}$  的最小公倍数。

例 3. 求 2430 和 1686 的最大公因数。

解析：我们发现这个数比较大，用短除法求最大公因数不容易找出它们的公因数，我们可以掌握另一种求最大公因数的方法——辗转相除法。

解： $2430=1686\times 1+744$

$$1686=744\times 2+198$$

$$744=198\times 3+150$$

$$198=150\times 1+48$$

$$150=48\times 3+6$$

$$48=6\times 8$$

$$(2430, 1686) = 6$$

答：2430 和 1686 的最大公因数是 6。

### 我要学：

1、求 36963 和 59570 的最大公因数。

2、求 5890 和 6327 的最大公因数。

3、两个数的积是 5766，它们的最大公因数是 31，求这两个数是多少？

例 4. 一次会餐，每两个人合用一只饭碗，三个人合用一只菜碗，四个人合用一只汤碗，会餐共用 65 只碗。问参加会餐的有多少人？

**解析：**会餐的人数应该是 2、3、4 的倍数，就是先求 2、3、4 的最小公倍数， $(2, 3, 4) = 12$ ，看看 12 个人里面可以用几只饭碗，几只菜碗，几只汤碗，再用总碗数除以每 12 个人所用的碗数，得到的数就是有多少个 12 个人用餐。

**解：**  $(2, 3, 4) = 12$

$$12 \div 2 = 6$$

$$6 + 4 + 3 = 13$$

$$12 \div 3 = 4$$

$$65 \div 13 = 5$$

$$12 \div 4 = 3$$

$$12 \times 5 = 60 \text{ (人)}$$

答：参加会餐的共有 60 人。

### 我要学：

1、老师为春游的同学发饮料，每两人一瓶 A 饮料，每三人一瓶 B 饮料，每四人一瓶 C 饮料，全班共喝了 52 瓶饮料，共有多少人？

2、在一根长木棍上，有三种刻度线，第一种刻度线将木棍分成 10 等份，第二种分成 12 等份，第三种将木棍分成 15 等份，如果沿每条刻度线将木棍锯断，木棍总共被锯成多少段？

3、爷爷对小明说：“我现在的年龄是你的 7 倍，过几年是你的 6 倍，再过几年是你的 5 倍、4 倍、3 倍。”小明现在几岁？

### 大显身手：

1、一种长方形的地砖，长 24 厘米，宽 16 厘米，用这种砖铺一个正方形，至少需多少块砖？

2、有四个小朋友，他们的年龄一个比一个大一岁，四个人的年龄的乘积是 360。他们中年龄最大是多少岁？

3、汽车站内每隔 3 分钟发一辆公交车，4 分钟发一辆中巴车，1 小时共发了几辆汽车？其中有几辆中巴车？

4、一块长方形铁皮，长 96 厘米，宽 80 厘米，要把它剪成同样大小的正方形且没有剩余，这种正方形的边长是多少？被剪成几块？

5、四只同样的瓶子内分别装有一定数量的油，每瓶和其他各瓶分别合称一次，记录千克数如下：8、9、10、11、12、13。已知四只空瓶的重量之和以及油的重量之和均为质数，求最重的两瓶内有多少油？

6、两个数的最大公因数是 42，最小公倍数是 2940，且两个数的和是 714，求这两个数是多少？

7、有一个三位数能被 7 整除，这个数除以 2 余 1，除以 3 余 2，除以 5 余 4，除以 6 余 5，这个数是多少？

8、甲乙丙三个班的学生人数分别是 54 人、48 人、42 人，现在要在各班内进行分组，各小组的人数要相同，求各小组的人数最多是多少人？

9、一个小于 200 的数，除以 24 或 36 都有余数 16，求这个数。

10、有两个两位数，这两个两位数的最大公因数与最小公倍数的和是 91，最小公倍数是最大公因数的 12 倍，求这两个数各是多少？

### 真题欣赏：

1、四个连续的自然数的最小公倍数是 5460，求这四个数的和是多少？（第十一届“迎春杯”题）

2、一个自然数被 5、6、7 除时余数都是 1，在 1000 以内，这样的数共有多少个？（北京市第十一届“迎春杯”竞赛题）

3、有 5000 多根牙签，可按六种规格分成小包。每 10 根一包，那么最后还剩 9 根，每 9 根一包，那么最后还剩 8 根，第三、四、五、六种的规格是分别以 8、7、6、5 根为一包，那么最后也分别剩 7、6、5、4、根，原来一共有牙签多少根？（华杯赛真题）

4、有一个整数，除 300、262、205 得到相同的余数，问这个整数是几？（华杯赛真题）

5、幼儿园买来桃 273 个，杏 219 个，桔子 252 个，分给小班的小朋友，每人要分得一样多，结果桃、杏各剩下 3 个，桔子恰好分完。小班的小朋友最多有多少个？（希望杯题）