

第十四讲 长方体和正方体

知识导航：

认识长方体和正方体的特征以及它们的展开图，了解长方体和正方体的关系，掌握长方体和正方体的表面积的意义，及长方体和正方体的表面积的计算方法，初步建立了空间观念，学会用数学的眼光观察生活中物体的形状，并能解决生活中的一些实际问题。

长方体和正方体都是立体图形，其特征如下：

		长方体	正方体
相同点		都有 6 个面 8 个顶点 12 条棱	
不同点	面的形状	6 个面一般都是长方形,也可能两个相对的面是正方形	6 个面都是正方形
	面的大小	相对的面的面积相等	6 个面的面积都相等
	棱长	12 条棱分为三组, 每组 4 条, 长度相等	12 条棱的长度都相等

长方体和正方体的表面积及体积的计算：

	表面积	体积
长方体	$S_{\text{表}} = 2ab + 2ah + 2bh$ $S_{\text{表}} = 2 \times (ab + ah + bh)$ $S_{\text{表}} = (\text{长} \times \text{宽} + \text{长} \times \text{高} + \text{宽} \times \text{高}) \times 2$	$V = abh$ 或 $V = \text{长} \times \text{宽} \times \text{高}$ $V = sh$
正方体	$S_{\text{表}} = 6a^2$ $S_{\text{表}} = \text{棱长} \times \text{棱长} \times 6$	$V = a^3$ 或 $V = \text{棱长} \times \text{棱长} \times \text{棱长}$ $V = sh$

长方体和正方体的关系：如图（2）

长方体所具备的特征正方体都具备，所以正方体是一种特殊的长方体。它们的关系可以用下图来表示。



图（2）

第一关：必须会

例 1. 两个正方体的木块，拼成一个长方体后，棱长之和减少了 24 厘米，这两个正方体木块原来棱长总和是多少？

解析： 我们知道，当两个正方体木块拼成一个长方体后，减少了 8 条棱，所以 24 厘米就是 8 条棱的总和。可以求出一条棱长。

解： $24 \div 8 = 3$ （厘米） $3 \times 12 \times 2 = 72$ （厘米）

答： 这两个正方体木块原来棱长总和是 72 厘米。

我试试：

1、现有一根 150 厘米长的铁丝，用这根铁丝焊成了一个正方体框架，还剩铁丝 6 厘米。这个正方体框架的棱长是多少厘米？

2、一个长方体，12 条棱长的总长度是 68 厘米，已知它的长是 8 厘米，宽是 5 厘米，高是多少厘米？

3、有一个棱长为 4 分米的正方体木块，要把这个正方体木块截成棱长为 1 分米的小正方体，需要截几次？一共可以截成多少个棱长是 1 分米的小正方体木块？

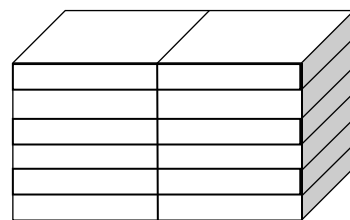
例 2. 一盒磁带的尺寸是 $11 \times 7 \times 2$ （单位：厘米），12 盒磁带装成一个大盒，一个大盒至少需要多少平方厘米的纸板？（接头均不计）

解析： 要想求出需要纸板的面积最少，在包装时，遮盖的面积必须最大，从图中可以看出，新拼成的长方体的长宽高。

解： 长 $= 7 \times 2 = 14$ （厘米） 宽 $= 11$ （厘米） 高 $= 2 \times 6 = 12$ （厘米）

$S_{表} = (14 \times 11 + 14 \times 12 + 11 \times 12) \times 2 = 908$ （平方厘米）

答： 至少需要 908 平方厘米的纸板。



我试试：

1、把一个长 12 分米，宽 6 分米，高 10 分米的长方体截成 3 个相同的小长方体，它的表面积最多可以增加多少平方分米？

2、一个长方体恰好锯成 3 个正方体，这 3 个正方体表面积之和比原来的长方体表面积大 2 平方厘米，这个长方体的表面积是多少平方厘米？

3、把一个棱长为 4 厘米的大正方体木块切成棱长为 1 厘米的小正方体，这些小正方体的表面积的总和是多少平方厘米？

例 3. 小明家要粉刷一间房子，这间房子长 6 米，宽 5 米，高 4 米，门窗面积为 12 平方米，如果粉刷每平方米要乳胶漆 0.2 千克，粉刷这间房子要乳胶漆多少千克？

解析：要求表面积，必须知道求几个面的面积，是粉刷房子，地面是不粉刷的，门窗也不粉刷，所以要求出五个面的面积再减去门窗的面积即可，再求出用多少千克的乳胶漆。

解：总面积 = $(6 \times 5 + 6 \times 4 \times 2 + 5 \times 4 \times 2) - 12 = 106$ (平方厘米)

$$0.2 \times 106 = 21.2 \text{ (千克)}$$

答：粉刷这间房子要乳胶漆 21.2 千克？

我试试：

1、一个长方体的通风管，长 20 分米，宽 15 分米，高 13 分米，如果把它的外表涂上油漆，油漆的面积有多少平方分米？

2、一个游泳池，长 30 米，宽 20 米，深 2 米，池内贴边长为 2 分米的正方形白瓷砖，需要多少块？

3、一块长方形铁皮，长 32 厘米，在它四个顶角分别减去边长 4 厘米的正方形，然后折起来焊成一个无盖的长方体铁皮盒，已知这个铁皮盒的容积是 768 立方厘米，原来这块铁皮的宽是多少厘米？

例 4. 一个正方体的玻璃容器，从里面量棱长是 2.5 分米，向容器中倒入 5.85 升的水，再把一个西红柿放入水中（西红柿全部浸入水中），这时量得水深是 12 厘米，这个西红柿的体积是多少？

解析：我们知道当把西红柿放入水中时，水面会升高，因为西红柿在水中占有一定的空间，升高的水的体积就等于西红柿的体积，我们知道容器的底面积，再求出升高的高度就可以求出西红柿的体积了。

解：5.85 升=5.85 立方分米 $5.85 \div (2.5 \times 2.5) = 0.936$ (分米) 12 厘米=1.2 分米

$$(1.2 - 0.936) \times (2.5 \times 2.5) = 1.65 \text{ (立方分米)}$$

答：这个西红柿的体积是 1.65 立方分米。

我试试：

1、一个长方体水箱，从里面量长 6 分米，宽 5 分米。先倒入 82 升水，再浸入一块棱长 2 分米的正方体铁块，这时水面离水箱口 1 分米，这个水箱的容积是多少？

2、在一个长 50 厘米、宽 40 厘米、高 10 厘米的长方体容器中，盛有 5 厘米深的水。现将一块石头放入水中，水面升高到 8 厘米处，这块石头的体积是多少立方厘米？

3、在一个长 24 分米、宽 9 分米、高 8 分米的水槽中注入 4 分米深的水，然后放入一个棱长为 6 分米的铁块。问水位上升了多少分米？

例 5. 将一个长方体的长减小 5 厘米，变成了正方体，正方体表面积比原来长方体表面积减少了 60 平方厘米。原来长方体的体积是多少立方厘米？

解析： 如果将长方体截去一段后变成正方体，这个长方体一定是特殊的长方体，有两个面是正方形，减少的面积就是 4 个侧面的面积，它们是 4 个相等的长方形。

解： $60 \div 4 = 15$ (平方厘米) $15 \div 5 = 3$ (厘米) $3 \times 3 \times (3+5) = 72$ (立方厘米)

答：原来长方体的体积是 72 立方厘米。

我试试：

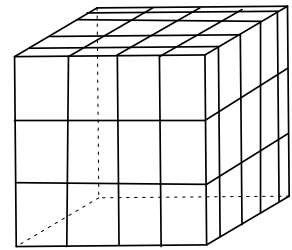
1、一个正方体的高增加了 3 分米后，得到一个底面不变的长方体，它的表面积比原正方体的表面积增加了 48 平方分米。求原来正方体的体积是多少立方分米？

2、一个长方体的长为 12 厘米，高为 8 厘米，前后两个面，上面和侧面各一个面的面积之和是 392 平方厘米，求另外两个面积是多少平方厘米？这个长方体的体积是多少立方厘米？

3、一个长方体，表面积是 368 平方厘米，底面积是 40 平方厘米，底面周长是 36 厘米，求这个长方体的体积。

第二关：我能会

例 1. 如右图，把一个棱长为 6 厘米的正方体木块，沿水平方向锯成三片，每片又锯成 4 小条，每小条又锯成 5 小块，共得到大小不等的长方体 60 个，这 60 个小长方体表面积之和是多少平方厘米？



方法一：

解析： 我们以水平方向为例，等距离锯成三片，每片高 2 厘米，这三片表面积和是 360 平方厘米。如果我们锯成的高分别是 1 厘米、2 厘米、3 厘米，那么这三片表面积之和还是 360 平方厘米，由此可知锯成小长方体的大小是否一样，并不影响总的表面积。因此我们可以锯成 60 个大小一样的小长方体来计算。

解： $6 \div 3 = 2$ (厘米) , $6 \div 4 = 1.5$ (厘米) , $6 \div 5 = 1.2$ (厘米) 。每个小长方体的表面积为 $2 \times (2 \times 1.5 + 2 \times 1.2 + 1.2 \times 1.5) = 14.4$ (平方厘米) ， 表面积总和为 $14.4 \times 60 = 864$ (平方厘米)

答：60 个小长方体的表面积之和是 864 平方厘米。

方法二：

解析： 如果我们不是一片一片的锯，而是一条一条的锯，整体锯，实际上水平方向锯 2 次，侧面锯 3 次，上面锯 4 次，锯一次新增 2 个面（即 2×36 ），一共锯了 9 次，新增 18 个面，加上原 6 个面，面数之和与一个面的面积相乘即可得总的表面积。

解： 总面积为 $36 \times (6 + 2 \times 2 + 3 \times 2 + 4 \times 2) = 864$ (平方厘米)。

答：60 个小长方体的表面积之和是 864 平方厘米。

我能行：

1、一个长方体，它的长、宽、高分别是 6 厘米、5 厘米、4 厘米，沿长边垂直切 2 刀，沿宽边垂直切 2 刀，再沿高水平切 1 刀后，将大长方体分成了不同大小的小长方体，求所有小长方体的表面积之和。

2、一个正方体木块，棱长 2 分米，沿水平方向将它锯成 2 片，每片又锯成 3 条，每条又锯成了 4 块，共得到大小长方体 24 块，这 24 块长方体的表面积的总和是多少平方分米？

3、一个长方体，如果长增加 2 厘米，则体积增加 40 立方厘米；如果宽增加 3 厘米，则体积增加 90 立方厘米；如果高增加 4 厘米，则体积增加 96 立方厘米，请问这个长方体的表面积是多少平方厘米？

例 2. 用 3 个同样大小的正方体拼成一个长方体，长方体的表面积比原来 3 个正方体的表面积之和少 64 平方厘米，求原来 3 个正方体的表面积？

解析：用三个正方体拼成一个长方体，会减少 4 个面，可以求出原来正方体的棱长，就可以求出每个小正方体的表面积。

解： $64 \div 4 = 16$ （平方厘米） $16 \times 6 \times 3 = 288$ （平方厘米）

答：原来 3 个正方体的表面积是 288 平方厘米。

我能行：

1、用 3 个长 6 厘米、宽 4 厘米、高 3 厘米的长方体木块拼成一个大的长方体，怎么样拼面积最小，最小是多少平方厘米？

2、用 3 个长 5 厘米、宽 3 厘米、高 2 厘米的长方体木块拼成一个大的长方体，怎么样拼面积最大，最大是多少平方厘米？

3、把一个正方体平均分成 2 个长方体，已知每个长方体的表面积是 120 平方厘米，求原来正方体的表面积？

例 3. 如图所示，有 30 个棱长为 1 米的正方体堆成一个四层的立体图形，请问：这个立体图形的表面积等于多少？

解析： 这是一个由 30 个正方体组成的立体图形，求它的表面积，如果按照每个正方体表面积的求法相当困难，我们可以把它看成是对面相等的长方体，从图中不难发现，它们的相对面是相等的。可以数出每个大面是由几个小正方形组成的。

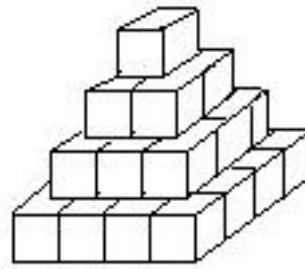
解： 前后两个面： $10 \times 2 = 20$ （平方米）

左右两个面： $10 \times 2 = 20$ （平方米）

上下两个面： $16 \times 2 = 32$ （平方米）

总面积： $20 + 20 + 32 = 72$ （平方米）

答：这个立体图形的表面积等于 72 平方米。



同学们想一想，还有更好的方法吗？

我能行：

1、将棱长为 1 米的正方体 693 个，堆成一个实心的长方体，它的高为 7 米。长和宽都大于高，问它的长和宽各为多少？

2、将棱长为 1 米的正方体 2100 个，堆成一个实心的长方体，它的高为 10 米，长和宽都大于高，它的长和宽各位多少米？

3、将棱长为 1 厘米的小正方体 80 个，堆成一个实心的长方体，这个长方体的长为 8 厘米，问它的宽和高分别为多少厘米？

第三关：我想会

例 1. 一个长方体，相邻两个面的面积之和为 35 平方厘米，棱长都是大于 1 的整数。这个长方体的最大体积是多少立方厘米？

解析： 设长方体的棱长分别为 a 、 b 、 c ，那么 $a \times b + a \times c = 35$ ，即 $a \times (b+c) = 35$ 。

然后我们可以通过讨论 a 、 b 、 c 的取值情况进行计算，然后比较出结果，从而找到正确答案。

解： 当 $a=5$ 时， $b+c=7$ 得到 $b=2, c=5$ 或 $b=3, c=4$

当 $a=7$ 时， $b+c=5$ ， 得到 $b=2, c=3$ ，

$$V=5 \times 2 \times 5=50(\text{立方厘米})$$

$$V=5 \times 3 \times 4=60(\text{立方厘米})$$

$$V=7 \times 2 \times 3=42(\text{立方厘米})$$

答：这个长方体的体积最大是 60 立方厘米。

我要学：

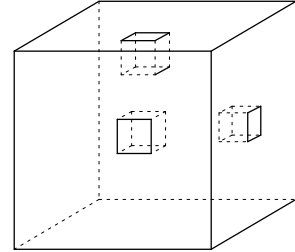
1、一个长方体，棱长都是大于 1 的整数，相邻两个面的面积之和为 45 平方厘米。这个长方体的体积最小是多少立方厘米？

2、一个长方体前面和上面之和是 221 平方厘米，这个长方体的长、宽、高都是质数，求这个长方体的表面积。

3、一个长方体的前面与上面的面积之和为 77 平方厘米，它的长、宽、高都是整数，且为质数，求这个长方体的表面积和体积。

例 2. 如图是一个棱长为 4 厘米的正方体，分别在前、后、左、右、上、下各面的中心位置挖去一个棱长为 1 厘米的小正方体，做成一种玩具，该玩具的表面积是多少平方厘米？如果把这些洞都打穿，表面积又变成多少？

解析： 如果每个面都挖去一个棱长是 1 厘米的正方体，说明相对的面并没有透，求它的表面积，就是大正方体的表面积加上六个小正方体的侧面积。如果将小正方体打穿，表面积就是大正方体的表面积减去六个小正方形的面积，再加上 24 个长是 1.5 厘米，宽是 1 厘米的长方形的面积。



解： (1) $4 \times 4 \times 6 + 4 \times 6 = 120$ (平方厘米)

(2) $(4-1) \div 2 = 1.5$ (厘米)

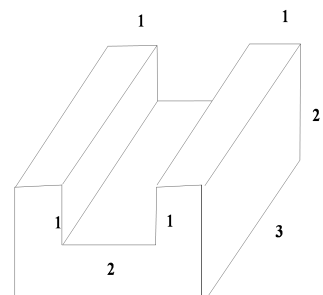
$4 \times 4 \times 6 + 1.5 \times 1 \times 4 \times 6 - 1 \times 1 \times 6 = 126$ (平方厘米)

答： 该玩具的表面积是 120 平方厘米，如果把这些洞都打穿，表面积是 126 平方厘米。

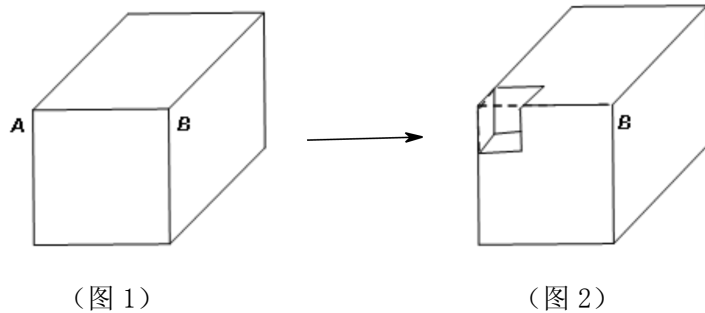
我要学：

1、一个正方体的棱长为 4 厘米，在它的 6 个面的中心，分别挖去一个棱长为 1 厘米的正方体，求这个立体图形的表面积。如果把棱长“4 厘米”改成棱长“3 厘米”，那么这个立体图形的表面积是多少？

2、在一个长方体上挖去一个长方体得一个长方体槽，其尺寸如下图（单位：厘米）。这个长方体槽的表面积和体积各是多少？



3、如图(1)，将一个棱长为10的正方体从顶点A切掉一个棱长为4的正方体，得到如图(2)所示的立方体图形，这个立方体图形的表面积是多少？如果再从顶点B切掉一个棱长为6的正方体，那么剩下的立方体图形的表面积又是多少？



例3. 把一个正方体将其表面涂上蓝色，在它的每个面都等距离的切两刀，可以得到几个三面蓝色；两面蓝色；一面蓝色和六个面都没有蓝色的小正方体。

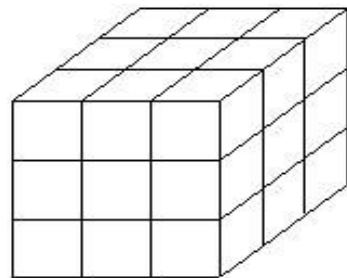
解析： 从图中不难看出，8个顶点的8个正方体有3个面露在外面，每条棱都有一个正方体两个面露在外面，每个面的中心面只有一个面能刷上蓝色，正方体的中心点有一个正方体看不到，所以刷不到蓝色。

解： 三面蓝色：8（个）

两面蓝色：12（个）

一面蓝色：6（个）

没有蓝色：1（个）



答： 可以得到8个三面蓝色；12个两面蓝色；6个一面蓝色和1个六个面都没有蓝色的小正方体。

我要学：

1、一个长方体木块，长6分米，宽5分米，高4分米，把它6个面都涂成红色，然后把它锯成棱长都是1分米的正方体小木块，其中三面有红色的小木块有（ ）块，两面有红色的小木块有（ ）块，一面有红色的小木块有（ ）块，六个面都没有红色的小木块有（ ）块。

2、将一个表面涂成红色的长方体，分割成若干个体积为 1 立方厘米的小正方体，其中一点红色都没有的小正方体只有 3 个，求原长方体的体积？

3、把若干个体积相同的小正方体堆成一个大的正方体，然后在大正方体的表面涂上颜色，已知两面被涂上颜色的小正方体共有 36 个，那么，这些小正方体一共有多少个？

大显身手：

1、一个长方体木箱的体积是 240 立方分米，它的长是 8 分米，宽是 6 分米，木箱的高是多少分米？

2、有甲，乙两个水箱，从里面测量，甲水箱长 15 分米，宽 10 分米，高 8 分米，乙水箱长 10 分米，宽 10 分米，高 9 分米，甲水箱装满水，乙水箱空着，现将甲水箱里的一部分水抽到乙水箱中，使两箱水水面高度一样，两个水箱的水面高度是多少分米？

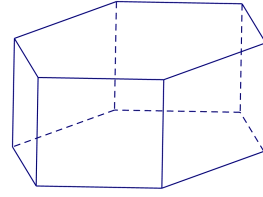
3、把一个底面是正方形且边长是 3 分米，高是 5 分米的长方体石料尽量加工为体积最大的正方体，那么凿去的石料体积至少是多少立方厘米？

4、有一张长是 40 厘米，宽是 30 厘米的长方形铁皮，从四个角上各割掉一个边长为 4 厘米的正方形，然后焊接成一个无盖的铁盒，这个铁盒的最大容积是多少升？

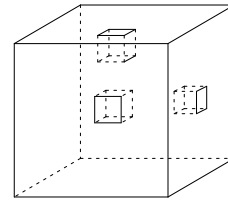
5、一个底面是正方形的铁柜，如果把它的侧面展开，正好得到一个边长是 40 厘米的正方形，这个铁箱的容积是多少升？

6、一块正方体钢坯，棱长是 40 厘米，把它制成一个高是 160 厘米的长方体模具。这个长方体模具的底面积是多少平方厘米？

7、一个底面是正六边形的茶叶桶，底面积是 38 平方厘米，底面周长是 20 厘米，高是 16 厘米，制作这样一个茶叶桶至少需要铁皮多少平方厘米？



8、一个棱长为 10 厘米的正方体（如图），分别在它的前后、左右各面的中心位置挖去一个横截面的边长为 3 厘米的长方体（都和对面打通）。求这个立体图形的体积和表面积。

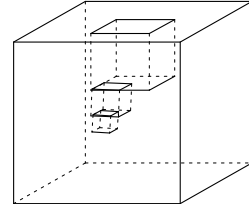


9、将一个长 6 厘米、宽 4 厘米、高 3 厘米的长方体的六个面都涂上红色，然后把这个长方体切割成一个个边长为 1 厘米的小正方体。这些小正方体中恰好有两个面涂上红色的有多少个？

10、有一张铁皮，长 40 厘米，宽 20 厘米，将这张长方形铁皮焊成一个水槽，怎样焊接体积最大？

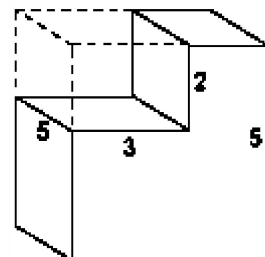
真题欣赏：

1、如图所示，从一个边长为 2 厘米的正方体的上面的正中向下挖一个边长为 1 厘米的正方体小洞，接着在小洞的底面正中再向下挖一个边长为 $\frac{1}{2}$ 厘米的正方体，接着再在小洞的底面正中再向下挖一个边长为 $\frac{1}{4}$ 厘米的正方体小洞。求现在得到的立体图形的表面积为多少平方厘米？



2、把 19 个棱长为 3 厘米的正方体重叠起来，如图所示，拼成一个立体图形，求这个立体图形的表面积。

3、一个正方体木块，棱长是 5，如果在他上面截去一个棱长为 $5 \times 3 \times 2$ 的长方体，那么，他的表面积减少百分之几？



4、棱长是 m 厘米（ m 为整数）的正方体的若干面涂上红色，然后将其切割成棱长是 1 厘米的小正方体。至少有一面红色的小正方体个数和表面没有红色的小正方体个数的比为 13:12，此时 m 的最小值是多少？

5、一个长、宽、高分别为 21 厘米、15 厘米、12 厘米的长方形。现从它的上面尽可能大的切下一个正方体，然后从剩余的部分再尽可能大的切下一个正方体，最后再从第二次剩余的部分尽可能大的切下一个正方体，剩下的体积是多少立方厘米？