

第十一讲 因数与倍数

知识导航：

1. 首先要了解在非零自然数的范围内，我们研究因数与倍数。形如： $a \times b = c$ 中，我们把

a 、 b 叫做 c 的因数，把 c 叫做 a 、 b 的倍数。

注意以下几点：

(1) 在谈因数与倍数时，一定要说明一个数是另一个数的因数或倍数，不能单独说一个数是因数或是倍数。

(2) 0 不作为研究因数与倍数的对象。

2. 怎样找一个非零自然数的因数

就是在非零的自然数内，哪些数的乘积等于这个数，那么这些数都是这个数的因数。

例： $12 = 1 \times 12 = 2 \times 6 = 3 \times 4$ ，那么 12 的因数有 {1、2、3、4、6、12} 共 6 个。

这就说明一个数的因数的个数是有限的，就存在最大因数即为本身，最小因数是 1。

3. 怎样找一个非零自然数的倍数

就是给这个数分别乘以 1、2……即 $a \times 1 = a$ $a \times 2 = 2a$ ……这就说明一个数的倍数的个数是无限的，就不存在最大倍数，但存在最小倍数即为本身。

一个非零自然数的最大因数与最小倍数是相等的且都等于它本身。

4. 了解相关的概念

(1) 偶数：能被 2 整除的数就叫偶数（俗称双数），习惯用 $2n$ 表示。

(2) 奇数：不能被 2 整除的数就叫奇数（俗称单数），习惯用 $2n-1$ 表示。

(3) 整数：像……-3、-2、-1、0、1、2、3、……都是整数。

(4) 自然数：像 0、1、2、3、4、……都是自然数。

5. 数的奇偶性特征

奇数 \pm 奇数 = 偶数 奇数 \pm 偶数 = 奇数 偶数 \pm 偶数 = 偶数

奇数 \times 奇数 = 奇数 奇数 \times 偶数 = 偶数 偶数 \times 偶数 = 偶数

6. 倍数的特征

(1) 2 的倍数特征：末位数字是 0、2、4、6、8 的数；

(2) 3 或 9 的倍数特征：各位数字之和是 3 或 9 的倍数；

(3) 5 的倍数特征：末位数字是 0 或 5；

(4) 4 或 25 的倍数特征：一个数的末两位是 4 或 25 的倍数；

(5) 8 或 125 的倍数特征：一个数末三位是 8 或 125 的倍数；

(6) 11 的倍数特征：一个数的奇数位上的数字之和与偶数位上数字之和的差是 11 的倍数。

(7) 7、11、13 的倍数特征：一个整数的末三位与末三位以前的数字所组成的数之差（大数减小数）是 7、11、13 的倍数。

第一关：必须会

例 1. 根据 $18 \div 2 = 9$ ，说说（ ）是（ ）的倍数，（ ）是（ ）的因数。

解析：根据已知条件，几个量之间的关系，我们可以把除法算式转化乘法算式。

解： $2 \times 9 = 18$ 所以 18 是 2 和 9 的倍数，2 和 9 是 18 的因数。

我试试：

1、 $24 \div 6 = 4$ ， （ ）是（ ）的因数 ， （ ）是（ ）的倍数。

2、猜猜我是谁？

(1) 我是 24 的全部因数。 ()

(2) 我是 2 和 5 的倍数的最大两位数。 ()

(3) 我既是 9 的因数、又是 9 的倍数，我是谁呢？ ()

(4) 我是 36 的因数，又是 6 的倍数，我可能是几？ ()

(5) 我是 $a \square b$ 一个三位数，它是 3 的倍数，且 $a+b=13$ ，那么 \square 中可以填的数()

(6) 我是一个三位数，百位上数字是一位数中最大的奇数，个位数字是最小的偶数，十位数字是最小的质数，那么我是 ()。

(7) 491 至少增加___才是 3 的倍数；至少减少___才是 5 的倍数；至少增加或减少___才是 2 的倍数 ()。

3、判断下列各题正误（对的在括号内打 \checkmark ，错的打 \times ）

(1) 5 是因数，10 是倍数。 ()

(2) 36 的全部因数是 2、3、4、6、9、12 和 18。 ()

(3) 一个自然数越大，它的因数个数就越多。 ()

(4) 个位上是 3、6、9 的数就是 3 的倍数。 ()

(5) 自然数不是奇数就是偶数。 ()

例 2. 从 4、5、8、0 这 4 个数字中任意选出其中的 3 个组成三位数，至少各写三个。

(1) 组成的数是 2 的倍数：_____。

(2) 组成的数是 3 的倍数：_____。

(3) 组成的数是 5 的倍数：_____。

(4) 组成的数同时是含有因数 2、3、5 的倍数：_____。

解析：我们可以根据 2、3、5 倍数的特征来按要求写数，同时是 2、3、5 的倍数，首先个位上的数字必须是 0，选择数字时，其它两个数字之和必须是 3 的倍数。

解：(1) 584 548 480 480 450

(2) 450 540 804 504 408

(3) 450 540 485 845 840

(4) 450 540 480 840

我试试：

1、利用 7、6、9、2、4、0 这六个数字中的五位数字组成同时含有因数 2、3、5 的所有五位数，共有多少个？

2、在横线上填适当的一个数字

(1) 32__是 2 的倍数又是 5 的倍数。

(2) 42__是 2 的倍数又是 3 的倍数。

(3) 1__是 3 的倍数也是 5 的倍数。

(4) 60__同时是 2、3、5 的倍数。

3、写出同时是 3 和 5 倍数的最小三位数，同时是 2、3、5 倍数的最大三位数，同时是 2、3、5 倍数的最小四位数。

例 3. 在 1---100 中，因数的个数是奇数的数有哪些数？因数的个数是偶数的有多少个？

解析：我们知道，一个数的因数个数都是成对出现的，但是，有些数的因数对是相同的，所以，它们的因数个数就是奇数个。

解：100 以内（包括 100）因数个数是奇数的有：1、4、9、16、25、36、49、64、81、100 共 10 个，因数个数是偶数的一共有 $100-10=90$ （个）。

我试试：

1、在 40、12、37、39、45、18、10、26、91、69、234、76、600 这些数中

(1)、奇数有：_____。

(2)、偶数有：_____。

2、个位是()的自然数,叫做奇数。两位数中,最小的奇数是(),最大的偶数是()。

自然数中最小的奇数是_____ , 最小的偶数是_____。

3、判断下列说法是否正确,正确的打“√”错的打“×”

(1) 1 是所有自然数的因数。 ()

(2) 同时含有因数 2、3、5 的数一定是偶数。 ()

(3) 35 既是 7 的倍数也是 5 的因数。 ()

(4) 一个数是 9 的倍数,它一定也是 3 的倍数。 ()

(5) 3 的倍数一定是奇数。 ()

(6) 所有的素数都是奇数。 ()

(7) 2 的倍数都是合数。 ()

(8) 一个合数的因数的个数至少有 3 个。 ()

(9) 12 的因数一定少于 12。 ()

(10) 2 是最小的偶数也是最小的素数。 ()

例 4. 把 1 到 2007 这些自然数相加,它们的和是奇数,还是偶数?为什么?

解析: 要想确定它们的和是奇数还是偶数,必须先确定 2007 里面有多少个奇数,有多少个偶数,还要知道奇偶数的特征。

解: 1—2000 里面奇数和偶数的个数相同,都是 1000 个,相加的和都是偶数,2001—2007 共有 7 个数,4 个奇数和 3 个偶数,它们分别相加的和也是偶数,所以还是偶数。

答: 把 1 到 2007 这些自然数相加和是偶数。

我试试：

1、用“偶数”和“奇数”填空。

偶数+偶数= () 奇数+奇数= () () +偶数=奇数

偶数×偶数= () 奇数× () =偶数 奇数- () =偶数

2、判定下面的结果是偶数还是奇数

① $2+5$ 的结果是 () ②如果 A 是自然数 ($A \neq 0$)， $2A$ 表示 ()

③ 2×3 的结果是 () ④一个数只有 1 和本身两个因数，它是 ()

⑤ $785+547$ 的和是 () ⑥ $675+54-465$ 的结果是 ()

⑦ 75×71 的积是 () ⑧奇数×奇数的积是 ()

3、选择正确的序号填在括号内

(1) 同时是 2、3、5 的倍数的数是 ()

A. 奇数 B. 偶数

(2) 如果 a 表示自然数，那么下面一定可以表示偶数的是 ()

A. $a+1$ B. $a+2$ C. $2a$

(3) 几个质数的积一定是 ()

A. 奇数 B. 偶数 C. 无法判断

(4) 小明晚上放学回家，打开灯，亮了，再开 50 次，灯是 ()

A. 亮着 B. 灭了

(5) 从 1 到 2005 个自然数相加的和是 ()

A. 奇数 B. 偶数

第二关：我能会

例 1. 三个连续的偶数和是 96，这三个数分别是多少？

解析：连续偶数之间相差 2，如果设中间的数是 a ，则另外两个数分别是 $a-1$ ， $a+1$ ，可以看出中间的数是它们的平均数。

解： $96 \div 3 = 32$ $32+2=34$ $32-2=30$

答：这三个连续偶数分别是 30、32、34。

我能行：

1、三个连续奇数的和是 63，这三个奇数分别是多少？

2、五个连续自然数的和是 135，这五个连续自然数分别是多少？

3、五个连续奇数的和是 135，这五个连续奇数分别是多少？

例 2. 在 $3\square 2\square$ 中， \square 里可以填入适当的数字，使组成的四位数既是 3 的倍数又是 5 的倍数，这个数最大是多少？

解析：要想使这个数最大，我们必须考虑较大的数字，如果左边第一个 \square 填入 9，个位 \square 只能填入 0 或 5，它们相加的和都不是 3 的倍数。所以，要考虑在百位上填入尽可能大的数字。

解： $3\square 2\square = 3825$

答：这个数最大是 3825。

我能行：

1、 $32\square\square 0$ 是有两个相同数字的五位数，它同时是 2、3 和 5 的倍数，这个五位数最小是多少？

2、一个五位数 $27a8b$ ，既能被 3 整除，又能被 5 整除， a 与 b 可为哪些数字？

3、一个四位数 $9A4B$ 能同时被 5 和 6 整除，这个四位数是多少？

例 3. 如果五位数 $\square 436\square$ 是 45 的倍数，那么这个五位数是多少？

解析：我们可以把 45 分解成 9×5 ，这个五位数要是 45 的倍数，就一定能被 5 和 9 整除，是 5 的倍数，末尾的数字一定是 0 或 5，还要满足各位数字之和是 9 的倍数。

解：当末尾数字填 0 时，首位数字填 5，即 54360

当末尾数字填 5 时，首位数字填 9，即 94365

答：这个五位数是 54360 和 94365。

我能行：

1、一个四位数 $8A1B$ 能同时被 5 和 6 整除，这个四位数是多少？

2、在 358 后面补上三个数字组成一个六位数，使它能被 4、5、9 整除，这个六位数最小是多少？

3、一个六位数 23A56A 是 88 的倍数，这个数除以 88 所得的商是多少？

例 4. 一个大于 2 的自然数，除以 3 余 2，除以 5 余 2，除以 7 也余 2，那么这个自然数最小是多少？

解析：这个自然数分别除以 3、5、7 余数都为 2，那么这个数减去 2 就是 3、5、7 的倍数，即：这个数是 3、5、7 的最小公倍数再加上 2。

$$\text{解：} [3、5、7]=105 \quad 105+2=107$$

答：这个数最小是 107。

我能行：

1、已知某小学六年级学生超过 100 人，而不多于 140 人，将他们按每组 12 人分组，多 3 人，按每组 8 人分，也多 3 人，求出该校六年级的确切人数。

2、甲、乙两个一位自然数，它们的和被 5 除余 2，它们的差能被 5 整除，那么甲数被 5 除，余数是多少？

3、某数加上 22 的和除以 9 余 4，这个数加上 31 的和除以 9 余几？

第三关：我想会

例 1. 三个数的和是 555，这三个数分别能被 3、5、7 整除，而且商都相同，这三个数分别是多少？

解析：根据已知条件，我们可以知道这几个数分别是 3、5、7 的倍数，而且商相同，我们可以设商是 A。这几个数分别是 3A、5A、7A。这 3 个数分别是 X、Y、Z。

$$\text{解：} X \div 3=A \quad Y \div 5=A \quad Z \div 7=A$$

$$3A+5A+7A=555 \quad \text{解得 } A=37$$

$$X=3 \times 37=111$$

$$Y=5 \times 37=185$$

$$Z=7 \times 37=259$$

答：这三个数分别是 111、185、259。

我要学：

1、三个数的和是 351，这三个数分别能被 7、9、11 整除，而且商相同，这三个数分别是多少？

2、已知 A 是一个自然数，它是 15 的倍数，并且它的各个数位上的数字只有 0 和 8 两种，A 最小是多少？

3、商店里有六箱货物，分别重 15、16、18、19、20、31 千克，两个顾客买走了其中五箱，已知一个顾客买的货物重量是另一个顾客的 2 倍。问：商店剩下一箱货物重多少千克？

例 2. 学校买来 72 只桶，共交了 $\square 67.9\square$ 元钱，（ \square 内的数字辨认不清）请你算出每只桶要用多少元？

解析： 我们可以把 $\square 67.9\square$ 元看成 $\square 679\square$ 分，因为是 72 个桶的总价，所以，这个数一定能被 72 整除， $72=8 \times 9$ ，可以根据能被 8 和 9 整除的特征求出各 \square 的数。

解： 被 8 整除的特征是末三位数字之和是 8 的倍数，所以， $79\square$ 的 \square 内应填 2。又知

$\square+6+7+9+2=24+\square$ 能被 9 整除，因此前面 \square 内应填 3。那么 72 只桶总价钱是 367.92 元，

$$367.92 \div 72 = 5.11 \text{ (元)}$$

答：每只桶要用 5.11 元。

我要学：

1、五（1）班共买了 28 枝价格相同的钢笔，付人民币 $9\square.2\square$ 元，已知 \square 处数字相同，每枝钢笔多少元？

2、小马虎买了 72 枝同样的钢笔，可是发票不慎落水浸湿，单价已无法辨认，总价数字也不全，只能认出 $\square 11.4\square$ 元，你能帮小马虎找不明数字吗？

3、在□内填上适当的数字，使六位数□1991□是66的倍数，那么它除以66的商是多少？

例3. 有15位同学，每位同学都有编号，它们是1号到15号。1号同学写了一个自然数，2号说：“这个数能被2整除”，3号说：“这个数能被3整除”，……，依次下去。每位同学都说，这个数能被他的编号数整除。1号作了一一验证，只有编号连续的两位同学说得不对，其余同学都对，如果告诉你，1号写的数是六位数，那么这个数至少是多少？

解析： 首先可以断定编号是2, 3, 4, 5, 6, 7号的同学说的一定都对。不然，其中说得不对的编号乘以2后所得编号也将说得不对，这样就与“只有编号连续的两位同学说得不对”不符合。因此，这个数能被2, 3, 4, 5, 6, 7都整除。

其次利用整除性质可知，这个数也能被 2×5 , 3×4 , 2×7 都整除，即编号为10, 12, 14的同学说得也对。从而可以断定编号11, 13, 15的同学说得也对，不然，说得不对的编号不是连续的两个自然数。

现在我们可以断定说得不对的两个同学的编号只能是8和9。

解： 这个数是2, 3, 4, 5, 6, 7, 10, 11, 12, 13, 14, 15的公倍数，由于上述十二个数的最小公倍数是：

$$\begin{aligned} & [2, 3, 4, 5, 6, 7, 10, 11, 12, 13, 14, 15] \\ & = 2^2 \times 3 \times 5 \times 7 \times 11 \times 13 \\ & = 60060 \end{aligned}$$

设1号写的数为 $60060k$ (k 为整数)，这个数是六位数，所以 $k \geq 2$ 。

若 $k=2$ ，则 $8 \nmid 60060k$ ，不合题意，所以 $k \neq 2$ 。同理 $k \neq 3$, $k \neq 4$ 。因为 k 的最小值为5，这个数至少是 $60060 \times 5 = 300300$

答：这个六位数是300300。

我要学：

1、有一个四位数，千位上的数字和百位上的数字都被擦掉了。知道十位上的数字是1，个位上的数字是2，又知这个数如果减去7就能被7整除，减去8就能被8整除，减去9就能被9整除，这四位数是多少？

2、用 1, 2, 3, 4, 5, 6 每一个数字使用一次组成一个六位数 \overline{abcdef} ，使得三位数 \overline{abc} , \overline{bcd} , \overline{cde} , \overline{def} 能依次被 4, 5, 3, 11 整除。求这个六位数。

3、五位数 $\overline{x679y}$ 能被 72 整除, 这个五位数是_____。

大显身手:

1、东东家的电话号码是七位数，第一位比 3 的最小倍数小 1，第二位是最小的合数，第三位是最小的偶数，第四位是既不是素数也不是合数，第五位是 5 的最大因数，第六位比最小的素数多 1，第七位是 10 以内的既是 2 的倍数，也是 4 的倍数但不是 4，东东家的电话号码是_____。

2、从 0、3、5、7 四个数字中任选三个，组成能同时被 2、3、5 整除的三位数，这样的三位数共有哪几个？并按从小到大顺序排列。

3、如果 $275\square4$ 能被 3 整除，那么 \square 里最小能填（ ），最大能填（ ）。

4、若五位数 abcde 能被 6 整除，则 $4(a+b+c+d) - 5e$ 能否被 6 整除？

5、一个三位数被 37 除余 17, 被 36 除余 3, 那么, 这个三位数是_____。

6、1~10000 的自然数中, 能被 5 或 7 整除的数共有_____个; 不能被 5 也不能被 7 整除的数共有_____个。

7、要使 6 位数 15 □ □ □ 6 能够被 36 整除, 而且所得的商最大, □ □ □ 内应填_____。

8、将一个不能被 3 整除的自然数, 拆分成若干个自然数的和。那么, 在这若干个自然数中不能被 3 整除的数至少有_____个。

9、在 947 后面添上三个不同的数字, 组成一个被 2、3、5 同时整除的最小的六位数, 这个数是_____。

10、桌上有 9 个杯子, 其中 5 个口向下, 4 个口向上, 每次只能翻动 6 个杯子, 小东说他经过无数次翻动后, 总能将向下的杯口全部翻向上。你觉得有可能吗? 为什么?

真题欣赏:

1、在 12 个位置上放置一串自然数, 每个位置放一个数, 使第二个数与第一个数相等, 从第三个数开始, 每个数恰好是它前边所有数的总和, 我们称这样的 12 个数为“好串数”。那么, 含有 1992 这个数的“好串数”共有_____个。

2、星光小学来了两位年轻的新老师，他们相差 4 岁。有趣的是他们年龄的各位上数字的和都是 5 的倍数，那么，这两位新老师的年龄分别是多少岁？（迎春杯真题）

3、用一个奇数去除 288 和 251，所得的余数都是 29，这个奇数是多少？（三帆中学小升初）

4、有 3 个吉利数 888，518，666，用它们分别除以同一个自然数，所得的余数依次为 a ， $a+7$ ， $a+10$ ，则这个自然数是_____。（清华附中小升初）

5、如果在一个两位数的两个数字之间添写一个零，那么所得的三位数是原来的数的 9 倍，问这个两位数是_____。（101 中学考题）