

第二讲 解方程

知识导航：

一、会用数字和字母表示数量之间的关系，如果相乘，数要放在字母的前面，乘号省略不写。字母按照顺序排列，如： $7x$ ， $5abc$ ， $6xy$ ， $X^2=X \cdot X$ 等等，它们之间都表示相乘的关系。

二、简易方程

1. 方程的概念与特点

(1) 含有未知数的等式叫做方程。方程的特征是：它含有未知数，同时又是一个等式。用等号连接的两个式子，叫做等式。

(2) 方程与等式的联系和区别：方程一定是等式，但等式不一定是方程。

(3) 等式的性质 1：在等号的两边同时加上（或减去）同一个数，等式不变。

等式的性质 2：在等号的两边同时乘以（或除以）同一个数（0 除外），等式不变。

(4) 方程的“解”与“解方程”的区别。方程的“解”是一个使等式两边相等的未知数的值，“解方程”是求解的过程。

2. 解方程的方法

在解方程的过程中，我们可以运用等式的基本性质，还可以应用加、减、乘、除法的逆运算。

对于较复杂的一元一次方程能熟练运用去分母，去括号，移项，合并同类项，系数化为“1”五步解法求解，并能判断解的合理性。

求一个加数 = 和 - 另一个加数

减数 = 被减数 - 差 差 = 被减数 - 减数

求一个因数 = 积 $\div$ 另一个因数

被除数 = 除数 $\times$ 商 除数 = 被除数 $\div$ 商

第一关：必须会

例 1. 解方程： $X-2.7=1.5$

解析：因为 X 在这里做“被减数”所以根据被减数等于差加上减数即可求出 X 的值

解： $X-2.7=1.5$

$$X=1.5+2.7$$

$$X=4.2$$

我试试：

1、 $x-38=88$

$36-X=2.4$

$28-X=23$

2、 $X-4.5=8.4$

$23.5-X=12.3$

$X-33.5=45$

3、 $X-\frac{3}{4}=\frac{12}{17}$

$\frac{8}{9}-X=\frac{9}{20}$

$1\frac{2}{3}-X=0.4$

例 2. 解方程： $X+\frac{3}{4}=\frac{7}{8}$

解析：因为 X 在这里做"加数"，所以根据加数等于和减去另一个加数即可求出 X 的值。

$$\begin{aligned}\text{解： } X+\frac{3}{4} &= \frac{7}{8} \\ X &= \frac{7}{8}-\frac{3}{4} \\ X &= \frac{1}{8}\end{aligned}$$

我试试：

1、 $36+X=48$

$58+X=87$

$X+13=32$

2、 $X+4.5=17.8$

$20.3+X=36$

$X+23.6=47.5$

3、 $X+\frac{2}{5}=1\frac{3}{8}$

$X+\frac{11}{22}=\frac{5}{6}$

$1\frac{1}{2}+X=3\frac{1}{4}$

例 3. 解方程: $9.6X=19.2$

解析: 因为 X 在这里做"因数", 所以根据因数等于积除以另一个因数即可求出 X 的值。

解: $9.6X=19.2$

$$X=19.2 \div 9.6$$

$$X=2$$

我试试:

1、 $7X=28$

$$4X=2.4$$

$$2X=1.8$$

2、 $2.4X=1.6$

$$3.5X=4.9$$

$$8X=2.4$$

3、 $\frac{2}{7}X=\frac{6}{7}$

$$1\frac{3}{4}X=\frac{4}{7}$$

$$\frac{5}{7}X=0.25$$

例 4. 解方程: $51.85 \div X=30.5$

解析: 因为 X 在这里做"除数", 所以根据除数等于被除数除以商即可求出 X 的值。

解: $51.85 \div X=30.5$

$$X=51.85 \div 30.5$$

$$X=1.7$$

我试试:

1、 $36 \div X=9$

$$X \div 7=12$$

$$48 \div X=4$$

2、 $12.5 \div X=8$

$$X \div 2.4=4.8$$

$$5.6 \div X=0.28$$

$$3、\frac{5}{8} \div X = \frac{13}{15}$$

$$X \div \frac{17}{19} = \frac{27}{34}$$

$$3\frac{3}{4} \div X = \frac{4}{7}$$

例 5. 解方程： $3X+1=10$

解析：稍复杂的方程我们可以根据移项变号的方法，一定要注意改变数前面的符号，将其改成同一级运算的符号。

解： $3X+1=10$

$$3X=10-1$$

$$3X=9$$

$$X=3$$

我试试：

$$1、5X-70=25$$

$$42-4X=18$$

$$5X+6X=99$$

$$2、7.6+2X=10.6$$

$$7.5X+2 \times 3=21$$

$$24.5-2.5X=22$$

$$3、\frac{2}{3}X - \frac{4}{7} = \frac{4}{7}$$

$$1\frac{3}{8} - \frac{6}{7}X = \frac{1}{2}$$

$$5X + \frac{1}{2} = \frac{7}{8}$$

第二关：我能会

例 1. 解方程: $15X=13.5-3X$

解析:此方程两边都有未知数，我们必须合并同类项，用移项变号的方法，将等号两边的未知数移到同一侧，再合并求解。

解： $15X=13.5-3X$

$$15X+3X=13.5$$

$$18X=13.5$$

$$X=0.75$$

我能行：

1、 $4X+15=6X+3$

$12X-3X=7X-8$

$7X+2=2X+17$

2、 $20+4X=32-2X$

$7X+8=8X-1$

$3X-4=5X-6$

3、 $26-4X=40-6X$

$38-6X+9X=50$

$2X-5X+12=4X-7$

例 2. 解方程 $6X+0.46\times 4=16.84$ 并检验

解析：将“ 0.46×4 ”移到等号右边，则 X 在这里做“因数”然后根据因数等于积除以另一个因数即可求出 X

解： $6X+0.46\times 4=16.84$

$$6X=16.84-0.46\times 4$$

$$6X=16.84-1.84$$

$$6X=15$$

$$X=2.5$$

检验：把 $X=2.5$ 代入原方程

$$\text{左边}=6\times 2.5+0.46\times 4$$

$$=16.84$$

左边=右边 所以 $X=2.5$ 是原方程的解

我能行：

1、 $12X+268\div 2=206$

$72\times 0.1-1.2X=0.6$

2、 $3X+79\times 3=357$

$4X-6.6=11.9\times 2$

3、 $\frac{1}{4}-\frac{4}{7}X\div 2=\frac{3}{16}$

$\frac{1}{3}X+8\times 0.5=16$

例 3. 解方程 $(X+1)-2(X+4)=1-3X$

解析：对于方程中出现的小括号我们可以利用分配律把小括号去掉,但要注意 $2(X+4)$ 前面的符号是"-"号,去掉括号后里面的各项要改变符号

解： $(X+1)-2(X+4)=1-3X$

$$X+1-2X-8=1-3X$$

$$X-2X+3X=1-1+8$$

$$2X=8$$

$$X=4$$

我能行：

1、 $3(X-1)=12$

$7X-(3X+2)=22$

2、 $2(2X+1)-10X-1=6$

$42+(2X-2)=100$

3、 $5(X+2)=2(5X-1)$

$4(2X-1)-3(5X+1)=14$

例 4. 解方程 $X - \frac{X-1}{2} = 2 - \frac{X+2}{5}$

解析：此方程出现了分母，所以我们首先要把分母去掉，在方程的左右两边每一项都乘以 2 和 5 的最小公倍数 10，我们发现分母去掉后又出现了小括号，这在前面我们是学习过的，然后根据去括号法则，移项法则求出未知数的值。

解：

$$X - \frac{X-1}{2} = 2 - \frac{X+2}{5}$$

$$10X - 5(X-1) = 20 - 2(X+2)$$

$$10X - 5X + 5 = 20 - 2X - 4$$

$$10X - 5X + 2X = 20 - 4 - 5$$

$$7X = 11$$

$$X = \frac{11}{7}$$

我能行：

1、 $\frac{X+1}{4} = \frac{X-1}{3}$

$\frac{X-1}{3} + X = \frac{3X+8}{6}$

2、 $X - \frac{X-1}{3} = 7 - \frac{X+3}{5}$

$\frac{1}{2}(4X-3) - 2 = \frac{X+1}{3} + 2$

3、 $\frac{2X+1}{3} - \frac{10X+1}{6} = 1$

$\frac{5X-7}{10} - 1 = \frac{X+2}{5} - \frac{2X}{5}$

第三关：我想会

例 1. 解方程 $\frac{4-6X}{0.01} - 6.5 = \frac{0.02-2X}{0.02} - 7.5$

解析： 此方程的分母中出现了小数，为了简化解题过程，我们首先把方程中出现的小数利用分数的基本性质化为整数，然后在去分母，移项，合并同类项求出 X 的值。

解：

$$\frac{4-6X}{0.01} - 16.5 = \frac{0.02-2X}{0.02} - 7.5$$

$$\frac{400-600X}{1} - 16.5 = \frac{100(0.02-2X)}{2} - 7.5$$

$$2(400-600X) - 33 = 100(0.02-2X) - 15$$

$$800 - 1200X - 33 = 2 - 200X - 15$$

$$1200X - 200X = 800 - 33 - 2 + 15$$

$$1000X = 780$$

$$X = \frac{39}{50}$$

我要学：

1、 $\frac{8X-1.5}{0.5} - \frac{5X-1}{0.2} = \frac{1.2-4X}{0.5}$

$$\frac{X-1}{0.4} + X = \frac{2X+1}{0.6}$$

2、 $\frac{X}{0.7} - \frac{0.17-0.2X}{0.03} = 1$

$$\frac{1}{2}X - \frac{9X-2}{6} - 2 = 0$$

3、 $\frac{0.1X-0.2}{0.02} - \frac{X+1}{0.5} = 3$

$$\frac{3X}{0.5} - \frac{1.4-X}{0.4} = 1$$

例 2. 解方程组
$$\begin{cases} 2X - Y = 5 \dots\dots\dots ① \\ X + 3Y = 6 \dots\dots\dots ② \end{cases}$$

解析：解二元一次方程组的关键是要化“二元”为“一元”，即把陌生的“二元一次方程组”转化为熟悉的“一元一次方程”，求解的关键是消元，当方程组中某个未知数的系数是正负1时，用代入法解方程比较简单而在上边的（1）中可以通过移项得 $Y=2X-5$ 代入（2）；还可以通过（2）移项得到 $X=6-3Y$ 代入（1）

$$\begin{cases} 2X - Y = 5 \dots\dots\dots ① \\ X + 3Y = 6 \dots\dots\dots ② \end{cases}$$

解： 由（1）得 $Y=2X-5$ (3)

把（3）代入（2）得 $X+3(2X-5)=6$

$$X=3$$

把 $X=3$ 代入（2）得 $3+3Y=6$

$$Y=1$$

所以方程组的解为 $\begin{cases} X = 3 \\ Y = 1 \end{cases}$

我要学：

$$1、 \begin{cases} 2X - 3Y = 7 \\ X + 3Y = 6 \end{cases} \qquad \begin{cases} Y = 2X - 3 \\ 3X + 2Y = 8 \end{cases}$$

$$2、 \begin{cases} 2X - Y = 6 \\ X + 2Y = 22 \end{cases} \qquad \begin{cases} X + Y = 1.7 \\ 3X - 2Y = 1.6 \end{cases}$$

$$3、 \begin{cases} 8X + 2Y = 5 \\ 3X - 2Y = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} 3X + 2Y = 13 \\ 5X + 2Y = 19 \end{cases}$$

例 3. 解方程组

$$\begin{cases} Y = 2Z \dots\dots\dots(1) \\ X = Y + Z + 1 \dots\dots\dots(2) \\ 20X + 30Y + 40Z = 980 \dots\dots(3) \end{cases}$$

解析：此方程组含有三个未知数，我们可以根据代入消元法，将三个未知数变成含有两个未知数的新方程组，再逐渐消去其中的一个，求出最后一个未知数。再将得数分别代入某一个方程中，求出相对应的未知数，一一求出未知数的解。

$$\begin{cases} Y = 2Z \dots\dots\dots(1) \\ X = Y + Z + 1 \dots\dots\dots(2) \\ 20X + 30Y + 40Z = 980 \dots\dots(3) \end{cases}$$

解：化简（3）得 $2X+3Y+4Z=98$ (4)

把（2）代人（4）消掉未知数 X 得

$$2(Y+Z+1)+3Y+4Z=98 \qquad 5Y+6Z=96 \quad (5)$$

（1）与（5）构成两个未知数的方程组

$$\begin{cases} Y = 2Z \dots\dots\dots(1) \\ 5Y + 6Z = 96 \dots\dots\dots(5) \end{cases}$$

将（1）代人（5）消去 Y 得 $Z=6$ (6)

把（6）代人（1）得 $Y=2Z$ $Y=2 \times 6=12$ (7)

把（6）（7）代入（2）得 $X=Y+Z+1=19$

$$\text{原方程组的解} \begin{cases} X = 19 \\ Y = 12 \\ Z = 6 \end{cases}$$

我要学：

$$1、 \begin{cases} Z = X + Y \\ 2X - 3Y + 2Z = 5 \\ X + 2Y - Z = 3 \end{cases}$$

$$2、 \begin{cases} X + 2Y + 3Z = 11 \\ X - Y + 4Z = 10 \\ X + 3Y + 2Z = 2 \end{cases}$$

$$3、 \begin{cases} X + Y = 27 \\ Y + Z = 33 \\ X + Z = 30 \end{cases}$$

例 4. 解方程组 $\begin{cases} 5X + 7Y + 3Z = 25 \dots\dots\dots(1) \\ 3X - Y - 6Z = 2 \dots\dots\dots(2) \end{cases}$ 其中 X,Y,Z 是自然数

解析：此方程组有两个方程，含有三个未知数，相同未知数的系数不同，我们可以根据等式的性质，变成相同的系数，再用加减消元法，消去一个未知数，再讨论求解。

解：先消去未知数 Z，方程（1）两边乘上 2 再加上方程（2）得到 $13X + 13Y = 52$ 即 $X + Y = 4$ 这

个二元一次不定方程有五组自然数的解 $\begin{cases} X = 1 \\ Y = 3 \end{cases} \begin{cases} X = 2 \\ Y = 2 \end{cases} \begin{cases} X = 3 \\ Y = 1 \end{cases} \begin{cases} X = 0 \\ Y = 4 \end{cases} \begin{cases} X = 4 \\ Y = 0 \end{cases}$ 可求出 Z，

把它们分别代入方程（1）中去讨论

当 $X=1 \quad Y=3$ 时 $3Z = 25 - 5 \times 1 - 7 \times 3 = 25 - 26$ 不可能

当 $X=2$ $Y=3$ 时 $3Z=25-5 \times 2-7 \times 3=1$ 这也不可能

当 $X=3$ $Y=1$ 时 $3Z=25-5 \times 3-7 \times 1=3$ 所以 $Z=1$

所以，原方程组有唯一的一组解为
$$\begin{cases} X=3 \\ Y=1 \\ Z=1 \end{cases}$$

我要学：

1、
$$\begin{cases} X+Y+Z=100 \\ 21X+8Y+3Z=600 \end{cases}$$

2、
$$\begin{cases} 2X+3Y+4Z=25 \\ X+Y+Z=10 \end{cases}$$

3、
$$\begin{cases} 5X+2Y+4Z=60 \\ X+2Y+Z=36 \end{cases}$$

大显身手：

1、 $\frac{1}{4}(4-\frac{3}{2}X)-\frac{1}{3}(2-\frac{X}{4})=2$

2、 $\frac{1}{8}\left\{\frac{1}{4}\left[\frac{1}{2}(X+1)+3\right]+7\right\}=1$

3、 $\frac{3}{4} \left[\frac{4}{3} \left(\frac{1}{2}X - 1 \right) - 8 \right] = \frac{3}{2}X + 1$

4、 $Y - \frac{Y-1}{2} = 3 - \frac{Y+2}{5}$

5、 $\frac{X-9}{11} - \frac{X+2}{3} = (X-1) - \frac{X-2}{2}$

6、 $2 + \frac{X+17}{5} = \frac{3X-7}{4}$

7、 $\frac{5-0.1X}{1.2} - X = \frac{X-0.1}{2.4} + 1$

8、 解方程组：
$$\begin{cases} X:Y = 1:\frac{5}{3} \\ Y:Z = 5:6 \\ Y+X+2Z = 40 \end{cases}$$

9、 求 $3X+5Y=35$ 的自然数解

10、 求 $\begin{cases} 7X+9Y+11Z = 68 \\ 5X+7Y+9Z = 52 \end{cases}$ 的自然数解

真题欣赏：

1. 求 $11X+12Y=160$ 的自然数解

2. 解方程组
$$\begin{cases} 21X + 23Y = 243 \\ 23X + 21Y = 241 \end{cases}$$

3. 记 $X = \frac{1}{2} + \frac{3}{4} + \frac{7}{8} + \frac{15}{16} + \dots + \frac{1023}{1024}$, 那么比 X 小的最大的自然数是----- (第十三届“华罗庚金杯”少年数学邀请决赛)

4. 若 $3X + 2Y = 24$ 求 $\frac{3}{4}X - 5 + \frac{1}{2}Y$ 的值 (第六届小学“希望杯”全国数学邀请赛)

5. 如果 $\frac{1}{X} = \frac{1}{2072} + \frac{1}{65009}$ 则 $X = \text{-----}$ (小学“希望杯”六年级第 I 试题)