2016~2017学年四川成都高新区成都外国语学校高三上学期理科期末数学试卷

一、选择 题（本大题共12小题，每小题5分，共60分）

1 已知$(1+\mathrm{i})\cdot z=-\mathrm{i}$，那么复数$\bar{z}$对应的点位于复平面内的（ ）.

A. 第一象限　　B. 第二象限　　C. 第三象限　　D. 第四象限

答案 B

解析 $\because(1+\mathrm{i})\cdot z=-\mathrm{i}$，

$\therefore z=\dfrac{-\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}}=\dfrac{-\mathrm{i}(1-\mathrm{i})}{(1+\mathrm{i})(1-\mathrm{i})}=\dfrac{-1-\mathrm{i}}{2}=-\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2}\mathrm{i}$，

$\therefore$复数$\bar{z}=-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}\mathrm{i}$，故复数$\bar{z}$在复平面对应的点为$(-\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2})$，

复数$\bar{z}$对应的点位于复平面内的第二象限，

故选B.

考点 —复数
　├复数的概念
　　└复数的代数表示法及几何意义

2 已知集合$A=\left\{x\left|\dfrac{x-a}{x+a}<0\right.\right\}$，若$1\notin A$，则实数$a$取值范围为（ ）.

A. $(-\infty,-1)\cup[1,+\infty)$　　B. $[-1,1]$

C. $(-\infty,-1]\cup[1,+\infty)$　　D. $(-1,1]$

答案 B

解析 根据题意，若$1 \notin A$，

则当$x=1$时，有$\frac{x-a}{x+a}<0$不成立，即$\frac{1-a}{1+a} \geqslant 0$成立或$\frac{1-a}{1+a}$无意义，

若$\frac{1-a}{1+a} \geqslant 0$成立，解$\frac{1-a}{1+a} \geqslant 0$可得，$-1<x \leqslant 1$，

若$\frac{1-a}{1+a}$无意义，则$a=-1$，

综合可得，$-1 \leqslant a \leqslant 1$，

故选B．

考点 一集合与常用逻辑用语

├集合之间的关系与运算

└集合之间的关系

└集合的运算

3 抛物线$y=2x^2$的准线方程是（ ）．

A. $x=\frac{1}{2}$　B. $y=\frac{1}{8}$　C. $y=\frac{1}{2}$　D. $y=\frac{1}{8}$

答案 D

解析 抛物线的方程可变为$x^2=\frac{1}{2}y$，故$p=\frac{1}{4}$，

其准线方程为$y=-\frac{1}{8}$，

故选：D．

考点 一解析几何

├抛物线

└抛物线的定义、图形及标准方程

4 若“$\exists x\in\left[\frac{1}{2},2\right]$，使得$2x^2-\lambda x+1<0$成立”是假命题，则实数$\lambda$的取值范围为（ ）．

A. $(-\infty,2\sqrt{2}]$　　B. $[2\sqrt{2},3]$　　C. $[-2\sqrt{2},3]$　　D. $\lambda=3$

答案 A

解析 若“$\exists x\in\left[\frac{1}{2},2\right]$，使得$2x^2-\lambda x+1<0$成立”是假命题，

即“$\exists x\in\left[\frac{1}{2},2\right]$，使得$\lambda>2x+\frac{1}{x}$成立”是假命题，

由$\exists x\in\left[\frac{1}{2},2\right]$，当$x=\frac{\sqrt{2}}{2}$时，函数取最小值$2\sqrt{2}$，

故实数λ的取值范围为$(-\infty,2\sqrt{2}]$，

故选：A．

考点 —不等式与线性规划

　├解不等式

　　└一元二次不等式

5 已知角α终边与单位圆$x^2+y^2=1$的交点为$P(\frac{1}{2},y)$，则$\sin\left(\frac{\pi}{2}+2\alpha\right)=$（ ）．

A. $-\frac{1}{2}$　　B. $\frac{1}{2}$　　C. $-\frac{\sqrt{3}}{2}$　　D. 1

答案 A

解析 由题意可得，$\cos\alpha=\frac{1}{2}$，

则$\sin\left(\frac{\pi}{2}+2\alpha\right)=\cos 2\alpha=2\cos^2\alpha-1=2\times\frac{1}{4}-1=-\frac{1}{2}$，

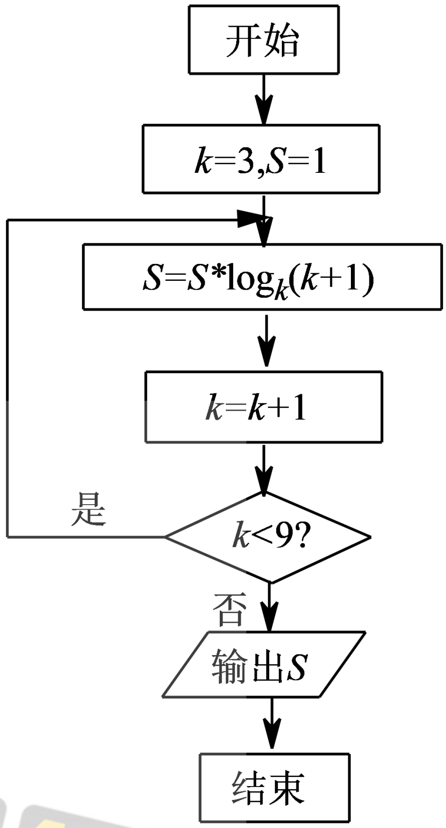
故选：A．

考点 —三角函数与解三角形

　├三角恒等变换

　　└简单的三角恒等变换

6 执行如图的程序框图，则输出的S的值为（ ）.



A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

答案 B

解析 由程序框图得：第一次运行$S=1\cdot\log_3 4$，$k=4$.

第二次运行$S=1\cdot\log_3 4\cdot\log_4 5$，$k=5$.

第三次运行$S=1\cdot\log_3 4\cdot\log_4 5\cdot\log_5 6$，$k=6$.

…

直到$k=9$时，程序运行终止，此时

$S=1\cdot\log_3 4\cdot\log_4 5\cdot\log_5 6\cdot\log_6 7\cdot\log_7 8\cdot\log_8 9=1\cdot\log_3 9=2$，

故选B.

考点 算法与框图
- 算法初步
  - 算法及其程序框图

7 《张丘建算经》卷上第22题为“今有女善织，日益功疾，初日织五尺，今一月日织九匹三丈．”其意思为：现有一善于织布的女子，从第2天开始，每天比前一天多织相同量的布，第1天织了5尺布，现在一月（按30天计算）共织390尺布，记该女子一月中的第n天所织布的尺数为a_n，则$a_{14}+a_{15}+a_{16}+a_{17}$的值为（ ）．

A. 55　　B. 52　　C. 39　　D. 26

答案　B

解析　设从第2天开始，每天比前一天多织d尺布，

则$S_{30}=30\times5+\dfrac{30\times29}{2}d=390$，

解得$d=\dfrac{16}{29}$，$\therefore$

$a_{14}+a_{15}+a_{16}+a_{17}=a_1+13d+a_1+14d+a_1+15d+a_1+16d=4a_1+58d=4\times5+58$

.

故选：B．

考点　数列
- 等差数列
  - 等差数列的概念和通项
  - 等差数列的性质

8 $\triangle ABC$的三个内角A，B，C的对边分别为a，b，c，已知$\sin B=1$，向量$\vec{p}=(a,b)$，$\vec{q}=(1,2)$，若$\vec{p}//\vec{q}$，则角A的大小为（ ）．

A. $\dfrac{\pi}{6}$　　B. $\dfrac{\pi}{3}$　　C. $\dfrac{\pi}{2}$　　D. $\dfrac{2\pi}{3}$

答案　A

解析 $\because$向量$\vec{p}=(a,b)$，$\vec{q}=(1,2)$，若$\vec{p}//\vec{q}$，

$\therefore b-2a=0$，即$b=2a$，

$\because \sin B=1$，$\therefore B=\dfrac{\pi}{2}$，

根据正弦定理得$\sin B=2\sin A$，

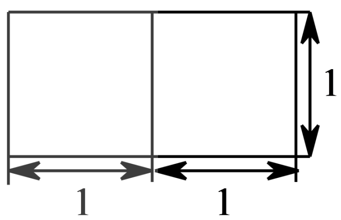
则$\sin A=\dfrac{1}{2}$，则$A=\dfrac{\pi}{6}$，

故选：A．

考点

- 三角函数与解三角形
  - 解三角形
    - 正余弦定理
- 平面向量
  - 平面向量的基本定理及坐标表示
    - 用坐标表示平面向量共线的条件

9 若一个底面是正三角形的三棱柱的正视图如图所示，其顶点都在一个球面上，则该球的表面积为（ ）．



A. $\dfrac{16}{3}\pi$　　B. $\dfrac{19}{3}\pi$　　C. $\dfrac{19}{12}\pi$　　D. $\dfrac{4}{3}\pi$

答案 B

解析 由已知底面是正三角形的三棱柱的正视图，

我们可得该三棱柱的底面棱长为2，高为1，

则底面外接圆半径$r=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$，球心到底面的球心距$d=\dfrac{1}{2}$，

则球半径$R^2=\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{19}{12}$，

则该球的表面积$S=4\pi R^2=\frac{19}{3}\pi$．

故选B．

考点

—立体几何与空间向量

　├立体几何初步

　　└空间几何体体积和表面积的计算

　　└空间几何体

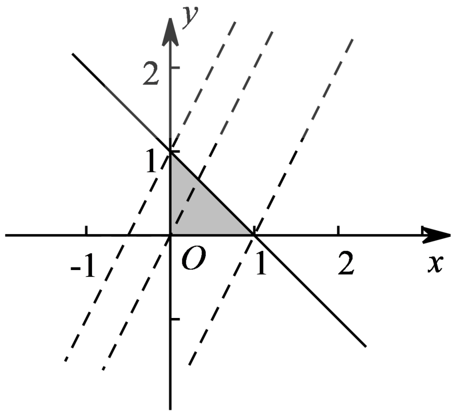
10 等腰直角三角形ABC中，$\angle C=90^\circ$，$AC=BC=1$，点M，N分别是AB，BC中点，点P是$\triangle ABC$（含边界）内任意一点，则$\overrightarrow{AN}\cdot\overrightarrow{MP}$的取值范围是（ ）．

A. $\left[-\frac{3}{4},\frac{3}{4}\right]$　B. $\left[-\frac{1}{4},\frac{3}{4}\right]$　C. $\left[-\frac{3}{4},\frac{1}{4}\right]$　D. $\left[\frac{1}{4},\frac{3}{4}\right]$

答案 A

解析 以C为坐标原点，CA边所在直线为x轴，

建立直角坐标系，



则$A(1,0)$，$B(0,1)$，

设$P(x,y)$，

则$\begin{cases}x\geqslant 0\\ y\geqslant 0\\ x+y-1\leqslant 0\end{cases}$

且$\overrightarrow{AN}=(-1,\dfrac{1}{2})$，$\overrightarrow{MP}=(x-\dfrac{1}{2},y-\dfrac{1}{2})$，

则$\overrightarrow{AN}\cdot\overrightarrow{MP}=-x+\dfrac{1}{2}y+\dfrac{1}{4}$，

令$t=-x+\dfrac{1}{2}y+\dfrac{1}{4}$，结合线性规划知识，

则$y=2x+2t-\dfrac{1}{2}$

当直线$t=-x+\dfrac{1}{2}y+\dfrac{1}{4}$经过点$A(1,0)$时，$\overrightarrow{AN}\cdot\overrightarrow{MP}$有最小值，

将$A(1,0)$代入得$t=-\dfrac{3}{4}$，

当直线$t=-x+\dfrac{1}{2}y+\dfrac{1}{4}$经过点$B(0,1)$时，$\overrightarrow{AN}\cdot\overrightarrow{MP}$有最大值，

将$B(0,1)$代入得$t=\dfrac{3}{4}$，

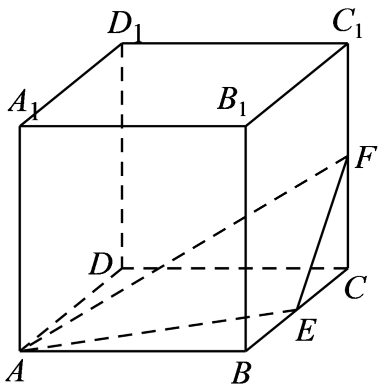
则$\overrightarrow{AN}\cdot\overrightarrow{MP}$的取值范围是$\left[-\dfrac{3}{4},\dfrac{3}{4}\right]$，

故选：A．

考点

- 平面向量
  - 平面向量的数量积
    - 数量积
- 不等式与线性规划
  - 简单的线性规划
    - 简单的线性规划问题

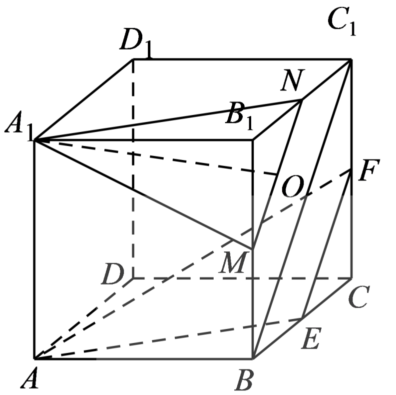
11 如图，在棱长为1的正方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$中，点E,F分别是棱BC,CC_1的中点，P是侧面BCC_1B_1 内一点，若$A_1P//$平面AEF，则线段A_1P长度的取值范围是（ ）．



A. $[1,\frac{\sqrt{5}}{2}]$ B. $[\frac{3\sqrt{2}}{4},\frac{\sqrt{5}}{2}]$ C. $[\frac{\sqrt{5}}{2},\sqrt{2}]$ D. $[\sqrt{2},\sqrt{3}]$

答案 B

解析 取B_1C_1的中点M,BB_1的中点N,



连结A_1M, A_1N, MN，可以证明平面$A_1MN//$平面AEF,

所以点P位于线段MN上，把三角形A_1MN拿到平面上，

则有$A_1M=A_1N=\sqrt{1+\left(\frac{1}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{5}}{2}$,$MN=\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{2}}{2}$,

所以当点P位于MN时，A_1P最大，

当P位于中点O时，A_1P最小，

此时$A_1O=\sqrt{\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2-\left(\frac{\sqrt{2}}{4}\right)^2}=\frac{3\sqrt{2}}{4}$,

所以$A_1O\leqslant A_1P\leqslant A_1M$，即$\frac{3\sqrt{2}}{4}\leqslant A_1P\leqslant\frac{\sqrt{5}}{2}$,

所以线段A_1P长度的取值范围是$[\frac{3\sqrt{2}}{4},\frac{\sqrt{5}}{2}]$.

故答案为B.

考点 —立体几何与空间向量
- 立体几何初步
  - 空间几何体
  - 点、直线、平面间的位置关系
  - 空间中的平行

12 设函数$f'(x)$是函数$f(x)$（$x\in\mathbf{R}$）的导函数，$f(0)=1$，且$3f(x)=f'(x)-3$，则$4f(x)>f'(x)$的解集为（ ）.

A. $\left(\frac{\ln 4}{3},+\infty\right)$ B. $\left(\frac{\ln 2}{3},+\infty\right)$ C. $\left(\frac{\sqrt{3}}{2},+\infty\right)$ D. $\left(\frac{\sqrt{e}}{3},+\infty\right)$

答案 B

解析 根据条件，$3f(0)=3=f'(0)-3$.

$\therefore f'(0)=6$.

$\therefore f(x)=2e^{3x}-1$，$f'(x)=6e^{3x}$.

$\therefore$由$4f(x)>f'(x)$得：$4(2e^{3x}-1)>6e^{3x}$.

整理得，$e^{3x}>2$.

$\therefore 3x>\ln 2$.

$\therefore x>\frac{\ln 2}{3}$.

$\therefore$原不等式的解集为$\left(\frac{\ln 2}{3},+\infty\right)$.

故选：B.

考点 —函数与导数

—导数及其应用

└—利用导数研究函数的单调性

二、填空题（本大题共4小题，每小题5分，共20分）

13 已知$|2x-1|+(y+2)^2=0$，则$(xy)^{2016}=$______.

答案 1

解析 $\because |2x-1|+(y+2)^2=0$，$\therefore x=\frac{1}{2}$，$y=-2$，

$\therefore xy=-1$,

$\therefore (xy)^{2016}=1$,

故答案为：1.

考点

—函数与导数

—函数

└定义域

14 已知直线L经过点$P(-4,-3)$，且被圆$(x+1)^2+(y+2)^2=25$截得的弦长为8，则直线L的方程是______.

答案 $x+4=0$或$4x+3y+25=0$

解析 圆心$(-1,-2)$，半径$r=5$，弦长$m=8$,

设弦心距是d,

则由勾股定理,

$r^2=d^2+\left(\frac{m}{2}\right)^2$,

解得$d=3$,

若l斜率不存在，直线是$x=-4$,

圆心和他的距离为-3，符合题意,

若l斜率存在，设直线方程$y+3=k(x+4)$,

即$kx-y+4k-3=0$,

则$d=\frac{|-k+2+4k-3|}{\sqrt{k^2+1}}=3$,

即$9k^2-6k+1=9k^2+9$,

解得$k=-\frac{4}{3}$，所以所求直线方程为$x+4=0$和$4x+3y+25=0$,

故答案为：$x+4=0$和$4x+3y+25=0$.

考点

—解析几何

—直线与方程

└直线的方程

├圆与方程

└直线与圆的位置关系

15 若直线$ax+by-1=0$（$a>0$，$b>0$）过曲线$y=1+\sin\pi x$（$0<x<2$）的对称中心，则$\frac{1}{a}+\frac{2}{b}$的最小值为 ______ .

答案 $3+2\sqrt{2}$

解析 由正弦函数的性质可知，曲线$y=1+\sin\pi x$（$0<x<2$）的对称中心为$(1,1)$

$\therefore a+b=1$，则$\frac{1}{a}+\frac{2}{b}=\left(\frac{1}{a}+\frac{2}{b}\right)(a+b)=3+\frac{b}{a}+\frac{2a}{b}\geqslant 3+2\sqrt{\frac{b}{a}\cdot\frac{2a}{b}}=3+2\sqrt{2}$

$\frac{1}{a}+\frac{2}{b}$最小值为$3+2\sqrt{2}$.

故答案为：$3+2\sqrt{2}$.

考点 ─不等式与线性规划

├均值不等式

└均值定理

16 定义：如果函数$y=f(x)$在定义域内给定区间$[a,b]$上存在x_0（$a<x_0<b$），满足$f(x_0)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$，则称函数$y=f(x)$是$[a,b]$上的“平均值函数”，$x_0$是它的一个均值点．如$y=x^2$是$[-1,1]$上的平均值函数，0就是它的均值点．现有函数$f(x)=x^3+mx$是区间$[-1,1]$上的平均值函数，则实数$m$的取值范围是 ______ .

答案 $(-3,-\frac{3}{4}]$

解析 函数$f(x)=x^3+mx$是区间$[-1,1]$上的平均值函数，

故有$x^3+mx=\dfrac{f(1)-f(-1)}{1-(-1)}$在$(-1,1)$内有实数根.

即$x^3+mx-m-1=0$在$(-1,1)$内有实数根，解得$x^2+x+m+1=0$或$x=1$.

又$1\notin(-1,1)$，

$\therefore x^2+x+m+1=0$的解$\dfrac{-1\pm\sqrt{-3-4m}}{2}$必为均值点，即$-1<\dfrac{-1+\sqrt{-3-4m}}{2}<1$或$-1<\dfrac{-1-\sqrt{-3-4m}}{2}<1$，解得$-3<m\leqslant-\dfrac{3}{4}$或$-1<m\leqslant-\dfrac{3}{4}$.

$\therefore$所求实数m的取值范围是$-3<m\leqslant-\dfrac{3}{4}$.

故答案为：$-3<m\leqslant-\dfrac{3}{4}$.

考点

- 函数与导数
  - 二次函数
    - 一元二次方程

三、解答题（本大题共5小题，每小题12分，共60分）

17 在$\triangle ABC$中，内角A，B，C所对边长分别为a，b，c，$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=8$，$\angle BAC=\theta$，$a=4$.

（1） 求$b\cdot c$的最大值及θ的取值范围.

（2） 求函数$f(\theta)=2\sqrt{3}\sin^2(\dfrac{\pi}{4}+\theta)+2\cos^2\theta-\sqrt{3}$的最值.

答案

（1） 16，$\left(0,\dfrac{\pi}{3}\right]$.

（2） 3.

解析

（1） 因为$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=bc\cdot\cos\theta=8$，根据余弦定理得：$b^2+c^2-2bc\cos\theta=4^2$，

即$b^2+c^2=32$，

又$b^2+c^2\geqslant2bc$，所以$bc\leqslant16$，即bc的最大值为16，

即$\dfrac{8}{\cos\theta}\leqslant16$，

所以$\cos\theta\geqslant\dfrac{1}{2}$，又$0<\theta<\pi$，

所以$0<\theta\leqslant\dfrac{\pi}{3}$.

（2） $f(\theta)=\sqrt{3}\cdot\left[1-\cos\left(\frac{\pi}{2}+2\theta\right)\right]+1+\cos 2\theta-\sqrt{3}=\sqrt{3}\sin 2\theta+\cos 2\theta+1=2\sin\left(2\theta+\right.$

，

因$0<\theta\leqslant\frac{\pi}{3}$，所以$\frac{\pi}{6}<2\theta+\frac{\pi}{6}\leqslant\frac{5\pi}{6}$，$\frac{1}{2}\leqslant\sin\left(2\theta+\frac{\pi}{6}\right)\leqslant 1$，

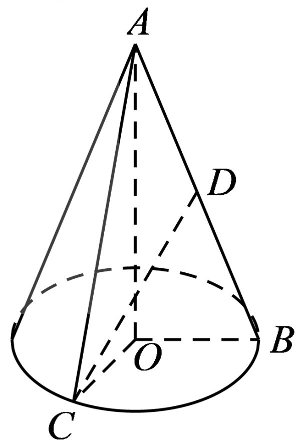
当$2\theta+\frac{\pi}{6}=\frac{5\pi}{6}$即$\theta=\frac{\pi}{3}$时，$f(\theta)_{\min}=2\times\frac{1}{2}+1=2$，

当$2\theta+\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{2}$即$\theta=\frac{\pi}{6}$时，$f(\theta)_{\max}=2\times 1+1=3$．

考点　—三角函数与解三角形

- 三角恒等变换
  - 简单的三角恒等变换
- 解三角形
  - 正余弦定理

18 如图，在$\mathrm{Rt}\triangle AOB$中，$\angle OAB=\frac{\pi}{6}$，斜边$AB=4$，D是AB中点，现将$\mathrm{Rt}\triangle AOB$以直角边AO为轴旋转一周得到一个圆锥，点C为圆锥底面圆周上一点，且$\angle BOC=90^{\circ}$．



（1） 求圆锥的侧面积．

（2） 求直线CD与平面BOC所成的角的正弦值．

答案　（1） 8π．

（2） $\frac{\sqrt{6}}{4}$．

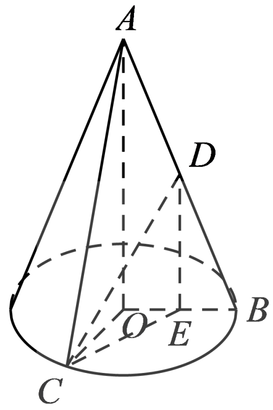
解析　（1）$\because$在$Rt\triangle AOB$中，$\angle OAB=\dfrac{\pi}{6}$，斜边$AB=4$，$D$是$AB$中点，

将$Rt\triangle AOB$以直角边AO为轴旋转一周得到一个圆锥，

点C为圆锥底面圆周上一点，且$\angle BOC=90^\circ$，

$\therefore$圆锥的侧面积$S_{侧}=\pi rl=2\times4\times\pi=8\pi$.

（2）取OB的中点E，连结DE、CE，则$DE//AO$，



$\therefore DE\perp$平面BOC，

$\therefore\angle DCE$是直线CD与平面BOC所成的角，

在$Rt\triangle DEC$中，$CE=\sqrt{5}$，$DE=\sqrt{3}$，$CD=\sqrt{CE^2+DE^2}=2\sqrt{2}$，

$\sin\angle DCE=\dfrac{DE}{CD}=\dfrac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{6}}{4}$，

$\therefore$直线CD与平面BOC所成的角的正弦值为$\dfrac{\sqrt{6}}{4}$.

考点　—立体几何与空间向量

　├立体几何初步

　　└空间几何体体积和表面积的计算

　　└点、直线、平面间的位置关系

19　某学校高一年级学生某次身体素质体能测试的原始成绩采用百分制，已知所有这些这些学生的原始成绩均分布在$[50,100]$内，发布成绩使用等级制，各等级划分标准见表，规定：A，B，C三级为合格等级，D为不合格等级．为了解该校高一年级学生身体素质情况，从中抽取了n名学生的原始成绩作为样本进行统计，按照$[50,60)$，$[60,70)$，$[70,80)$，$[80,90)$，$[90,100)$的分组作出频

率分布直方图如图所示，样本中分数在80分及以上的所有数据的茎叶图如图所示.

百分制	85分及以上	70分到84分	60分到69分	60分以下
等级	A	B	C	D

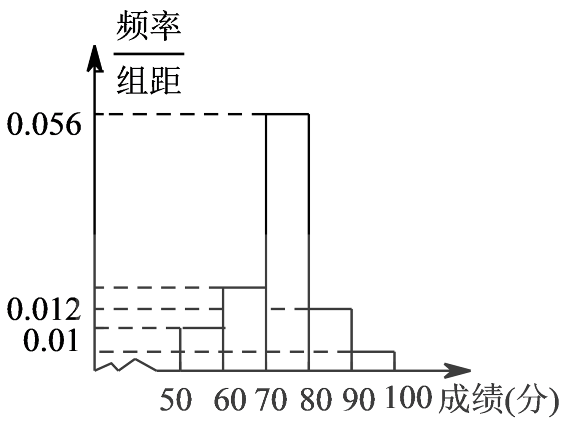


图1

茎	叶
8	0 1 2 3 4 7
9	5 8

图2

（1）求n和频率分布直方图中的x，y的值.

（2）根据样本估计总体的思想，以事件发生的频率作为相应事件发生的概率，若在该校高一学生中任选3人，求至少有1人成绩是合格等级的概率.

（3）在选取的样本中，从A，C两个等级的学生中随机抽取了3名学生进行调研，记ξ表示抽取的3名学生中为C等级的学生人数，求随机变量ξ的分布列及数学期望.

答案

（1）$x=0.004$，$y=0.018$.

（2）$\dfrac{999}{1000}$.

（3）ξ的分布列为

ξ	0	1	2	3
P	$\dfrac{1}{220}$	$\dfrac{27}{220}$	$\dfrac{108}{220}$	$\dfrac{84}{220}$

$E\xi=\dfrac{9}{4}$.

解析

（1）由题意可知，样本容量$n=\dfrac{6}{0.012\times10}=50$，$x=\dfrac{2}{50\times10}=0.004$，

$y=\dfrac{0.18}{10}=0.018$.

（2）不合格的概率为0.1，

设至少有1人成绩是合格等级为事件A，$\therefore P(A)=1-0.1^3=0.999$，

故至少有1人成绩是合格等级的概率为$\dfrac{999}{1000}$.

（3）C等级的人数为$0.18\times 50=9$人，A等级的为3人，

$\therefore\xi$的取值可为0，1，2，3.

$\therefore P(\xi=0)=\dfrac{C_3^3}{C_{12}^3}=\dfrac{1}{220}$，$P(\xi=1)=\dfrac{27}{220}$，$P(\xi=2)=\dfrac{108}{220}$，$P(\xi=3)=\dfrac{84}{220}$，

$\therefore\xi$的分布列为

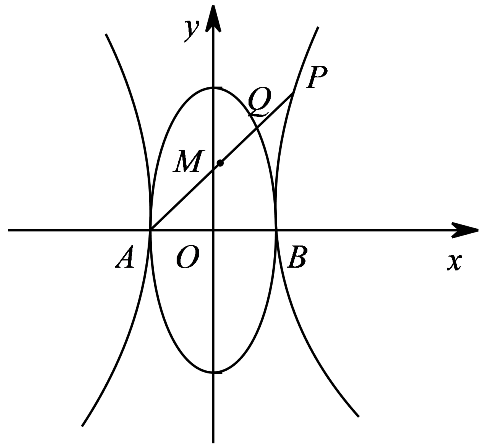
ξ	0	1	2	3
P	$\dfrac{1}{220}$	$\dfrac{27}{220}$	$\dfrac{108}{220}$	$\dfrac{84}{220}$

$E\xi=0\times\dfrac{1}{220}+1\times\dfrac{27}{220}+2\times\dfrac{108}{220}+3\times\dfrac{84}{220}=\dfrac{9}{4}$.

考点

- 统计
  - 用样本估计总体
    - 样本数据的基本数字特征
    - 用样本的基本数字特征估计总体的基本数字特征
- 概率
  - 随机变量的分布列
    - 取有限值的离散型随机变量及其分布列

20 如图，椭圆$x^2+\dfrac{y^2}{4}=1$的左、右顶点分别为A、B，双曲线Γ以A、B为顶点，焦距为$2\sqrt{5}$，点P是Γ上在第一象限内的动点，直线AP与椭圆相交于另一点Q，线段AQ的中点为M，记直线AP的斜率为k，O为坐标原点.



（1） 求双曲线Γ的方程．

（2） 求点M的纵坐标y_M的取值范围．

（3） 是否存在定直线l，使得直线BP与直线OM关于直线l对称？若存在，求直线l方程，若不存在，请说明理由．

答案

（1） $x^2-\dfrac{y^2}{4}=1$．

（2） $(0,1)$．

（3） $x=\dfrac{1}{2}$．

解析

（1） 由题意，$a=1$，$c=\sqrt{5}$，$b=2$，

$\therefore$双曲线Γ的方程$x^2-\dfrac{y^2}{4}=1$．

（2） 由题意，设$P(x_1,y_1)$，$Q(x_2,y_2)$，

直线AP的方程$y=k(x+1)$（$0<k<2$），

代入椭圆方程，整理得$(4+k^2)x^2+2k^2x+k^2-4=0$，

$\therefore x=-1$或$x_2=\dfrac{4-k^2}{4+k^2}$，

$\therefore Q(\dfrac{4-k^2}{4+k^2},\dfrac{8k}{4+k^2})$，$M(-\dfrac{k^2}{4+k^2},\dfrac{4k}{4+k^2})$，

$\therefore y_M=\dfrac{4k}{4+k^2}=\dfrac{4}{k+\frac{4}{k}}$在$(0,2)$上单调递增，$\therefore y_M\in(0,1)$．

（3） 由题意，$k_{AP}\cdot k_{BP}=\dfrac{y_1}{1+x_1}\cdot\dfrac{y_1}{1-x_1}=4$，

同理$k_{AP}\cdot k_{OM}=-4$，

$\therefore k_{OM}+k_{BP}=0$，

设直线OM：$y=k'x$，则直线BP：$y=-k'(x-1)$，解得$x=\dfrac{1}{2}$，

$\because k_{OM}+k_{BP}=0$，$\therefore$直线BP与OM关于直线$x=\dfrac{1}{2}$对称.

考点

—解析几何
- 直线与方程
  - 平面直角坐标系
  - 直线的方程
- 双曲线
  - 双曲线的定义、图形及标准方程

21 已知函数$f(x)=\ln x+\dfrac{a}{x+1}$.

（1） 当$a=2$时，证明对任意的$x\in(1,+\infty)$，$f(x)>1$.

（2） 求证：$\ln(n+1)>\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{5}+\dfrac{1}{7}+\cdots+\dfrac{1}{2n+1}$ （$n\in N^*$） .

（3） 若函数$f(x)$有且只有一个零点，求实数a的取值范围.

答案

（1） 证明见解析.

（2） 证明见解析.

（3） $\mathbf{R}$.

解析

（1） 证明：当$a=2$时，$f(x)=\ln x+\dfrac{2}{x+1}$，

令$h(x)=\ln x+\dfrac{2}{x+1}-1$，则$h'(x)=\dfrac{x^2+1}{x(x+1)^2}>0$，

$\therefore h(x)$在$(1,+\infty)$上单调递增，

$\therefore h(x)>h(1)=0$，

$\therefore$对任意的$x\in(1,+\infty)$，$f(x)>1$.

（2） 证明：由（1）知$x\in(1,+\infty)$，$\ln x+\dfrac{2}{x+1}>1$，即$\ln x>\dfrac{x-1}{x+1}$，

令$x=\dfrac{k+1}{k}$，则$\ln\dfrac{k+1}{k}>\dfrac{1}{2k+1}$，$\therefore\sum\limits_{i=1}^{n}\ln\dfrac{k+1}{k}>\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{1}{2k+1}$，

$\therefore\ln(n+1)=\sum\limits_{i=1}^{n}\ln\dfrac{n+1}{n}>\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{5}+\dfrac{1}{7}+\cdots+\dfrac{1}{2n+1}$.

（3）解：$f'(x)=\dfrac{x^2-(a-2)x+1}{x(x+1)^2}$.

令$f'(x)=0$，则$x^2-(a-2)x+1=0$，$\Delta=(a-2)^2-4=a(a-4)$.

①$0\leqslant a\leqslant 4$时，$f'(x)\geqslant 0$，函数在$(0,+\infty)$上递增，函数只有一个零点.

②$a<0$时，$f'(x)>0$，函数在$(0,+\infty)$上递增，函数只有一个零点.

③当$a>4$时，$\Delta>0$，设$f'(x)=0$的两根分别为x_1与x_2，

则$x_1+x_2=a-2>0$，$x_1\cdot x_2=1>0$，不妨设$0<x_1<1<x_2$，

当$x\in(0,x_1)$及$x\in(x_2,+\infty)$时，$f'(x)>0$，当$x\in(x_1,x_2)$时，$f'(x)<0$，

$\therefore$函数$f(x)$在$(0,x_1)$，$(x_2,+\infty)$上递增，在(x_1,x_2)上递减，

而$f(x_2)=\ln x_2+\dfrac{a}{x_2+1}>0$，

$\therefore x\in(x_2,+\infty)$时，$f(x)>0$，且$f(x_1)>0$.

因此函数$f(x)$在$(0,x_1)$有一个零点，而在$(x_1,+\infty)$上无零点.

此时函数$f(x)$只有一个零点.

综上，函数$f(x)$只有一个零点时，实数a的取值范围为$\mathbf{R}$.

考点

- 竞赛
  - 不等式
    - 不等式的证明
- 函数与导数
  - 函数
    - 单调性
  - 函数与方程
    - 函数的零点

四、选做题 (本大题共2小题，选做1题，共10分)

在直角坐标系xOy中，曲线C_1的参数方程为$\begin{cases} x = 2\cos^2\alpha \\ y = \sin 2\alpha \end{cases}$（$\alpha$是参数），以原点$O$为极点，$x$轴正半轴为极轴建立极坐标系，曲线$C_2$的极坐标方程为$\rho = \dfrac{1}{\sin\theta - \cos\theta}$.

（1）求曲线C_1的普通方程和曲线C_2的直角坐标方程.

（2）求曲线C_1上的任意一点P到曲线C_2的最小距离，并求出此时点P的坐标.

答案

（1）$(x-1)^2 + y^2 = 1$，$x - y + 1 = 0$.

（2）$d = \sqrt{2} - 1$，$\left(\dfrac{2-\sqrt{2}}{2}, \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

解析

（1）曲线C_1的参数方程为$\begin{cases} x = 2\cos^2\alpha \\ y = \sin 2\alpha \end{cases}$（$\alpha$是参数），$x = 2\cos^2\alpha = 1 + \cos 2\alpha$，

$\therefore (x-1)^2 + y^2 = 1$.

曲线C_2的极坐标方程为$\rho = \dfrac{1}{\sin\theta - \cos\theta}$，化为$\rho\sin\theta - \rho\cos\theta = 1$，

$\therefore y - x = 1$，即$x - y + 1 = 0$.

（2）设与曲线C_2平行且与曲线C_1相切的直线方程为$y = x + t$，

代入圆的方程可得：$2x^2 + 2(t-1)x + t^2 = 0$，

$\because \Delta = 4(t-1)^2 - 8t^2 = 0$，化为$t^2 + 2t - 1 = 0$，解得$t = -1 \pm \sqrt{2}$.

取$t = \sqrt{2} - 1$，直线$y = x + 1$与切线$y = x + \sqrt{2} - 1$的距离$d = \dfrac{\left|\sqrt{2} - 2\right|}{\sqrt{2}} = \sqrt{2} - 1$

，

即为曲线C_1上的任意一点P到曲线C_2的最小距离.

此时$2x^2 + 2(t-1)x + t^2 = 0$，化为$\left[\sqrt{2}x - \left(\sqrt{2} - 1\right)\right]^2 = 0$，

解得$x = \dfrac{\sqrt{2} - 1}{\sqrt{2}} = \dfrac{2 - \sqrt{2}}{2}$，$y = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$，

$\therefore P\left(\dfrac{2-\sqrt{2}}{2}, \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

考点

- 解析几何
  - 椭圆
    - 椭圆的定义、图形及标准方程
- 坐标系与参数方程
  - 极坐标系

└参数方程

23 已知函数$f(x)=|2x-a|+a$.

（1）若不等式$f(x)\leqslant 6$的解集为$[-2,3]$，求实数a的值.

（2）在（1）的条件下，若存在实数n，使得$f(n)\leqslant m-f(-n)$成立，求实数m的取值范围.

答案 （1）$a=1$.

（2）$[4,+\infty)$.

解析 （1）原不等式可化为$|2x-a|\leqslant 6-a$，

$\therefore\begin{cases}6-a\geqslant 0\\ a-6\leqslant 2x-a\leqslant 6-a\end{cases}$，

解得$a-3\leqslant x\leqslant 3$.

再根据不等式$f(x)\leqslant 6$的解集为$[-2,3]$，可得$a-3=-2$，

$\therefore a=1$.

（2）$\because f(x)=|2x-1|+1$，$f(n)\leqslant m-f(-n)$，

$\therefore|2n-1|+1\leqslant m-(|-2n-1|+1)$，

$\therefore|2n-1|+|2n+1|+2\leqslant m$，

$\because y=|2n-1|+|2n+1|+2=\begin{cases}4n+2,n\geqslant\frac{1}{2}\\ 4,-\frac{1}{2}<n<\frac{1}{2}\\ 2-4n,n\leqslant-\frac{1}{2}\end{cases}$，

$\therefore y_{\min}=4$，

由存在实数n，使得$f(n)\leqslant m-f(-n)$成立，

$\therefore m\geqslant 4$，即m的范围是$[4,+\infty)$.

考点 —不等式与线性规划

├绝对值不等式

│└绝对值不等式的解法