2018年四川成都理科高三一诊数学试卷

一、选择题：本大题共12小题，每小题5分．

1 设全集$U=\mathbf{R}$，集合$A=\{x\,|x\leqslant -2\}$，$B=\{x\,|x\geqslant -1\}$，则$\complement_U(A\cup B)=$（ ）．

A. $(-2,-1)$

B. $[-2,-1]$

C. $(-\infty,2]\cup[-1,+\infty)$

D. $(-2,1)$

答案 A

解析 $\because A=\{x\,|x\leqslant -2\}$，$B=\{x\,|x\geqslant -1\}$，

$\therefore A\cup B=(-\infty,-2]\cup[-1,+\infty)$，$\complement_U(A\cup B)=(-2,-1)$．故答案为A．

考点 —集合与常用逻辑用语

—集合之间的关系与运算

└集合的运算

2 复数$z=\dfrac{2}{1+\mathrm{i}}$在复平面内对应的点位于（ ）．

A. 第一象限

B. 第二象限

C. 第三象限

D. 第四象限

答案 D

解析 $z=\dfrac{2}{1+\mathrm{i}}=\dfrac{2(1-\mathrm{i})}{(1+\mathrm{i})(1-\mathrm{i})}=1-\mathrm{i}$，在复平面对应的坐标为$(1,-1)$，在第四象限．

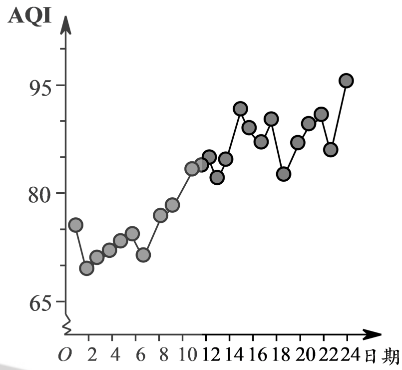
故选D．

考点 —复数

—复数的概念

└—复数的代数表示法及几何意义

3 空气质量指数AQI是检测空气质量的重要参数，其数值越大说明空气污染状况越严重，空气质量越差．某地环保部门统计了该地区12月1日至12月24日连续24天的空气质量指数AQI，根据得到的数据绘制出如图所示的折线图．则下列说法错误的是（ ）．



A. 该地区在12月2日空气质量最好

B. 该地区在12月24日空气质量最差

C. 该地区从12月7日到12月12日AQI持续增大

D. 该地区的空气质量指数AQI与这段日期成负相关

答案 D

解析 根据散点图可知，随着日期的增加，AQI也呈增加趋势，即成正相关，故答案为D．

考点 —函数与导数

—函数

└—函数的概念与表示

4 已知锐角$\triangle ABC$的三个内角分别为A，B，C，则“$\sin A > \sin B$”是“$\tan A > \tan B$”的（ ）．

A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件 C. 充要条件 D. 既不充分也不必要条件

答案 C

解析 $\because\triangle ABC$是锐角三角形，$\therefore A$，B均小于，

又$y=\sin x$和$y=\tan x$均在$\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right)$上单调递增，

又$\because\sin A>\sin B$可以推出$A>B$，

$\therefore\tan A>\tan B$，

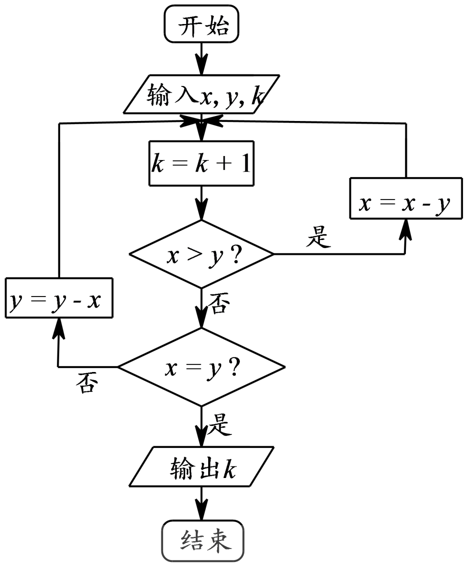
$\because\tan A>\tan B$可以推出$A>B$，

$\therefore\sin A>\sin B$，

$\therefore\sin A>\sin B$是$\tan A>\tan B$的充要条件．故答案为C．

考点
- 集合与常用逻辑用语
  - 常用逻辑用语
    - 充要条件
- 三角函数与解三角形
  - 三角函数
    - 三角函数的定义

5 “更相减损术”是我国古代数学名著《九章算术》中的算法案例，其对应的程序框图如图所示．若输入x，y，k的值分别为4，6，1，则输出的k的值为（ ）．



A. 2　B. 3　C. 4　D. 5

答案 C

解析 开始，1、$k=2$，$x=4$，$y=6$，$x<y$，$\therefore y=y-x=2$，

2、$k=3$，$x=4$，$y=2$，$x>y$，$\therefore x=x-y=2$，

3、$k=4$，$x=y=2$，$\therefore$输出k，此时$k=4$，故答案为C．

考点
- 算法与框图
  - 算法初步
    - 算法及其程序框图

6 若关于的不等式$x^2+2ax+1\geqslant 0$在$[0,+\infty)$上恒成立，则实数a的取值范围为（ ）．

A. $(0,+\infty)$　B. $[-1,+\infty)$　C. $[-1,1]$　D. $[0,+\infty)$

答案 B

解析 $\because x^2+2ax+1\geqslant 0$在$x\geqslant 0$上恒成立，

当$x=0$时，任意a都成立，

当$x>0$时，$a\geqslant-\frac{1}{2}\left(x+\frac{1}{x}\right)$，

根据均值不等式可得$a\geqslant-1$，当$x=1$时取等号，故答案为B．

考点 一函数与导数
- 二次函数
  - 二次函数的概念、图象和性质

7 已知$\sin\alpha=\frac{\sqrt{10}}{10}$，$\alpha\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，则$\cos\left(2\alpha+\frac{\pi}{6}\right)$的值为（ ）．

A. $\frac{4\sqrt{3}-3}{10}$　B. $\frac{4\sqrt{3}+3}{10}$　C. $\frac{4-3\sqrt{3}}{10}$　D. $\frac{3\sqrt{3}-4}{10}$

答案 A

解析 $\sin\alpha=\frac{\sqrt{10}}{10}$，$\alpha\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，$\cos\alpha=\frac{3\sqrt{10}}{10}$，

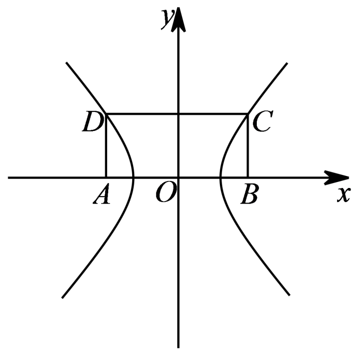
$\cos 2\alpha=1-2sin^2\alpha=\frac{4}{5}$，$2\alpha\in(0,\pi)$，$\sin 2\alpha=\frac{3}{5}$，

$\cos\left(2\alpha+\frac{\pi}{6}\right)=\cos 2\alpha\cos\frac{\pi}{6}-\sin 2\alpha\sin\frac{\pi}{6}=\frac{4\sqrt{3}-3}{10}$，

故选A．

考点 一三角函数与解三角形
- 三角函数
  - 同角三角函数基本关系式

8 如图，已知双曲线$E:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$，长方形$ABCD$的顶点$A$，$B$分别为双曲线$E$的左，右焦点，且点$C$，$D$在双曲线$E$上．若$AB=6$，$BC=\frac{5}{2}$，则此双曲线的离心率为（ ）．



A. $\sqrt{2}$　　B. $\frac{3}{2}$　　C. $\frac{5}{2}$　　D. $\sqrt{5}$

答案　B

解析　$\because AB = 2c = 6$，$\therefore c = 3$，

又$\because BC = \frac{b^2}{a} = \frac{c^2 - a^2}{a} = \frac{9 - a^2}{a} = \frac{5}{2}$，

解得$a = 2$，故双曲线的离心率$e = \frac{c}{a} = \frac{3}{2}$，答案为B．

考点　解析几何

双曲线

双曲线的离心率

9 在三棱锥$P - ABC$中，已知$PA \perp$底面ABC，$\angle BAC = 120°$，$PA = AB = AC = 2$．若该三棱锥的顶点都在同一个球面上，则该球的表面积为（ ）．

A. $10\sqrt{3}\pi$　　B. 18π　　C. 20π　　D. $9\sqrt{3}\pi$

答案　C

解析　$\because \triangle ABC$为顶角为$120°$，腰长为2的等腰三角形，$PA \perp$底面ABC，

易知该三棱锥的外接球就是以$\triangle ABC$为底面，PA为高的三棱柱的外接球．

$\triangle ABC$为等腰三角形，顶角为$120°$，底角易知为$30°$，腰长为2，

$\therefore$其外接圆的半径为$\frac{2}{\sin 30°} \div 2 = 2$，

$AP=2$，球心到$\triangle ABC$外接圆圆心的距离为1，

外接球的半径为$r=\sqrt{2^2+1^2}=\sqrt{5}$，

外接球的表面积$S=4\pi r^2=20\pi$.

故本题正确答案为C.

考点 —立体几何与空间向量

—立体几何初步

└空间几何体体积和表面积的计算

10 已知定义在$\mathbf{R}$上的奇函数$f(x)$满足$f(x+2)+f(x)=0$，且当$x\in[0,1]$时，$f(x)=log_2(x+1)$. 则下列不等式正确的是（ ）.

A. $f(\log_2 7)<f(-5)<f(6)$

B. $f(\log_2 7)<f(6)<f(-5)$

C. $f(-5)<f(\log_2 7)<f(6)$

D. $f(-5)<f(6)<f(\log_2 7)$

答案 C

解析 定义在$\mathbf{R}$上的奇函数$f(x)$满足$f(x+2)+f(x)=0$，

又$f(x+2)=-f(x)=f(-x)$，所以$f(x)$关于$x=1$对称，

$f(x+4)=-f(x+2)=f(x)$，$f(x)$周期为4，

$\therefore f(-5)=f(3)$，$f(6)=f(2)$，$2<\log_2 7<3$，

$\because x\in[0,1]$时，$f(x)=\log_2(x+1)$为增函数，且$f(x)$为奇函数，

$\therefore f(x)$在$[-1,1]$上为增函数，

又$\because f(x)$关于直线$x=1$对称，$\therefore$在$[1,3]$上为减函数，

故$f(3)<f(\log_2 7)<f(2)$，答案为C选项.

考点 —函数与导数

—函数

└单调性

└奇偶性

—对数函数

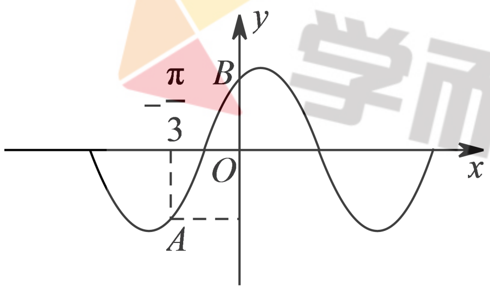
└对数的概念及其运算性质

11 设函数$f(x)=\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{3}\right)$，若$x_1x_2<0$，且$f(x_1)+f(x_2)=0$，则$|x_2-x_1|$的取值范围为（　）．

A. $\left(\dfrac{\pi}{6},+\infty\right)$　　B. $\left(\dfrac{\pi}{3},+\infty\right)$　　C. $\left(\dfrac{2\pi}{3},+\infty\right)$　　D. $\left(\dfrac{4\pi}{3},+\infty\right)$

答案 B

解析 画出$f(x)=\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{3}\right)$的图像，



$\because x_1\cdot x_2<0$即x_1，x_2异号，假设$x_1<0$，$x_2>0$，

又$\because f(x_1)+f(x_2)=0$，即函数值互为相反数，

如图所示，当x_2趋近于0时，x_1趋近于$-\dfrac{\pi}{3}$，此时$|x_2-x_1|$越小，

$\therefore |x_2-x_1|>\dfrac{\pi}{3}$，故答案为B．

考点 —三角函数与解三角形

—三角函数

└三角函数图象与性质

12

若关于x的方程$\dfrac{x}{e^x}+\dfrac{e^x}{x-e^x}+m=0$有三个不相等的实数解$x_1$，$x_2$，$x_3$．且$x_1<0<x_2<x_3$，其中$m\in\mathbf{R}$，$e=2.71828\cdots$为自然对数的底数．则$\left(\dfrac{x_1}{e^{x_1}}-1\right)^2\left(\dfrac{x_2}{e^{x_2}}-1\right)\left(\dfrac{x_3}{e^{x_3}}-1\right)$的值为（ ）．

A. e　　B. $1-m$　　C. $1+m$　　D. 1

答案 D

解析 $\because\dfrac{x}{e^x}+\dfrac{e^x}{x-e^x}+m=0$有三个不相等的实数解，

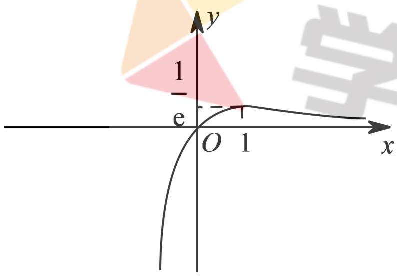
令$t=\dfrac{x}{e^x}$，且$t_1=\dfrac{x_1}{e^{x_1}}$，$t_2=\dfrac{x_2}{e^{x_2}}$，$t_3=\dfrac{x_3}{e^{x_3}}$，

有$t+\dfrac{1}{t-1}=-m$，即$(t-1)^2+(m+1)(t-1)+1=0$，

易知此方程最多有两根，所以t_1、t_2、t_3必有两个相等，

$t'=\dfrac{1-x}{e^x}$，易求得$\dfrac{x}{e^x}$在$x\in(-\infty,1)$时单调递增，此时$t\in(-\infty,\dfrac{1}{e})$，

在$x\in(1,+\infty)$时单调递减，此时$t\in(0,\dfrac{1}{e})$，大致图像如图所示，



又$\because x_1<0<x_2<x_3$，$\therefore$根据图像必有$t_2=t_3$，

$\therefore t_1$、t_2为$(t-1)^2+(m+1)(t-1)+1=0$的两个根，

$\therefore(t_1-1)(t_2-1)=1$，即$\left(\dfrac{x_1}{e^{x_1}}-1\right)\left(\dfrac{x_2}{e^{x_2}}-1\right)=1$，又$\because t_2=t_3$，

$\therefore(t_1-1)(t_3-1)=1$，即$\left(\dfrac{x_1}{e^{x_1}}-1\right)\left(\dfrac{x_3}{e^{x_3}}-1\right)=1$，

$\therefore\left(\dfrac{x_1}{e^{x_1}}-1\right)^2\left(\dfrac{x_2}{e^{x_2}}-1\right)\left(\dfrac{x_3}{e^{x_3}}-1\right)=1$．

故答案为D．

考点

- 函数与导数
  - 指数函数
    - 指数函数的概念、图象和性质

二、填空题：本大题共4小题，每小题5分.

13 $(x+2y)^5$的展开式中含x^3y^2项的系数为 ______ .

答案 40

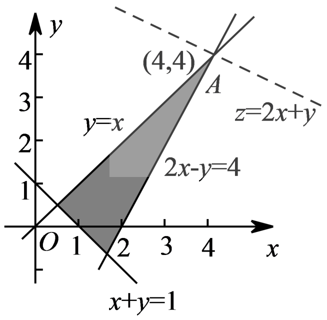
解析 $(x+2y)^5$的展开式中含x^3y^2项为$C_5^2x^3(2y)^2=40x^3y^2$.

考点 ─计数原理
├二项式定理
└二项式定理的应用

14 若实数x，y满足线性约束条件$\begin{cases}x+y\geqslant 1\\ y\leqslant x\\ 2x-y\leqslant 4\end{cases}$，则$x+2y$的最大值为 ______ .

答案 12

解析 由题意可画出可行域如图所示，



令$z=x+2y$，即$y=-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}z$，

易知当直线$y=-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}z$越靠上$z$越大，

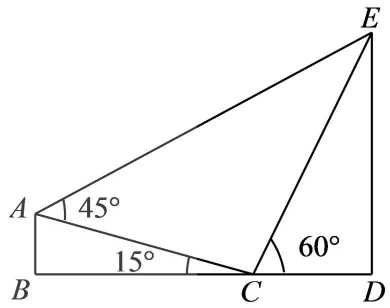
由图可知当直线$y=-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}z$过点$A(4,4)$时$z$最大，

此时$x=4$，$y=4$时，$x+2y$的最大值为$4+2\times4=12$.

考点 ─不等式与线性规划

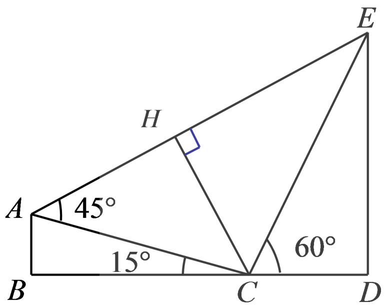
—简单的线性规划
　└简单的线性规划问题

15 如图，在直角梯形$ABDE$中，已知$\angle ABD=\angle EDB=90^\circ$，$C$是$BD$上一点，$AB=3-\sqrt{3}$，$\angle ACB=15^\circ$，$\angle ECD=60^\circ$，$\angle EAC=45^\circ$，则线段$DE$的长度为______．



答案 6

解析 如图，过点C作$CH\perp AE$于点H，



易知$\angle ACH=45^\circ$，$\angle HCE=180^\circ-15^\circ-45^\circ-60^\circ=60^\circ$，

$\therefore\angle HEC=30^\circ$，易求得$HE=DE$，

$\sin15^\circ=\sin(45^\circ-30^\circ)=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$，

$\therefore AC=\dfrac{3-\sqrt{3}}{\sin15^\circ}=2\sqrt{6}$，

$\therefore HC=2\sqrt{3}$，

$\therefore HE=DE=2\sqrt{3}\cdot\tan60^\circ=6$．

考点 —三角函数与解三角形

—解三角形

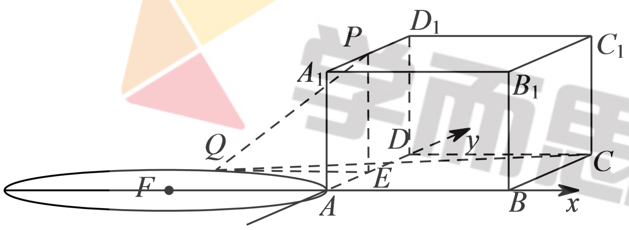
└正余弦定理的实际应用

16 在长方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$中，已知底面$ABCD$为正方形，P为A_1D_1的中点，$AD=2$，$AA_1=\sqrt{3}$，点Q是正方形$ABCD$所在平面内的一个动点，且$QC=\sqrt{2}QP$，则线段BQ的长度的最大值为 ______ .

答案 6

解析 作$PE\perp$平面$ABCD$，垂足为E，易知$PE=\sqrt{3}$.

以A为原点，AB为x轴，AD为y轴作平面直角坐标系，



易知$E(0,1)$，$C(2,2)$，设$Q(x,y)$，$QE\perp PE$.

则$QC=\sqrt{(x-2)^2+(y-2)^2}$，$QP=\sqrt{QE^2+PE^2}=\sqrt{x^2+(y-1)^2+3}$.

由题意$\sqrt{(x-2)^2+(y-2)^2}=\sqrt{2}\cdot\sqrt{x^2+(y-1)^2+3}$

化简得$(x+2)^2+y^2=4$，$\therefore$点Q在以$F(-2,0)$为圆心，以2为半径的圆上.

易知$B(2,0)$，$\therefore$线段BQ的长度的最大值为$BF+r=4+2=6$.

考点 —解析几何

—圆与方程

└直线与圆的位置关系

—直线与圆锥曲线

└动点问题

三、解答题：本大题共5小题，共60分．

17 已知等差数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，$a_2=3$，$S_4=16$，$n\in N^*$

（1）求数列$\{a_n\}$的通项公式．

（2）设$b_n=\dfrac{1}{a_n\cdot a_{n+1}}$，求数列$\{b_n\}$的前$n$项和$T_n$．

答案 （1）$a_n=2n-1$．

（2）$T_n=\dfrac{n}{2n+1}$．

解析 （1）设数列$\{a_n\}$的公差为d，

$\because a_2=3$，$S_4=16$，$\therefore a_1+d=3$，$4a_1+6d=16$，

解得$d=2$，$a_1=1$，

$\therefore a_n=2n-1$．

（2）由题意，$b_n=\dfrac{1}{(2n-1)(2n+1)}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{2n-1}-\dfrac{1}{2n+1}\right)$，

$$\therefore T_n=b_1+b_2+\cdots+b_n$$
$$=\frac{1}{2}\left[\left(1-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)\right]$$
$$=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2n+1}\right)=\frac{n}{2n+1}.$$

考点 —数列

—数列的概念

└数列的前n项和

—等差数列

└等差数列的概念和通项

18 某部门为了了解一企业在生产过程中的用水量情况，对每天的用水量作了记录，得到了大量该企业的日用水量的统计数据．从这些统计数据中随机抽取12天的数据作为样本，得到如图所示的茎

叶图（单位：吨）．若用水量不低于95（吨），则称这一天是用水量超标．

7	3 1
8	3 5 6 7 8 9
9	5 7 8 9

（1）从这12天的数据中随机抽取3个，求至多有1天是用水量超标的概率；

（2）以这12天的样本数据中用水量超标的频率作为概率，估计该企业未来3天中用水量超标的天数．记随机变量X为未来这3天中用水量超标的天数，求X的分布列和数学期望．

答案　（1）$\frac{42}{55}$．

（2）分布列见解析，$E(X)=1$．

解析　（1）记“从这12天的数据中随机抽取3个，求至多有1天是用水量超标”为事件A，则

$P(A)=\frac{C_4^1C_8^2}{C_{12}^3}+\frac{C_8^3}{C_{12}^3}=\frac{168}{220}=\frac{42}{55}$．

（2）以这12天的样本数据中用水量超标的频率作为概率，已知其概率为$\frac{1}{3}$，

随机变量X表示未来三天用水量超标的天数，X的所有可能的取值为0，1，2，3，易知$X\sim B\left(3,\frac{1}{3}\right)$，$P(X=k)=C_3^k\left(\frac{1}{3}\right)^k\left(\frac{2}{3}\right)^{3-k}$，$k=0$，1，2，3，

则$P(X=0)=\frac{8}{27}$，$P(X=1)=\frac{4}{9}$，$P(X=2)=\frac{2}{9}$，$P(X=3)=\frac{1}{27}$，

随机变量X的分布列为

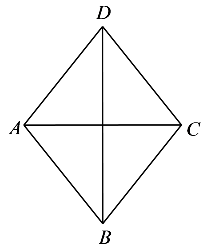
X	0	1	2	3
P	$\frac{8}{27}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{27}$

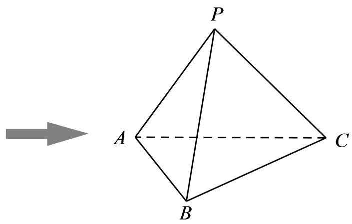
数学期望$E(X)=3\times\frac{1}{3}=1$

考点

—概率
- 事件与概率
  - 随机事件的概率
- 随机变量的分布列
  - 取有限值的离散型随机变量及其分布列

19 如图①，在边长为5的菱形$ABCD$中，$AC=6$．现沿对角线AC把$\triangle ADC$翻折到$\triangle APC$的位置得到四面体$P-ABC$，如图②所示．已知$PB=4\sqrt{2}$．


图①


图②

（1）求证：平面$PAC\perp$平面ABC

（2）若Q是线段AP上的点，且$\overrightarrow{AQ}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AP}$，求二面角$Q-BC-A$的余弦值．

答案 （1）证明过程见解析．

（2）$\frac{3\sqrt{10}}{10}$．

解析 （1）取AC的中点O，连接PO，BO得到$\triangle PBO$，

$ABCD$是菱形，$PA=PC$，$PO\perp AC$，

$DC=5$，$AC=6$，$OC=3$，$PO=OB=4$，

$PB=4\sqrt{2}$，$PO^2+OB^2=PB^2$，

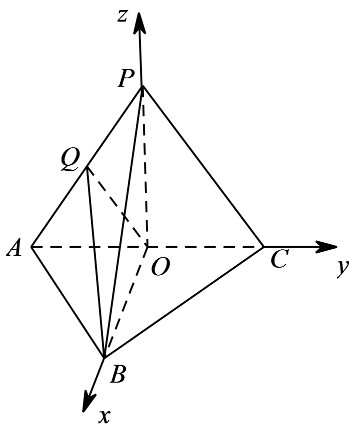
$PO\perp OB$，

$BO\cap AC=O$，$PO\perp$平面ABC，

（2）$\because AB=BC$，$BO\perp AC$，

易知OB，OC，OP两两垂直，

以O为坐标原点，OB，OC，OP所在直线分别为x轴，



y轴，z轴建立如图所示的空间直角坐标系$Oxyz$，

则$B(4,0,0)$，$C(0,3,0)$，$P(0,0,4)$，$A(0,-3,0)$，

设点$Q(x,y,z)$，

由$\overrightarrow{AQ}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AP}$，得$Q\left(0,-2,\frac{4}{3}\right)$，

$\overrightarrow{BC}=(-4,3,0)$，$\overrightarrow{BQ}=\left(-4,-2,\frac{4}{3}\right)$，

设$n_1=(x_1,y_1,z_1)$为平面BCQ的一个法向量，

由$\begin{cases}n_1\cdot\overrightarrow{BC}=0\\ n_1\cdot\overrightarrow{BQ}=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-4x_1+3y_1=0\\ -4x_1-2y_1+\frac{4}{3}z_1=0\end{cases}$，解得$\begin{cases}x_1=\frac{3}{4}y_1\\ y_1=\frac{4}{15}z_1\end{cases}$，

取$z_1=15$，则$n_1=(3,4,15)$，

取平面ABC的一个法向量为$n_2=(0,0,1)$，

$\cos<n_1,n_2>=\frac{n_1\cdot n_2}{|n_1||n_2|}=\frac{15}{\sqrt{3^2+4^2+15^2}}=\frac{3\sqrt{10}}{10}$，

所以二面角$Q-BC-A$的余弦值为$\frac{3\sqrt{10}}{10}$．

考点 —立体几何与空间向量

- 立体几何初步
  - 空间中的垂直
- 空间向量
  - 空间向量的应用

已知椭圆$C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\,(a>b>0)$的右焦点$F\left(\sqrt{3},0\right)$，长半轴与短半轴之比等于$2$.

（1）求椭圆C的标准方程.

（2）设不经过点$B\,(0,1)$的直线l与椭圆C相交于不同的两点M，N．若点B在以线段MN为直径的圆上，证明直线l过定点，并求出该定点的坐标.

答案

（1）$\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$.

（2）$\left(0,-\dfrac{3}{5}\right)$.

解析

（1）$\because c=\sqrt{3}$，$\dfrac{a}{b}=2$，$a^2=b^2+c^2$，

$a=2$，$b=1$，

椭圆的标准方程为$\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$.

（2）当直线l的斜率存在时，设直线l的方程为$y=kx+m\,(m\neq 1)$，$M\,(x_1,y_1)$，$N\,(x_2,y_2)$，

联立$\begin{cases}y=kx+m\\x^2+4y^2=4\end{cases}$，消去$y$可得$\left(4k^2+1\right)x^2+8kmx+4m^2-4=0$，

$\Delta=4k^2+1-m^2>0$，$x_1+x_2=\dfrac{-8km}{4k^2+1}$，$x_1x_2=\dfrac{4m^2-4}{4k^2+1}$，

点B在以MN为直径的圆上，

$\overrightarrow{BM}\cdot\overrightarrow{BN}=0$，

$\overrightarrow{BM}\cdot\overrightarrow{BN}=(x_1,kx_1+m-1)\cdot(x_2,kx_2+m-1)$

$=\left(k^2+1\right)x_1x_2+k\,(m-1)\,(x_1+x_2)+(m-1)^2=0$，

$\left(k^2+1\right)\dfrac{4m^2-4}{4k^2+1}+k\,(m-1)\dfrac{-8km}{4k^2+1}+(m-1)^2=0$，

整理得$5m^2-2m-3=0$，解得$m=-\dfrac{3}{5}$或$m=1$（舍去），

直线l的方程为$y=kx-\dfrac{3}{5}$，

易知当直线l的斜率不存在时，不合题意，

故直线经过定点，且该定点的坐标为$\left(0,-\dfrac{3}{5}\right)$.

考点

—解析几何
- 椭圆
  - 椭圆的定义、图形及标准方程

直线与圆锥曲线

过定点问题

21 已知函数$f(x)=\mathrm{e}^x$，其中$\mathrm{e}=2.71828\cdots$为自然对数的底数.

（1） 若曲线$y=f(x)$在点$P(x_0,f(x_0))$处的切线方程为$y=kx+b$，求$k-b$的最小值.

（2） 当常数$m\in(2,+\infty)$时，若函数$g(x)=(x-1)f(x)-mx^2+2$在$[0,+\infty)$上有两个零点x_1，$x_2(x_1<x_2)$，证明$x_1+\ln\frac{4}{\mathrm{e}}<x_2<m$.

答案 （1） $-\frac{1}{\mathrm{e}}$.

（2） 证明过程见解析.

解析 （1） 曲线在点$P(x_0,\mathrm{e}^{x_0})$处的切线为$y=\mathrm{e}^{x_0}x-x_0\mathrm{e}^{x_0}+\mathrm{e}^{x_0}$.

$\therefore k=e^{x_0}$，$b=-x_0\mathrm{e}^{x_0}+\mathrm{e}^{x_0}$. $\therefore k-b=x_0\mathrm{e}^{x_0}$.

设$H(x)=x\mathrm{e}^x$.

由$H'(x)=(x+1)\mathrm{e}^{x_0}=0$，解得$x=-1$.

当$x>-1$时，$H'(x)>0$，$H(x)$在$(-1,+\infty)$上单调递增.

当$x<\ -1$时，$H'(x)<0$，$H(x)$在$(-1,+\infty)$上单调递减.

$\therefore H(x)$的极小值为$H(-1)=-\frac{1}{\mathrm{e}}$.

$\therefore k-b$的最小值为$-\frac{1}{\mathrm{e}}$.

（2） $\because m>2$，$x\geqslant 0$，由$g'(x)=x(\mathrm{e}^x-2m)=0$，解得$x=0$或$x=\ln 2m$.

当$x>\ln 2m$时，$g'(x)>0$，$g(x)$在$(\ln 2m,+\infty)$上单调递增.

当$0<x<\ \ln 2m$时，$g'(x)<0$，$g(x)$在$(0,\ln 2m)$上单调递减.

$\therefore g(x)$的极小值为$g(ln2m)$.

$\because g(1)=2-m<0$，又$\because \ln 2m>\ln 4>1$，

$\therefore g(ln2m)<0$.

又$\because g(0)=1>0$，$g(1)=2-m<0$，

$\therefore \exists x_1\in(0,1)$，使得$g(x_1)=0$.

由$g(ln2m)<0$，知当$x\to+\infty$时，$g(x)\to+\infty$.

$\therefore \exists x_2 \in (\ln 2m, +\infty)$，使得$g(x_2) = 0$.

$\therefore x_2 > \ln 2m > \ln 4$，

$x_2 - x_1 > \ln 4 - 1 = \ln \frac{4}{\mathrm{e}}$，即$x_2 > x_1 + \ln \frac{4}{\mathrm{e}}$.

当$x = m$时，$g(m) = (m-1)\mathrm{e}^m - m^3 + 2$，$m > 2$.

令$u(x) = (x-1)\mathrm{e}^x - x^3 + 2$，$x > 2$.

$\therefore u'(x) = x\mathrm{e}^x - 3x^2 = x(\mathrm{e}^x - 3x)$.

设$G(x) = \mathrm{e}^x - 3x$，$x > 2$.

$\because G'(x) = \mathrm{e}^x - 3 > 0$，$\therefore G(x)$在$(2, +\infty)$上单调递增.

$\therefore G(x) > G(2) = e^2 - 6 > 0$.

$\therefore u'(x) > 0$在$x > 2$时恒成立.

$\therefore u(x) > u(2) = e^2 - 6 > 0$.

$\therefore$当$m > 2$时，$g(m) > 0$.

又$\because g(x_2) = 0$，$g(x)$在$(\ln 2m, +\infty)$上单调递增，

$\therefore m > x_2$.

故$x_1 + \ln \frac{4}{\mathrm{e}} < x_2 < m$成立.

考点 —函数与导数

- 导数及其应用
  - 导数与恒成立
  - 导数概念及其几何意义

四、选做题：22,23选做一题，共10分

22 在平面直角坐标系xOy中，直线l的参数方程为$\begin{cases} x = 2 + \frac{1}{2}t \\ y = 2 + \frac{\sqrt{3}}{2}t \end{cases}$（$t$为参数）．在以坐标原点$O$为极点，$x$轴的正半轴为极轴的极坐标系中，曲线$C$的极坐标方程为$\rho\sin^2\theta + 4\sin\theta = \rho$.

（1）写出直线l的普通方程和曲线C的直角坐标方程.

（2）

已知点M在直角坐标系中的坐标为$(2,2)$，若直线l与曲线C相交于不同的两点A，B，求$|MA|\cdot|MB|$的值．

答案 （1） l：$\sqrt{3}x-y+2-2\sqrt{3}=0$，$C$：$x^2=4y$．

（2） 16．

解析 （1） 由$\begin{cases}x=2+\frac{1}{2}t\\y=2+\frac{\sqrt{3}}{2}t\end{cases}$，消去参数$t$可得$y=\sqrt{3}(x-2)+2$．

$\therefore$直线l的普通方程为$\sqrt{3}x-y+2-2\sqrt{3}=0$．

$\because\rho\sin^2\theta+4\sin\theta=\rho$，$\rho^2\sin^2\theta+4\rho\sin\theta=\rho^2$．

$\because\rho\sin\theta=y$，$\rho^2=x^2+y^2$，

故曲线C的直角坐标方程为$x^2=4y$．

（2） 将$\begin{cases}x=2+\frac{1}{2}t\\y=2+\frac{\sqrt{3}}{2}t\end{cases}$代入抛物线方程$x^2=4y$中，

可得$\left(2+\dfrac{1}{2}t\right)^2=4\left(2+\dfrac{\sqrt{3}}{2}t\right)$．

即$t^2+(8-8\sqrt{3})t-16=0$．

$\because\Delta>0$，且点M在直线l上，

$\therefore$此方程的两个实数根为直线l与曲线C的交点A，B对应的参数t_1，t_2．

$\because t_1t_2=-16$，

$\therefore|MA|\cdot|MB|=|t_1t_2|=16$．

考点

- 解析几何
  - 直线与圆锥曲线
    - 直线与圆锥曲线的位置关系
- 坐标系与参数方程
  - 参数方程

23 已知函数$f(x)=|x-2|+k|x+1|$，$k\in\mathbf{R}$．

（1） 当$k=1$时，若不等式$f(x)<4$的解集为$\{x|x_1<x<x_2\}$，求x_1+x_2的值．

（2） 当$x\in \mathbf{R}$时，若关于x的不等式$f(x)\geqslant k$恒成立，求k的最大值．

答案 （1） 1．

（2） 3．

解析 （1） 由题意得$|x-2|+|x+1|<4$．

①当$x>2$时，原不等式即$2x<5$．$\therefore 2<x<\dfrac{5}{2}$．

②当$x<-1$时，原不等式即$-2x<3$．$\therefore -\dfrac{3}{2}<x<-1$．

③当$-1\leqslant x\leqslant 2$时，原不等式即$3<4$．$\therefore -1\leqslant x\leqslant 2$．

综上，原不等式的解集为$\left\{x|-\dfrac{3}{2}<x<\dfrac{5}{2}\right\}$，即$x_1=-\dfrac{3}{2}$，$x_2=\dfrac{5}{2}$．

$\therefore x_1+x_2=1$．

（2） 由题意可得$|x-2|+k|x+1|\geqslant k$．

当$x=2$时，即不等式$3k\geqslant k$成立．$\therefore k\geqslant 0$．

①当$x\leqslant -2$或$x\geqslant 0$时，

$\because |x+1|\geqslant 1$，$\therefore$不等式$|x-2|+k|x+1|\geqslant k$恒成立．

②当$-2<x\leqslant -1$时，

原不等式可化为$2-x-kx-k\geqslant k$，可得$k\leqslant \dfrac{2-x}{x+2}=-1+\dfrac{4}{x+2}$．

$\therefore k\leqslant 3$

③当$-1<x<0$时，

原不等式可化为$2-x+kx+k\geqslant k$，可得$k\leqslant 1-\dfrac{2}{x}$．

$\therefore k\leqslant 3$．

综上可得$0\leqslant k\leqslant 3$，即k的最大值为3．

考点
- 不等式与线性规划
  - 绝对值不等式
    - 绝对值不等式的解法