

2017~2018学年北京西城区北京师范大学第二附属中学高二上学期理科期末数学试卷

选择题（每小题5分，共40分）

1. 已知命题 $p: \forall n \in \mathbf{N}, 2^n > \sqrt{n}$ , 则 $\neg p$ 是( ).

A.  $\forall n \in \mathbf{N}, 2^n \leq \sqrt{n}$

B.  $\forall n \in \mathbf{N}, 2^n < \sqrt{n}$

C.  $\exists n \in \mathbf{N}, 2^n \leq \sqrt{n}$

D.  $\exists n \in \mathbf{N}, 2^n > \sqrt{n}$

2. 已知向量 $\vec{a} = (1, m, 2)$ ,  $\vec{b} = (-2, -1, 2)$ , 且 $\cos\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = \frac{1}{3}$ 那么实数 $m =$  ( ).

A. -4

B. 4

C.  $\frac{1}{4}$

D.  $-\frac{1}{4}$

3. 如果命题“ $p$ 或 $q$ ”是真命题，“ $\neg p$ ”是假命题，那么( ).

A. 命题 $p$ 一定是假命题

B. 命题 $q$ 一定是假命题

C. 命题 $q$ 一定是真命题

D. 命题 $q$ 是真命题或者是假命题

4. 已知直线 $l_1: ax + (a+1)y + 1 = 0$ ,  $l_2: x + ay + 2 = 0$ , 则“ $a = -2$ ”是“ $l_1 \perp l_2$ ”的( ).

A. 充分不必要条件

B. 必要不充分条件

C. 充分必要条件

D. 既不充分也不必要条件

5. 已知双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的一条渐近线方程为 $y = \frac{\sqrt{5}}{2}x$ , 且与椭圆 $\frac{x^2}{12} + \frac{y^2}{3} = 1$ 有公共焦点, 则 $C$ 的方程为( ).

A.  $\frac{x^2}{8} - \frac{y^2}{10} = 1$

B.  $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{5} = 1$

C.  $\frac{x^2}{5} - \frac{y^2}{4} = 1$

D.  $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{3} = 1$

6. 已知点 $A(6, 0)$ , 抛物线 $C: y^2 = 4x$ 的焦点为 $F$ , 点 $P$ 在抛物线 $C$ 上, 若点 $F$ 恰好在 $PA$ 的垂直平分线上, 则 $PA$ 的长度为( ).

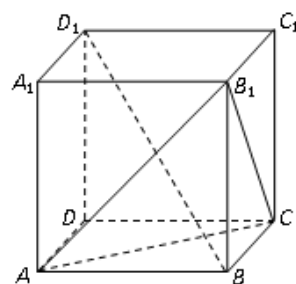
A.  $2\sqrt{3}$

B.  $2\sqrt{5}$

C. 5

D. 6

7. 如图, 在正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中, 下列结论不正确的是( ).



A.  $C_1D_1 \perp B_1C$

B.  $BD_1 \perp AC$

C.  $BD_1 // B_1C$

D.  $\angle ACB_1 = 60^\circ$

8. 已知点  $A(-1, -1)$ . 若曲线  $G$  上存在两点  $B, C$ , 使  $\triangle ABC$  为正三角形, 则称  $G$  为  $\Gamma$  型曲线. 给定下列四条曲线:

①  $y = -x + 3 (0 \leq x \leq 3)$ , ②  $y = \sqrt{2 - x^2} (-\sqrt{2} \leq x \leq 0)$ ,

③  $y = -\sqrt{x} (0 \leq x \leq 1)$ , ④  $y = \sqrt{9 - \frac{9}{4}x^2} (0 \leq x \leq 2)$ .

其中,  $\Gamma$  型曲线的个数是 ( ).

A. 0

B. 1

C. 2

D. 3

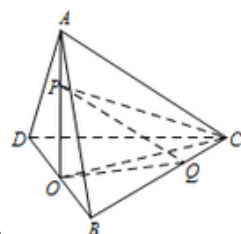
### 填空题 (每小题5分, 共20分)

9. 已知  $\frac{2}{a+i} = 1-i$ , 其中  $i$  为虚数单位,  $a \in \mathbf{R}$ , 则  $a =$  \_\_\_\_\_.

10. 若点  $P(2, 2)$  为抛物线  $y^2 = 2px$  上一点, 则抛物线焦点坐标为 \_\_\_\_\_, 点  $P$  到抛物线的准线的距离为 \_\_\_\_\_.

11. 已知点  $F, B$  分别为双曲线  $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$  的焦点和虚轴端点, 若线段  $FB$  的中点在双曲线  $C$  上, 则双曲线  $C$  的离心率是 \_\_\_\_\_.

12. 如图, 在三棱锥  $A-BCD$  中,  $BC = DC = AB = AD = \sqrt{2}$ ,  $BD = 2$ , 平面  $ABD \perp$  平面  $BCD$ ,  $O$  为  $BD$  中点, 点  $P, Q$  分别为线段  $AO, BC$  上的动点 (不含端点), 且  $AP = CQ$ , 则三棱锥  $P-QCO$  体积的最大值为 \_\_\_\_\_.



13. 在空间直角坐标系  $O-xyz$  中, 已知点  $A(1, 0, 2)$ ,  $B(0, 2, 1)$ . 点  $C, D$  分别在  $x$  轴,  $y$  轴上, 且  $AD \perp BC$ , 那么  $|\overrightarrow{CD}|$  的最小值是 \_\_\_\_\_.

14. 已知函数  $f(x)$  是定义在  $\mathbf{R}$  上的奇函数, 当  $x > 0$  时,  $f(x) = x^2 - ax + a$ , 其中  $a \in \mathbf{R}$ .

①  $f(-1) =$  \_\_\_\_\_.

② 若  $f(x)$  的值域是  $\mathbf{R}$ , 则  $a$  的取值范围是 \_\_\_\_\_.

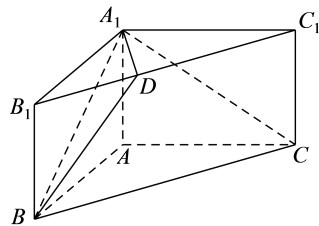
### 解答题 (第15题13分, 第16题13分, 第17题13分, 第18题14分, 第19题14分, 第20题13分, 共80分)

15. 已知圆  $C$  经过坐标原点  $O$  和点  $(4, 0)$ , 且圆心在  $x$  轴上.

(1) 求圆  $C$  的方程.

(2) 设直线  $l$  经过点  $(1, 2)$  , 且  $l$  与圆  $C$  相交所得弦长为  $2\sqrt{3}$  , 求直线  $l$  的方程 .

16. 如图 , 在直三棱柱  $ABC - A_1B_1C_1$  中 ,  $\angle BAC = 90^\circ$  ,  $AC = 2\sqrt{3}$  ,  $AA_1 = \sqrt{3}$  ,  $AB = 2$  , 点  $D$  在棱  $B_1C_1$  上 , 且  $B_1C_1 = 4B_1D$  .

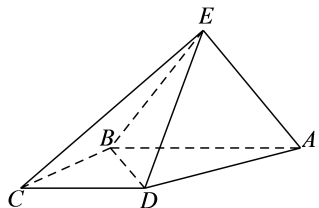


- (1) 求  $BD \perp A_1C$  .  
(2) 求直线  $BD$  与平面  $A_1BC$  的夹角正弦值 .

17. 已知抛物线  $y^2 = 2px (p > 0)$  的准线方程是  $x = -\frac{1}{2}$  ,  $O$  为坐标原点 .

- (1) 求抛物线的方程 .  
(2) 若过点  $A(2, 0)$  的直线  $l$  与抛物线相交于  $B, C$  两点 , 求证 :  $\angle BOC$  是定值 .

18. 如图 , 在四棱锥  $E - ABCD$  中 , 平面  $AEB \perp$  底面  $ABCD$  , 侧面  $ABE$  为等腰直角三角形 ,  $\angle AEB = \frac{\pi}{2}$  , 底面  $ABCD$  为直角梯形 ,  $AB \parallel CD$  ,  $AB \perp BC$  ,  $AB = 2CD = 2BC = 2$  .



- (1) 求证 :  $BC \perp$  平面  $AEB$  .  
(2) 求平面  $DEC$  与平面  $AEB$  所成的锐二面角的大小 .  
(3) 在线段  $EA$  上是否存在点  $F$  , 使  $EC \parallel$  平面  $FDB$  ? 若存在 , 求出  $\frac{EF}{EA}$  值 . 若不存在 , 说明理由 .

19. 已知椭圆  $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$  的右顶点为  $A(2, 0)$  , 离心率为  $\frac{1}{2}$  .

- (1) 求椭圆  $C$  的方程 .  
(2) 若经过点  $(1, 0)$  直线  $l$  与椭圆  $C$  交于点  $E, F$  , 且  $|EF| = \frac{16}{5}$  , 求直线  $l$  的方程 .  
(3) 过定点  $M(0, 2)$  的直线  $l_1$  与椭圆  $C$  交于  $G, H$  两点 (点  $G$  在点  $M, H$  之间) . 设直线  $l_1$  的斜率  $k > 0$  , 在  $x$  轴上是否存在点  $P(m, 0)$  , 使得以  $PG, PH$  为邻边的平行四边形是菱形 . 如果存在 , 求出  $m$  的取值范围 , 如果不存在 , 请说明理由 .

20. 若数列  $A: a_1, a_2, \dots, a_n (n \geq 3)$  中  $a_i \in \mathbf{N}^* (1 \leq i \leq n)$  且对任意的  $2 \leq k \leq n-1$  ,  $a_{k+1} + a_{k-1} > 2a_k$  恒成立 , 则称数列  $A$  为 “ $U$ -数列” .

- (1) 若数列  $1, x, y, 7$  为 “ $U$ -数列” , 写出所有可能的  $x, y$  .  
(2)

对所有可能的“ $U$ -数列” $A: a_1, a_2, a_3, a_4$ , 记 $M = \max\{a_1, a_2, a_3, a_4\}$ , 其中 $\max\{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ 表示 $x_1, x_2, \dots, x_s$ 这 $s$ 个数中最大的数, 则 $M$ 的最小值是\_\_\_\_\_ (直接写出答案) .

(3) 若“ $U$ -数列” $A: a_1, a_2, \dots, a_n$ 中 $a_1 = 1, a_n = 2017$ , 求 $n$ 的最大值 .

