

2017~2018学年北京海淀区清华大学附属中学高一上学期期末数学试卷

选择题（每小题5分，共40分）

1. 下列各角中，与 50° 的角终边相同的角是（ ）.

- A. 40° B. 140° C. -130° D. -310°

2. 设向量 $\vec{a} = (0, 2)$ ， $\vec{b} = (\sqrt{3}, 1)$ ，则 \vec{a} ， \vec{b} 的夹角等于（ ）.

- A. $\frac{\pi}{3}$ B. $\frac{\pi}{6}$ C. $\frac{2\pi}{3}$ D. $\frac{5\pi}{6}$

3. 角 α 的终边经过点 $P(4, -3)$ ，则 $\sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)$ 的值为（ ）.

- A. $-\frac{4}{5}$ B. $\frac{4}{5}$ C. $-\frac{3}{5}$ D. $\frac{3}{5}$

4. 要得到函数 $y = \cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)$ 的图象，只需将 $y = \cos 2x$ 的图象（ ）.

- A. 向右平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度 B. 向左平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度
C. 向右平移 $\frac{\pi}{3}$ 个单位长度 D. 向左平移 $\frac{\pi}{3}$ 个单位长度

5. 已知非零向量 \vec{AB} 与 \vec{AC} 满足 $\frac{\vec{AB} \cdot \vec{BC}}{|\vec{AB}|} = \frac{\vec{CA} \cdot \vec{BC}}{|\vec{AC}|}$ 且 $\frac{\vec{AB}}{|\vec{AB}|} \cdot \frac{\vec{AC}}{|\vec{AC}|} = \frac{1}{2}$ ，则 $\triangle ABC$ 为（ ）.

- A. 三边均不相等的三角形 B. 直角三角形
C. 等腰非等边三角形 D. 等边三角形

6. 同时具有性质“①最小正周期为 π ；②图象关于直线 $x = \frac{\pi}{3}$ 对称；③在 $\left[\frac{\pi}{6}, \frac{2\pi}{3}\right]$ 上是增函数”的一个函数是（ ）.

- A. $y = \sin\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{3}\right)$ B. $y = \cos\left(2x + \frac{\pi}{6}\right)$
C. $y = \sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right)$ D. $y = \cos\left(2x + \frac{2\pi}{3}\right)$

7. 定义在 \mathbf{R} 上的偶函数 $f(x)$ 满足 $f(x+2) = f(x)$ ，且在 $[1, 2]$ 上是减函数，若 α, β 是锐角三角形的两个内角，则（ ）.

- A. $f(\sin \alpha) > f(\cos \beta)$ B. $f(\sin \alpha) < f(\cos \beta)$
C. $f(\sin \alpha) > f(\sin \beta)$ D. $f(\cos \alpha) < f(\cos \beta)$

8. 若定义 $[-2018, 2018]$ 上的函数 $f(x)$ 满足：对任意 $x_1, x_2 \in [-2018, 2018]$ 有 $f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2) - 2017$ ，且当 $x > 0$ 时，有 $f(x) > 2017$ ，设 $f(x)$ 的最大值、最小值分别为 M, m ，则 $M + m$ 的值为（ ）.

填空题（每小题5分，共30分）

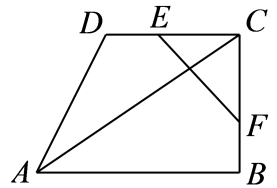
9. 若 θ 为第四象限的角，且 $\sin \theta = -\frac{1}{3}$ ，则 $\cos \theta =$ _____ ； $\sin 2\theta =$ _____ 。

10. 已知 a, b, c 分别是 $\triangle ABC$ 的三个内角 A, B, C 所对的边，若 $a = 1$ ， $b = \sqrt{3}$ ， $A + C = 2B$ ，则 $\triangle ABC$ 的面积 $S_{\triangle ABC} =$ _____ 。

11. 已知 $\tan x = 2$ ，则 $\cos 2x + \sin(\pi + x) \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) =$ _____ 。

12. 已知 $\alpha \in (0, \pi)$ 且 $\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{3}$ ，则 $\cos\left(\alpha + \frac{\pi}{6}\right) =$ _____ ； $\sin \alpha =$ _____ 。

13. 如图，在直角梯形 $ABCD$ 中， $AB \parallel DC$ ， $\angle ABC = 90^\circ$ ， $AB = 3$ ， $BC = DC = 2$ ，若 E, F 分别是线段 DC 和 BC 上的动点，则 $\vec{AC} \cdot \vec{EF}$ 的取值范围是 _____ 。



14. 已知函数 $f(x) = 2 \sin 2x - 2 \sin^2 x - a$ 。

①若 $f(x) = 0$ 在 $x \in \mathbb{R}$ 上有解，则 a 的取值范围是 _____ 。

②若 x_1, x_2 是函数 $y = f(x)$ 在 $[0, \frac{\pi}{2}]$ 内的两个零点，则 $\sin(x_1 + x_2) =$ _____ 。

解答题（6小题，共80分）

15. 已知函数 $f(x) = 4 \sin x \cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right) + 1$ 。

(1) 求 $f\left(\frac{\pi}{12}\right)$ 的值。

(2) 求 $f(x)$ 的单调递减区间。

(3) 求 $f(x)$ 在区间 $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ 上的最大值和最小值。

16. 已知不共线向量 \vec{a}, \vec{b} 满足 $|\vec{a}| = 3$ ， $|\vec{b}| = 2$ ， $(2\vec{a} - 3\vec{b}) \cdot (2\vec{a} + \vec{b}) = 20$ 。

(1) 求 $\vec{a} \cdot (\vec{a} - \vec{b})$ 。

(2) 是否存在实数 λ ，使 $\lambda\vec{a} + \vec{b}$ 与 $\vec{a} - 2\vec{b}$ 共线？

(3) 若 $(k\vec{a} + 2\vec{b}) \perp (\vec{a} - k\vec{b})$ ，求实数 k 的值。

17. 设锐角三角形的内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 且 $\sin A - \cos C = \cos(A - B)$.

(1) 求 B 的大小.

(2) 求 $\cos A + \sin C$ 的取值范围.

18. 已知向量 $\vec{a} = (\cos \theta, \sin \theta)$, $\vec{b} = (\cos \beta, \sin \beta)$.

(1) 若 $|\theta - \beta| = \frac{\pi}{3}$, 求 $|\vec{a} - \vec{b}|$ 的值.

(2) 若 $|\theta + \beta| = \frac{\pi}{3}$, 记 $f(\theta) = \vec{a} \cdot \vec{b} - \lambda |\vec{a} - \vec{b}|$, $\theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. 当 $1 \leq \lambda \leq 2$ 时, 求 $f(\theta)$ 的最小值.

19. 借助计算机(器)作某些分段函数图象时, 分段函数的表示有时可以利用函数 $h(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$, 例如要表示分段函数

$$g(x) = \begin{cases} x, & x > 2 \\ 2, & x = 2 \\ -x, & x < 2 \end{cases} \quad \text{可以将 } g(x) \text{ 表示为 } g(x) = xh(x-2) + (-x)h(2-x).$$

(1) 设 $f(x) = (x^2 - 2x + 3)h(x-1) + (1-x^2)h(1-x)$, 请把函数 $f(x)$ 写成分段函数的形式.

(2) 已知 $G(x) = [(3a-1)x + 4a]h(1-x) + \log_a x \cdot h(x-1)$ 是 \mathbf{R} 上的减函数, 求 a 的取值范围.

(3) 设 $F(x) = (x^2 + x - a + 1)h(x-a) + (x^2 - x + a - 1)h(a-x)$, 求函数 $F(x)$ 的最小值.

20. 一个函数 $f(x)$, 如果对任意一个三角形, 只要它的三边长 a, b, c 都在 $f(x)$ 的定义域内, 就有 $f(a), f(b), f(c)$ 也是某个三角形的三边长, 则称 $f(x)$ 为“保三角形函数”.

(1) 判断 $f_1(x) = x$, $f_2(x) = \log_2(6 + 2\sin x - \cos^2 x)$ 中, 哪些是“保三角形函数”, 哪些不是, 并说明理由.

(2) 若函数 $g(x) = \ln x (x \in [M, +\infty))$ 是“保三角形函数”, 求 M 的最小值;

(3) 若函数 $h(x) = \sin x (x \in (0, A))$ 是“保三角形函数”, 求 A 的最大值.