

2017~2018学年北京西城区北京师范大学附属中学高一上学期期末数学试卷

选择题（每小题5分，共40分）

1. 如果 $\cos \theta < 0$ ，且 $\tan \theta > 0$ ，则 θ 是（ ）.

- A. 第一象限的角
B. 第二象限的角
C. 第三象限的角
D. 第四象限的角

2. 下列函数中，在 \mathbf{R} 上为奇函数的是（ ）.

- A. $f(x) = \cos x$
B. $f(x) = \sin x$
C. $f(x) = e^x$
D. $f(x) = \lg x$

3. 函数 $f(x) = \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$ 的一个对称中心是（ ）.

- A. $\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$
B. $\left(\frac{\pi}{4}, 0\right)$
C. $\left(-\frac{\pi}{4}, 0\right)$
D. $\left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$

4. 设全集 $U = \mathbf{R}$ ，集合 $A = \left\{x \mid \frac{1}{2} < 2^x < 8\right\}$ ， $B = \{x \mid \ln x > 0\}$ ，则 $A \cap B =$ （ ）.

- A. $(-1, +\infty)$
B. $(-1, 3)$
C. $(1, 3)$
D. $(1, +\infty)$

5. 已知 $a = 2\log_3 2$ ， $b = \log_3 5$ ， $c = \left(\frac{1}{3}\right)^{0.2}$ ，则（ ）.

- A. $c < b < a$
B. $a < b < c$
C. $b < a < c$
D. $c < a < b$

6. 已知 $\frac{\pi}{3} < \alpha < \pi$ ，则“ $\alpha = \frac{\pi}{2}$ ”是“ $\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ”的（ ）.

- A. 充分不必要条件
B. 必要不充分条件
C. 充分必要条件
D. 既不充分也不必要条件

7. 把函数 $y = \cos\left(3x - \frac{\pi}{4}\right)$ 的图像经过怎样的平移可得到函数 $y = \cos 3x$ 的图像（ ）.

- A. 向左平行移动 $\frac{\pi}{4}$ 个单位
B. 向右平行移动 $\frac{\pi}{4}$ 个单位
C. 向左平行移动 $\frac{\pi}{12}$ 个单位
D. 向右平行移动 $\frac{\pi}{12}$ 个单位

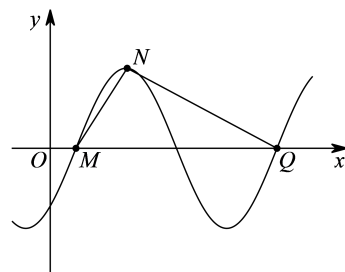
8. 设 $f(x)$ 是定义在 \mathbf{R} 上的函数, 且对任意实数 x , 有 $f(x+7) \cdot f(x) = -1$, 当 $0 \leq x < 7$ 时, $f(x) = \log_2(9-x)$, 则 $f(-100)$ 的值为().
- A. $-\frac{1}{2}$ B. $\frac{1}{2}$ C. -2 D. 2

填空题 (每小题5分, 共30分)

9. 计算: $\log_{\frac{1}{2}} 14 + (-8)^{\frac{2}{3}} = \underline{\hspace{2cm}}$.
10. 当 $x \in \left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\right)$ 时, 函数 $f(x) = \tan x$ 的值域为 $\underline{\hspace{2cm}}$.
11. 角 α 终边上一点的坐标为 $(1, 2)$, 则 $\tan 2\alpha = \underline{\hspace{2cm}}$.
12. 已知 $a > 0$, 则不等式 $ax^2 + (1-a)x - 1 < 0$ 的解集为 $\underline{\hspace{2cm}}$.
13. 若存在 $x > 0$, 使得 $x + \frac{2}{x} - a < 0$, 则实数 a 的取值范围是 $\underline{\hspace{2cm}}$.
14. 已知函数 $y = f(x)$ 是定义在区间 $[a, b]$ 上的增函数, 其中 $a, b \in \mathbf{R}$, 且 $0 < b < -a$. 设函数 $F(x) = |f(x)| - |f(-x)|$, 且 $F(x)$ 不恒等于0, 则下列命题中正确的是 $\underline{\hspace{2cm}}$. (写出所有正确命题的序号)
- ① $F(x)$ 的定义域为 $[-b, b]$;
- ② $F(x)$ 是奇函数;
- ③ $F(x)$ 的最小值为0;
- ④ $F(x)$ 在定义域内单调递增.

解答题 (6小题, 共80分)

15. 已知 $\sin \alpha - \cos \alpha = \frac{1}{2}$, 且 $\alpha \in (0, \pi)$.
- (1) 求 $\cos \alpha$.
- (2) 求 $\frac{\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right)}{\sin 2\alpha + \cos 2\alpha + 1}$ 的值.
16. 已知函数 $f(x) = \sin^2 x + \sqrt{3} \sin x \cos x$.
- (1) 求 $f\left(\frac{3\pi}{4}\right)$.
- (2) 当 $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ 时, 求函数 $f(x)$ 的最值及对应 x 的值.
17. 已知函数 $f(x) = A \sin(\omega x + \varphi)$ ($A > 0, \omega < 0, |\varphi| < \frac{\pi}{2}$)的部分图像如图所示, N 为 $f(x)$ 图像的一个最高点, M 、 Q 为 $f(x)$ 图像与 x 轴的交点.

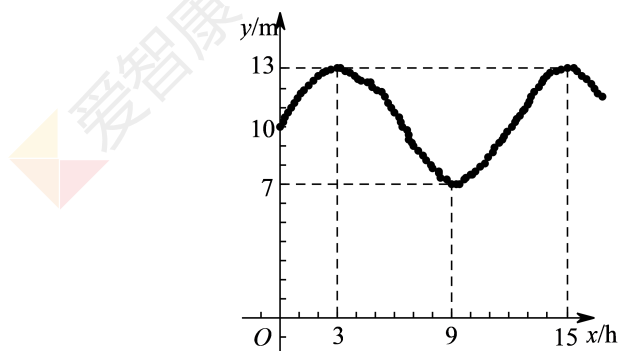


- (1) 若 $M\left(\frac{\pi}{6}, 0\right)$, $N\left(\frac{5\pi}{12}, 3\right)$, 求函数 $f(x)$ 的解析式.
- (2) 在 (1) 的条件下, 求函数 $f(x)$ 的单调递减区间.
- (3) 若 $\triangle MNQ$ 为直角三角形, 求 $A \cdot \omega$ 的值.

18. 某港口的水深 y (单位: m) 是时间 t ($0 \leq t \leq 24$, 单位: h) 的函数, 下面是该港口的水深表:

t	0	...	3	...	9	...	15	...
y	10	...	13	...	7	...	13	...

经过长时间的观察, 描出的曲线如图所示, 已知该曲线可近似的看成函数 $y = A \sin \omega t + B$ 的图像.



- (1) 试根据水深表和曲线, 求 A , ω , B 的值.
- (2) 一般情况下, 船舶航行时船底同海底的距离不少于 4.5m 时是安全的. 如果某船的吃水深度 (船底与水面的距离) 为 7m, 那么该船在什么时间段能够安全进港? 若该船欲当天安全离港, 它在港内停留的时间最多不能超过多长时间? (忽略离港所用的时间) 请说明理由.

19. 已知函数 $f(x) = \ln \frac{x-2}{x+2}$.

- (1) 若 $f(a) = 1$, 求 a 的值.
- (2) 试判断函数 $f(x)$ 的奇偶性, 并证明你的结论.
- (3) 写出方程 $f(x) = \sin x + 2$ 根的个数 (不需证明).

20. 给定函数 $f(x)$, 对于实数 t , 若存在 $a > 0$, $b > 0$, 满足: 对任意的 $x \in [t-a, t+b]$, $|f(x) - f(t)| \leq 2$, 则记 $a+b$ 的最大值为 $H(t)$.

- (1) 是否存在函数 $f(x)$, 使得 $H(t)$ 是 \mathbf{R} 上的常值函数? 试说明理由.
- (2) 若 $f(x) = x^2$, 当 $t \in [1, 2]$ 时,
- ① 求函数 $H(t)$ 的解析式;

②求函数 $H(t)$ 的值域 .

