

2017~2018学年北京朝阳区高一上学期期末数学试卷

选择题（本大题共8小题，每小题5分，共40分）

1. 已知集合 $A = \{x \in \mathbb{Z} | x > 1\}$, $B = \{x | 0 < x < 4\}$, 则 () .

- A. $A \cap B = \{2, 3\}$ B. $A \cup B = \mathbb{R}$
C. $A \cup B = \{1, 2, 3, 4\}$ D. $A \cap B = \emptyset$

2. 已知平面向量 $\vec{a} = (m, 4)$, $\vec{b} = (1, -2)$, 且 $\vec{a} \perp \vec{b}$, 则 $m =$ () .

- A. -8 B. -2
C. 2 D. 8

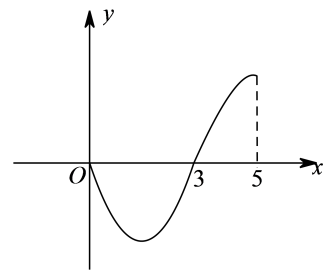
3. 已知 $x, y \in \mathbb{R}$, 且 $x > y > 0$, 则 () .

- A. $\frac{1}{x} - \frac{1}{y} > 0$ B. $\cos x - \cos y > 0$
C. $\left(\frac{1}{2}\right)^x - \left(\frac{1}{2}\right)^y < 0$ D. $\ln x + \ln y > 0$

4. 函数 $f(x) = 3^x + 3x - 8$ 的零点所在的区间为 () .

- A. $(0, 1)$ B. $\left(1, \frac{3}{2}\right)$
C. $\left(\frac{3}{2}, 3\right)$ D. $(3, 4)$

5. 设奇函数 $f(x)$ 的定义域为 $[-5, 5]$, 且 $f(3) = 0$, 当 $x \in [0, 5]$ 时, $f(x)$ 的图象如图所示, 则不等式 $e^{f(x)} < 1$ 的解集是 () .



- A. $(0, 3)$ B. $[-5, -3] \cup (0, 3)$
C. $[-5, -3] \cup (0, 3)$ D. $(-3, 0) \cup (3, 5]$

6. 在 $\triangle ABC$ 中, 若 $\left| \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} \right| < \left| \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} \right|$, 则 $\triangle ABC$ 的形状为 () .

- A. 锐角三角形 B. 等腰三角形
C. 直角三角形 D. 钝角三角形

7. 将函数 $y = \sin 2x$ 图象上的点 $P(t, 1)$ 向右平移 s ($s > 0$) 个单位长度得到点 P' , 若 P' 位于函数 $y = \sin(2x - \frac{\pi}{3})$ 的图象上, 则 () .

A. $t = \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}, s$ 的最小值为 $\frac{\pi}{3}$

B. $t = \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}, s$ 的最小值为 $\frac{\pi}{6}$

C. $t = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}, s$ 的最小值为 $\frac{\pi}{6}$

D. $t = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}, s$ 的最小值为 $\frac{\pi}{3}$

8. 定义域为 $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ 的函数 $f(x)$, 满足 $f(-x) = 2 - f(x)$, 若函数 $y = \sin \omega x + 1$ ($\omega \neq 0$) 与图象的交点为 (x_i, y_i) , $i = 1, 2, 3, \dots, m$ ($m \in \mathbb{N}^*$), 将每一个交点的横、纵坐标之和记为 $t_i, i = 1, 2, 3, \dots, m$ ($m \in \mathbb{N}^*$), 则 $t_1 + t_2 + t_3 + \dots + t_m =$ () .

A. m

B. $\frac{m}{|\omega|}$

C. $2m$

D. $\frac{2m}{|\omega|}$

填空题 (本大题共6小题, 每小题5分, 共30分)

9. 已知 $\sin \alpha = \frac{1}{3}, \alpha \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$, 则 $\cos \alpha =$ _____, $\tan \alpha =$ _____ .

10. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} 2^{-x}, & x \leq 0 \\ \log_2 x, & x > 0 \end{cases}$, 则 $f(-1) =$ _____; 若 $f(x) = \frac{1}{2}$, 则 $x =$ _____ .

11. 已知平面向量 \vec{a}, \vec{b} 的夹角为 $60^\circ, \vec{a} = (1, \sqrt{3}), |\vec{b}| = 1$, 则 $\vec{a} \cdot \vec{b} =$ _____; $|\vec{a} - 2\vec{b}| =$ _____ .

12. 在平面直角坐标系 xOy 中, 角 α 与角 β 均以 x 轴的正半轴为始边, 它们的终边关于 y 轴对称. 若角 α 的终边经过点 $(3, 4)$, 则 $\tan(\alpha - \beta) =$ _____ .

13. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} x^3, & x \leq m \\ x^2, & x > m \end{cases} (m \in \mathbb{R})$,

(1) 若 $m = -1$, 则函数 $f(x)$ 的零点是 _____;

(2) 若存在实数 k , 使函数 $g(x) = f(x) - k$ 有两个不同的零点, 则 m 的取值范围是 _____ .

14. 对任意两个非零的平面向量 m, n , 定义一种运算 “ $*$ ” 为: $m * n = \frac{m \cdot n}{n \cdot n}$. 若平面向量 a, b 的夹角 $\theta \in (0, \frac{\pi}{4})$, 且 $a * b$ 和 $b * a$ 的值均为集合 $\{t | t = \frac{k}{2}, k \in \mathbb{N}^*\}$ 中的元素, 则 $a * b + b * a =$ _____ .

解答题 (本小题共4小题, 共50分)

15. 函数 $f(x) = \frac{\lg(x-1)}{\sqrt{2-x}}$ 的定义域为 A , 关于 x 的不等式 $x^2 - (2a+3)x + a^2 + 3a \leq 0$ 的解集为 B .

(1) 求集合 A .

(2) 若 $A \cap B = A$, 试求实数 a 的取值范围.

16. 已知函数 $f(x) = 2 \sin x \cdot \cos x - \cos^2 x + \sin^2 x$, $x \in \mathbb{R}$.

(1) 求 $f(x)$ 的最小正周期及单调递减区间.

(2) 求 $f(x)$ 在区间 $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ 上的最大值和最小值.

17. 已知二次函数 $f(x)$ 的图象经过 $A(-1, 4)$, $B(-1, 0)$, $C(1, 0)$, $D(3, 0)$ 四个点中的三个.

(1) 求函数 $f(x)$ 的解析式, 并求 $f(x)$ 的最小值.

(2) 求证: 存在常数 m , 使得当实数 x_1, x_2 , 满足 $x_1 + x_2 = m$ 时, 总有 $f(x_1) = f(x_2)$.

18. 函数 $f(x)$ 的定义域为 D , 如果存在实数 a, b 使得 $f(a-x) + f(a+x) = b$ 对任意满足 $a-x \in D$ 且 $a+x \in D$ 的 x 恒成立, 则称 $f(x)$ 为广义奇函数.

(1) 设函数 $f(x) = \frac{1}{x} - 1$, 试判断 $f(x)$ 是否为广义奇函数, 并说明理由.

(2) 设函数 $f(x) = \frac{1}{2^x + t}$, 其中常数 $t \neq 0$, 证明 $f(x)$ 是广义奇函数, 并写出

$\frac{1}{\sqrt[2017]{2} - \sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt[2017]{2^2} - \sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt[2017]{2^3} - \sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt[2017]{2^{2016}} - \sqrt{2}}$ 的值.

(3) 若 $f(x)$ 是定义在 \mathbb{R} 上的广义奇函数, 且函数 $f(x)$ 的图象关于直线 $x = m$ (m 为常数) 对称, 试判断 $f(x)$ 是否为周期函数? 若是, 求出 $f(x)$ 的一个周期, 若不是, 请说明理由.