

选择题 (本大题共12小题, 每小题5分, 共60分)

1. 设 $z = \frac{1-i}{1+i} + 2i$, 则 $|z| = ()$.

A. 0

B. $\frac{1}{2}$

C. 1

D. $\sqrt{2}$

2. 已知集合 $A = \{x | x^2 - x - 2 > 0\}$, 则 $\complement_{\mathbf{R}} A = ()$.

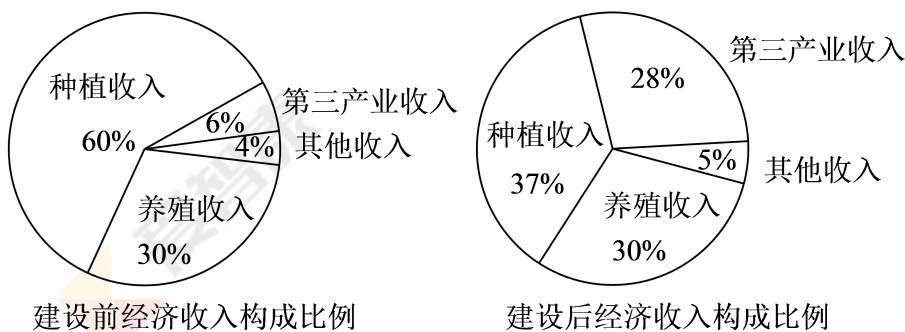
A. $\{x | -1 < x < 2\}$

B. $\{x | -1 \leq x \leq 2\}$

C. $\{x | x < -1\} \cup \{x | x > 2\}$

D. $\{x | x \leq -1\} \cup \{x | x \geq 2\}$

3. 某地区经过一年的新农村建设, 农村的经济收入增加了一倍, 实现翻番, 为更好地了解该地区农村的经济收入变化情况, 统计了该地区新农村建设前后农村的经济收入构成比例, 得到如下饼图: 则下面结论中不正确的是 () .



- A. 新农村建设后, 种植收入减少
- B. 新农村建设后, 其他收入增加了一倍以上
- C. 新农村建设后, 养殖收入增加了一倍
- D. 新农村建设后, 养殖收入与第三产业收入的总和超过了经济收入的一半
4. 记 S_n 为等差数列 $\{a_n\}$ 的前项 n 和, 若 $3S_3 = S_2 + S_4$, $a_1 = 2$, 则 $a_5 = ()$.
- A. -12
- B. -10
- C. 10
- D. 12
5. 设函数 $f(x) = x^3 + (a-1)x^2 + ax$, 若 $f(x)$ 为奇函数, 则曲线 $y = f(x)$ 在点 $(0, 0)$ 处的切线方程为 () .
- A. $y = -2x$
- B. $y = -x$
- C. $y = 2x$
- D. $y = x$

6. 在 $\triangle ABC$ 中, AD 为 BC 边上的中线, E 为 AD 的中点, 则 $\overrightarrow{EB} = ()$.

A. $\frac{3}{4}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{4}\overrightarrow{AC}$

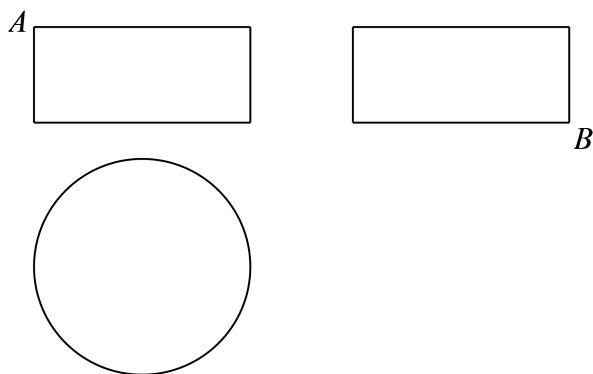
B. $\frac{1}{4}\overrightarrow{AB} - \frac{3}{4}\overrightarrow{AC}$

C. $\frac{3}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AC}$

D. $\frac{1}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{3}{4}\overrightarrow{AC}$

7.

某圆柱的高为2，底面周长为16，其三视图如右图，圆柱表面上的点M在正视图上对应的点为A，圆柱表面上的点N在左视图上的对应点为B，则在此圆柱侧面上，从M到N的路径中，最短路径的长度为（ ）.



- A. $2\sqrt{17}$ B. $2\sqrt{5}$ C. 3 D. 2

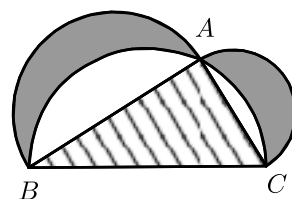
8. 设抛物线 $C: y^2 = 4x$ 的焦点为 F ，过点 $(-2, 0)$ 且斜率为 $\frac{2}{3}$ 的直线与 C 交于 M, N 两点，则 $\overrightarrow{FM} \cdot \overrightarrow{FN} = ()$.

- A. 5 B. 6 C. 7 D. 8

9. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} e^x, & x \leq 0, \\ \ln x, & x > 0, \end{cases}$ $g(x) = f(x) + x + a$ ，若 $g(x)$ 存在2个零点，则 a 的取值范围是（ ）.

- A. $[-1, 0)$ B. $[0, +\infty)$ C. $[-1, +\infty)$ D. $[1, +\infty)$

10. 下图来自古希腊数学家希波克拉底所研究的几何图形. 此图由三个半圆构成，三个半圆的直径分别为直角三角形 ABC 的斜边 BC ，直角边 AB, AC . $\triangle ABC$ 的三边所围成的区域记为 I，黑色部分记为 II，其余部分记为 III. 在整个图形中随机取一点，此点取自 I, II, III 的概率分别为 p_1, p_2, p_3 ，则（ ）.



- A. $p_1 = p_2$ B. $p_1 = p_3$ C. $p_2 = p_3$ D. $p_1 = p_2 + p_3$

11. 已知双曲线 $C: \frac{x^2}{3} - y^2 = 1$ ， O 为坐标原点， F 为 C 的右焦点，过点 F 的直线与 C 的两条渐近线的交点分别为 M, N ，若 $\triangle OMN$ 为直角三角形，则 $|MN| = ()$.

- A. $\frac{3}{2}$ B. 3 C. $2\sqrt{3}$ D. 4

12. 已知正方体的棱长为1，每条棱所在直线与平面 α 所成的角都相等，则 α 截此正方体所得截面面积的最大值为（ ）.

- A. $\frac{3\sqrt{3}}{4}$ B. $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ C. $\frac{3\sqrt{2}}{4}$ D. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

填空题（本大题共4小题，每小题5分，共20分）

13.

若 x, y 满足条件 $\begin{cases} x - 2y - 2 \leq 0, \\ x - y + 1 \geq 0, \\ y \leq 0, \end{cases}$ 则 $z = 3x + 2y$ 的最大值为 _____ .

14. 记 S_n 为数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和. 若 $S_n = 2a_n + 1$, 则 $S_6 =$ _____ .

15. 从2位女生, 4位男生中选3人参加科技比赛, 且至少有1位女生入选, 选法共有 _____ 种. (用数字填写答案)

16. 已知函数 $f(x) = 2\sin x + \sin 2x$, 则 $f(x)$ 的最小值是 _____ .

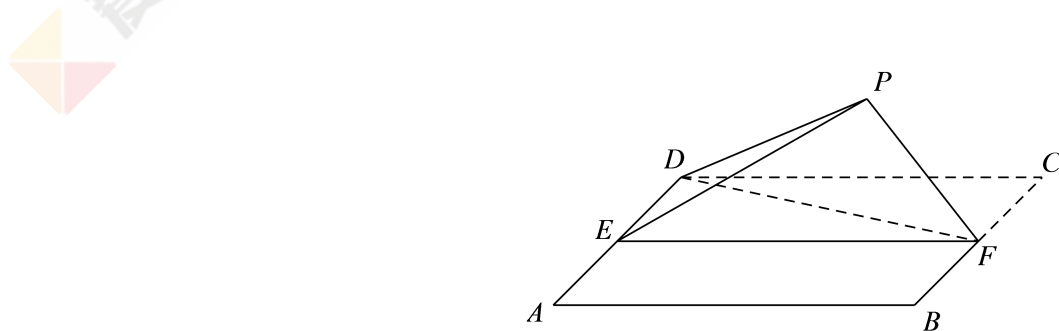
解答题 (本大题共5小题, 共60分)

17. 在平面四边形 $ABCD$ 中, $\angle ADC = 90^\circ$, $\angle A = 45^\circ$, $AB = 2$, $BD = 5$.

(1) 求 $\cos \angle ADB$.

(2) 若 $DC = 2\sqrt{2}$, 求 BC .

18. 如图, 四边形 $ABCD$ 为正方形, E, F 分别为 AD, BC 的中点, 以 DF 为折痕把 $\triangle DFC$ 折起, 使点 C 到达点 P 的位置, 且 $PF \perp BF$.



(1) 证明: 平面 $PEF \perp$ 平面 $ABFD$.

(2) 求 DP 与平面 $ABFD$ 所成角的正弦值.

19. 设椭圆 $C: \frac{x^2}{2} + y^2 = 1$ 的右焦点为 F , 过 F 的直线 l 与 C 交于 A, B 两点, 点 M 的坐标为 $(2, 0)$.

(1) 当 l 与 x 轴垂直时, 求直线 AM 的方程.

(2) 设 O 为坐标原点, 证明: $\angle OMA = \angle OMB$.

20. 某工厂的某种产品成箱包装, 每箱200件, 每一箱产品在交付用户之前要对产品作检验, 如检验出不合格品, 则更换为合格品. 检验时, 先从这箱产品中任取20件作检验, 再根据检验结果决定是否对余下的所有产品作检验. 设每件产品为不合格的概率都为 p ($0 < p < 1$), 且各件产品是否为不合格品相互独立.

(1) 记20件产品中恰有2件不合格品的概率为 $f(p)$, 求 $f(p)$ 的最大值点 p_0 .

(2) 现对一箱产品检验了20件, 结果恰有2件不合格品, 以(1)中确定的 p_0 作为 p 的值. 已知每件产品的检验费用为2元, 若有不合格品进入用户手中, 则工厂要对每件不合格品支付25元的赔偿费用.

① 若不对该箱余下的产品作检验, 这一箱产品的检验费用与赔偿费用的和记为 X , 求 EX .

② 以检验费用与赔偿费用和的期望值作为决策依据，是否该对这箱余下的所有产品作检验？

21. 已知函数 $f(x) = \frac{1}{x} - x + a \ln x$.

(1) 讨论 $f(x)$ 的单调性.

(2) 若 $f(x)$ 存在两个极点 x_1, x_2 , 证明: $\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} < a - 2$.

选做题

解答题 (本大题共2小题, 每题10分, 仅一题计分)

22. 在直角坐标系 xOy 中, 曲线 C_1 的方程为 $y = k|x| + 2$, 以坐标原点为极点, x 轴的正半轴为极轴建立极坐标系, 曲线 C_2 的极坐标方程为 $\rho^2 + 2\rho \cos \theta - 3 = 0$.

(1) 求 C_2 的直角坐标方程.

(2) 若 C_1 与 C_2 有且仅有三个公共点, 求 C_1 的方程.

23. 已知 $f(x) = |x + 1| - |ax - 1|$.

(1) 当 $a = 1$ 时, 求不等式 $f(x) > 1$ 的解集.

(2) 若 $x \in (0, 1)$ 时, 不等式 $f(x) > x$ 成立, 求 a 的取值范围.