南京市 2018-2019 学年度第一学期期末调研测试卷

高二数学（理科） 2019.01

注意事项：

1. 本试卷共 4 页，包括填空题（第 1 题~第 14 题）、解答题（第 15 题~第 20 题）两部分，本试卷满分 160 分，考试时间为 120 分钟
2. 答题前，请务必将自己的姓名、学校、班级、学号写在答题卡的密封线内，试题的答案写在答题卡上对应题目的答案空格内，考试结束后，交回答题卡

一、填空题

1.已知命题 $p:\forall x>0,e^x\geq ex$ ，写出命题 p 的否定：________.

【答案】$\exists x>0,e^x<ex$

【解析】考察命题的否定

2.在平面直角坐标系 xOy 中，抛物线 $y^2=2x$ 的准线方程为____________.

【答案】$x=-\frac{1}{2}$

【解析】由 $y^2=2px(p>0)$ 的准线为 $x=-\frac{p}{2}$，可得 $x=-\frac{1}{2}$

3.已知 $f(x)=e^x\cdot\sin x$，则 $f'(0)$ 的值为________.

【答案】1

【解析】 $f'(x)=\mathrm{e}^x\sin x+e^x\cos x,f'(0)=0+1=1$

4.已知复数 z 满足 $(z-2)i=1+i$(i为虚数单位)，则 z 的实部为________.

【答案】3

【解析】 $z-2=\frac{1+i}{i}=\frac{i+i^2}{i^2}1-i,\therefore z=3-i,$ 所以实部为3

5.在平面直角坐标系 xOy 中，P 是椭圆 $\frac{x^2}{4}+y^2=1$ 上一点，若点 P 到椭圆 C 的右焦点距离为 2，则它到椭圆 C 的右准线的距离为________.

【答案】 $\frac{4\sqrt{3}}{3}$

【解析】$\Theta\ \frac{PF}{d}=e=\frac{\sqrt{3}}{2},PF=2,\therefore d=\frac{4\sqrt{3}}{3}$

6.已知实数 x, y 满足 $\begin{cases} y \le x-1 \\ x \le 3 \\ x+y \ge 2 \end{cases}$ ，则 $z=x+2y$ 的最小值为__________.

【答案】1

【解析】画出可行域，是一个以 $(3,-1)$,$(3,2)$,$\left(\frac{3}{2},\frac{1}{2}\right)$ 为顶点的三角形，$z=x+2y$ 的最小值，即求 $y=-\frac{x}{2}+\frac{z}{2}$ 截距最小值，所以过点 $(3,-1)$ 截距最小，将点 $(3,-1)$ 代入，可得最小值为1

7.在平面直角坐标系 xOy 中，$m>0$ 是方程 $x^2+my^2=1$ 表示椭圆的______条件.（填“充分不必要”，“必要不充分”，“充要”，“既不充分也不必要”）

【答案】必要不充分

【解析】若 $m=1$，则方程表示圆，所以前面推不出后面

若 $x^2+my^2=1$ 表示椭圆，由椭圆方程 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}$ 可得 $m>0$，所以后面推出前面，所以是必要不充分条件。

8.在平面直角坐标系 xOy 中，双曲线 $\frac{x^2}{4}-y^2=1$ 的顶点到它的渐近线的距离为_______.

【答案】$\frac{2\sqrt{5}}{5}$

【解析】双曲线顶点为 $(\pm 2,0)$，渐近线为 $y=\pm\frac{1}{2}x$，由对称性可得 $d=\frac{\left|0-\frac{1}{2}\cdot 2\right|}{\sqrt{1+\frac{1}{2}}}=\frac{2\sqrt{5}}{5}$

9.在平面直角坐标系 xOy 中，点 $A(4,0)$ 点 $B(0,2)$ 平面内点 P 满足 $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}=15$ 则 PO 的最大值是________.

【答案】$3\sqrt{5}$

【解析】Θ $A(4,0)$, $B(0,2)$, 设点 $P(x,y)$, $\therefore \overrightarrow{PA}=(4-x,-y)$, $\overrightarrow{PB}=(-x,2-y)$, Θ $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}=15$，可得 $(4-x)\cdot(-x)+(2-y)\cdot(-y)=15$，即 $(x-2)^2+(y-1)^2=20$，说明点 P 在这个圆上，Θ $O(0,0)$ 在圆内，所以 PO 最大值为 $\sqrt{(2-0)^2+(1-0)^2}+2\sqrt{5}=3\sqrt{5}$

10.在平面直角坐标系 xOy 中，点 F_1, F_2 分别是 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的左右焦点，过点 F_2 且与 x 轴垂直的直线与椭圆交于 A, B 两点，若 $\angle AF_1B$ 为锐角，则该椭圆的离心率的取值范围

是__________.

【答案】$\left(\sqrt{2}-1,1\right)$

【解析】$\Theta\ \angle AF_1B$ 为锐角，由对称性可知 $\angle AF_1F_2 < 45^\circ$，即 $\tan\angle AF_1F_2 < \tan 45^\circ = 1$，

即 $\dfrac{AF_2}{F_1F_2} < 1$，Θ A 的横坐标为 c，代入椭圆可得 A 的纵坐标为 $\dfrac{b^2}{a}$，所以 $AF_2 = \dfrac{b^2}{a}, F_1F_2 = 2c$，

即 $\dfrac{b^2}{a} < 2c, b^2 < 2ac, a^2 - c^2 < 2c, 1 - e^2 < 2e$，解得 $e > \sqrt{2}$ -1，又 $0 < e < 1$，

所以 $\sqrt{2} - 1 < e < 1$

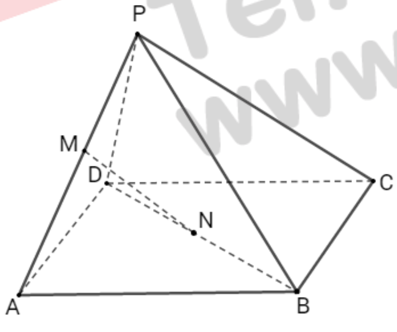
11.在平面直角坐标系 xOy 中，圆 $C_1:(x-a)^2+(y-a-2)^2=1$ 与圆 $C_2: x^2+y^2-2x-3=0$ 有公共点，则实数 a 的取值范围是________.

【答案】$[-2,1]$

【解析】由题知：$C_1(a,a+2), r_1=1; C_2(1,0), r_2=2$，又因为圆 C_1 与圆 C_2 有交点，则两圆的位置关系为相交、外切或内切，则有 $1\le\sqrt{(a-1)^2+(a+2)^2}\le 3$，解得 $-2\le a\le 1$，则 a 的取值范围为 $[-2,1]$。

【考点】两圆的位置关系。

12.如图，在正四棱锥 $P-ABCD$ 中，$PA=AB$，点 M 为 PA 的中点，$\overrightarrow{BD}=\lambda\overrightarrow{BN}$.若 $MN\perp AD$，则实数 $\lambda=$__________.



【答案】4

【解析】连接 AC 交 BD 于 O 点，分别以 OA、OB、OP 为 x、y、z 轴，建立空间直角坐标系，

设 $PA=AB=2a$，则 $A\left(\sqrt{2}a,0,0\right), D\left(0,-\sqrt{2}a,0\right), B\left(0,\sqrt{2}a,0\right), M\left(\dfrac{\sqrt{2}a}{2},0,\dfrac{\sqrt{2}a}{2}\right)$，又因为

$\overrightarrow{BD}=\lambda\overrightarrow{BN}$，则 $N\left(0,\left(\frac{\lambda-2}{\lambda}\right)\sqrt{2}a,0\right)$，$\overrightarrow{MN}=\left(-\frac{\sqrt{2}a}{2},\left(\frac{\lambda-2}{\lambda}\right)\sqrt{2}a,-\frac{\sqrt{2}a}{2}\right)$，

$\overrightarrow{AD}=\left(-\sqrt{2}a,-\sqrt{2}a,0\right)$，由 $MN\perp AD$, 有 $\overrightarrow{MN}\cdot\overrightarrow{AD}=0$,解得 $\lambda=4$。

【考点】空间直角坐标系，两直线垂直，向量机为零即可。

13.在平面直角坐标系 xOy 中，圆 $M:(x-1)^2+y^2=1$，点 $A(3,1)$，P 为抛物线 $y^2=2x$ 上任意一点（异于原点），过点 P 作圆 M 的切线 PB，B 为切点，则 $PA+PB$ 的最小值是__________.

【答案】3

【解析】设 $P(x_0,y_0)$，其中 ${y_0}^2=2x_0$，$PB=\sqrt{(x_0-1)^2+{y_0}^2-1}=|x_0|$，

$PA=\sqrt{(x_0-3)^2+(y_0-1)^2}$，则 $PA+PB$ 表示 P 到 A 与到 y 轴的距离和，则最小值为 3.

【考点】切线长的表示以及其几何意义，难度一般。

14.已知函数 $f(x)=x^3-3a^2x-6a^2+4a\,(a>0)$，只有一个零点，且这个零点为正数，则实数 a 的取值范围是___________.

【答案】$(1,2)$

【解析】$f'(x)=3x^2-3a^2\,(a>0)$，令 $f'(x)=0$，得 $x=\pm a$，根据图像可知在区间 $(-\infty,a),(a,+\infty)$，$f'(x)>0$，在区间 $(-a,a)$，$f'(x)<0$，则函数 $f(x)$ 的增区间为 $(-\infty,a),(a,+\infty)$，减区间为 $(-a,a)$，又因 $f(x)$ 只有一个零点，且为正数，需满足 $f(-a)<0$，解得 $1<a<2$，则 a 的取值范围为 $(1,2)$

【考点】三次函数导数问题，结合图像解题。

二、解答题

15.（本小题满分 14 分）

在平面直角坐标系 xOy 中，已知椭圆 $E:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 经过点 $A(4,0)$，其离心率为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

（1）求椭圆 E 的方程;

（2）已知 P 是椭圆 E 上一点，F_1，F_2 为椭圆 E 的焦点，且 $\angle F_1PF_2=\frac{\pi}{2}$，求点 P 到 y 轴的距离.

【答案】(1) $\frac{x}{16}+\frac{y}{4}=1$；(2) $\frac{8}{4\sqrt{3}}=\frac{2}{3}\sqrt{3}$

【解析】(1) 由 $\begin{cases} a=4 \\ e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{3}}{2} \\ a^2=b^2+c^2 \end{cases}$，得 $\begin{cases} a=4 \\ b=2 \end{cases}$

$\therefore$椭圆方程为 $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{4}=1$

(2) 由 $\begin{cases} |PF_1|^2+|PF_2|^2=|F_1F_2|^2=48 \\ |PF_1|+|PF_2|=8 \end{cases}$ 得 $|PF_1|\cdot|PF_2|=8$

$\therefore$点 P 到 x 轴的距离为 $\frac{8}{4\sqrt{3}}=\frac{2}{3}\sqrt{3}$

代入椭圆方程得：$x=\pm\frac{4\sqrt{6}}{3}$

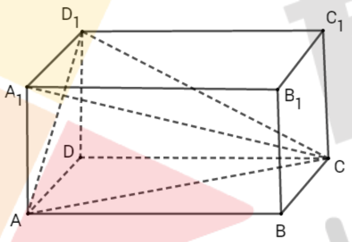
$\therefore$点 P 到 y 轴的距离为 $\frac{4\sqrt{6}}{3}$

16.（本小题满分 14 分）

如图，正四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的底面边长为 $\sqrt{2}$，侧棱长为 1，求：

(1) 直线 A_1C 与直线 AD_1 所成角的余弦值；

(2) 平面 D_1AC 与平面 ABB_1A_1 所成二面角的正弦值.



【答案】(1) $\frac{\sqrt{15}}{15}$；(2) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

【解析】(1) 以 D 为原点建立空间直角坐标系

$\overrightarrow{A_1C}=\left(-\sqrt{2},\sqrt{2},-1\right)$，$\overrightarrow{AD_1}=\left(-\sqrt{2},0,1\right)$

$\therefore \cos\left\langle \overrightarrow{A_1C},\overrightarrow{AD_1}\right\rangle=\frac{\left|\overrightarrow{A_1C}\cdot\overrightarrow{AD_1}\right|}{\left|\overrightarrow{A_1C}\right|\cdot\left|\overrightarrow{AD_1}\right|}=\frac{\sqrt{15}}{15}$

(2) $\overrightarrow{AC}=\left(-\sqrt{2},\sqrt{2},0\right)$，设 $\vec{n}=(x,y,z)$ 为平面 D_1AC 的一个法向量

则 $\begin{cases} \overrightarrow{AD_1}\cdot\vec{n}=-\sqrt{2}x+z=0 \\ \overrightarrow{AC}\cdot\vec{n}=-\sqrt{2}x+\sqrt{2}y=0 \end{cases}$，取 $\vec{n}=\left(1,1,\sqrt{2}\right)$

$\therefore \cos\left\langle \overrightarrow{DA},\vec{n}\right\rangle=\frac{\left|\overrightarrow{DA}\cdot\vec{n}\right|}{\left|\overrightarrow{DA}\right|\cdot\left|\vec{n}\right|}=\frac{1}{2}$

∴平面 D_1AC 与平面 ABB_1A_1 所成二面角的正弦值为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$

17.（本小题满分 14 分）

在平面直角坐标系 xOy 中，已知圆 C 经过抛物线 $y=x^2-x-6$ 与坐标轴的三个交点.

（1）求圆 C 的方程;

（2）经过点 $P(-2,5)$ 的直线 l 与圆 C 相交于 A， B 两点，若圆 C 在 A， B 两点处的切线相互垂直，求直线 l 的方程.

【答案】（1） $x^2+y^2-x+5y-6=0$；（2） $3y+4x-7=0$

【解析】（1）三个交点分别为 $(3,0),(-2,0),(0,-6)$，

带入圆的一般方程 $x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$，得

$x^2+y^2-x+5y-6=0$

（2）圆的标准方程为 $\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(y+\frac{5}{2}\right)^2=\frac{25}{2}$ ，

设两条切线交点为 Q，

∵ $AQ\perp CA, BQ\perp CB$ ，

∴ $CA\perp CB$

□四边形 $CAQB$ 是正方形

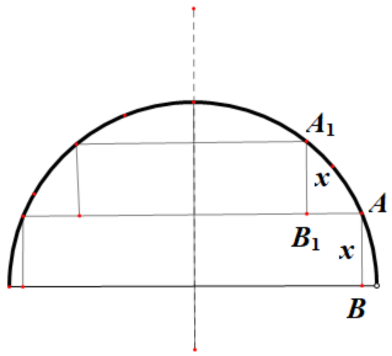
当 k 不存在，不符合

当 k 存在，设直线方程为 $y-5=k(x+2)$

$$d=\frac{\left|-\frac{5}{2}-5-\frac{k}{2}-2k\right|}{\sqrt{1+k^2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}r \text{，得}$$

$k=-\frac{4}{3}$，直线方程为 $3y+4x-7=0$

18. 如图，从一个面积为15π的半圆形铁皮上截取两个高度均为x的矩形，并将截得的两块矩形铁皮分别以AB，A_1B_1为母线卷成两个高均为x的圆柱（无底面，连接部分材料损失忽略不计）.记这两个圆柱的体积之和为V.



（1）将V表示成x的函数，并写出x的取值范围；

（2）求两个圆柱体积之和V的最大值.

【答案】（1）$V=\dfrac{-5x^3+60x}{\pi},x\in(0,\dfrac{\sqrt{30}}{2})$，（2）$\dfrac{80}{\pi}$

【解析】（1） $S=\dfrac{1}{2}\pi R^2=15\pi$，$\therefore R=\sqrt{30}$

则 $A(\sqrt{30-x^2},x),A_1(\sqrt{30-4x^2},2x)$

$2\sqrt{30-x^2}=2\pi r_1$， $\therefore r_1=\dfrac{\sqrt{30-x^2}}{\pi}$， 同理 $r_2=\dfrac{\sqrt{30-4x^2}}{\pi}$

$\therefore V=V_1+V_2=\pi r_1^{\,2}\cdot x+\pi r_2^{\,2}\cdot x=\dfrac{-5x^3+60x}{\pi},x\in(0,\dfrac{\sqrt{30}}{2})$

（2） $V'=\dfrac{-15x^2+60}{\pi}$ ，令$V'=0,x=2$

$V(x)$在$(0,2)$递增，$\left(2,\dfrac{\sqrt{30}}{2}\right)$递减。

$\therefore V_{\max}=V(2)=\dfrac{80}{\pi}$

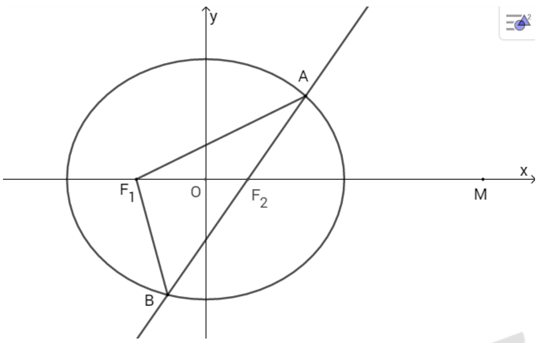
答：当高度为 2 时，体积最大，最大为$\dfrac{80}{\pi}$.

19. 如图，在平面直角坐标系 xOy 中，F_1，F_2 分别为椭圆 $C:\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$ 的左右焦点，动直线 l 过 F_2，且与椭圆 C 相交于 A,B 两点（直线 l 与 x 轴不重合）.

（1）若点 A 的坐标为 $(0,\sqrt{3})$，求点 B 坐标；

（2）点 $M(4,0)$，设直线 AM,BM 的斜率分别为 k_1,k_2，求证：$k_1+k_2=0$；

（3）求 ΔAF_1B 面积最大时的直线 l 的方程.



【答案】（1）$(\dfrac{8}{5},-\dfrac{3\sqrt{3}}{5})$；（2）略；（3） $x=1$

【解析】

（1）点 $A(0,\sqrt{3})$，过点 A,F_2 的直线方程为 $y=-\sqrt{3}(x-1)$

与椭圆联立，得 $5x^2-8x=0$，解得 $x=\dfrac{8}{5}$ 或 $x=0$

所以点 B 的坐标为 $(\dfrac{8}{5},-\dfrac{3\sqrt{3}}{5})$

（2）设直线 l 斜率为 k，点 $A(x_1,y_1)$，点 $B(x_2,y_2)$，

则直线方程为 $y=k(x-1)$

联立椭圆方程，得 $(4k^2+3)x^2-8k^2x+4(k^2-3)=0$

$$\begin{cases} x_1+x_2=\dfrac{8k^2}{4k^2+3} \\ x_1x_2=\dfrac{4(k^2-3)}{4k^3+3} \end{cases}$$

$$k_1+k_2=\frac{y_1}{x_1-4}+\frac{y_2}{x_2-4}=\frac{k(x_1-1)(x_2-4)+k(x_2-1)(x_1-4)}{(x_1-4)(x_2-4)}$$

$$(x_1-1)(x_2-4)+(x_2-1)(x_1-4)=2x_1x_2-5(x_1+x_2)+8=0$$

$\therefore k_1+k_2=0$

（3）当 k 存在时，

$$S_{\Delta AF_1B}=\frac{1}{2}\cdot F_1F_2\cdot|y_1-y_2|=|k(x_1-x_2)|$$

$$|k(x_1-x_2)|^2=k^2[(x_1+x_2)^2-4x_1x_2]=\frac{144k^2(k^2+1)}{(4k^2+3)^2}$$

令 $t=k^2$， $g(t)=\frac{t(t+1)}{(4t+3)^2}$， $g'(t)=\frac{2t+3}{(4t+3)^3}>0$，所以 $g(t)$ 单增

$g(t)=\frac{1}{16}-\frac{1}{16}\frac{8t+9}{(4t+3)^2}<\frac{1}{16}$， $S_{\Delta AF_1B}<3$

当 k 不存在时， $S_{\Delta AF_1B}=3$，此时 $x=1$

所以面积最大时 l 的方程为 $x=1$.

【点评】主要考察直线与圆的位置关系，韦达定理的运用，以及三角形面积最值问题，需要结合导数工具进行求解，计算量较大。

20. 已知函数 $f(x)=a\ln x+\frac{1}{x}$， $a\in R$.

（1）若 $a=2$，且直线 $y=x+m$ 是曲线 $y=f(x)$ 的一条切线，求实数 m 的值；

（2）若不等式 $f(x)>1$ 对任意 $x\in(1,+\infty)$ 恒成立，求 a 的取值范围；

（3）若函数 $h(x)=f(x)-x$ 有两个极值点 x_1,x_2（ $x_1<x_2$ ），且 $h(x_2)-h(x_1)\le\frac{4}{e}$，求 a 的取值范围.

【答案】（1） $m=0$；（2） $a\ge1$；（3） $2<a\le e+\frac{1}{e}$

【解析】（1）因为 $f(x)=2\ln x+\frac{1}{x}$，

由 $f'(x)=\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}=1$ ，解得 $x=1$，解得切点 $(1,1)$，带入直线得 $m=0$

（2）由题意得： $f(x)=a\ln x+\frac{1}{x}>1$ 对 $x\in(1,+\infty)$ 恒成立

$$f'(x)=\frac{a}{x}-\frac{1}{x^2}=\frac{ax-1}{x^2}$$

①当 $a\le0$ 时， $f'(x)<0$， $f(x)<f(1)=1$，不合题意；

②当 $a>0$ 时，由 $f'(x)=0$ 得， $x=\frac{1}{a}$

（i）当 $0<\frac{1}{a}\le1$，即 $a\ge1$ 时， $f(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递增，

$f(x)>f(1)=1$，符合题意；

（ii）当$\dfrac{1}{a}>1$时，因为$f\left(\dfrac{1}{a}\right)<f(1)=1$，不合题意。

综上：$a\geq 1$

（3）$h'(x)=\dfrac{a}{x}-\dfrac{1}{x^2}-1=\dfrac{ax-1-x^2}{x^2}$，

所以x_1,x_2是方程$x^2-ax+1=0$的两根，

$a>2,\ x_1x_2=1, x_1=\dfrac{1}{x_2}$

因为$h(x_2)-h(x_1)\leq\dfrac{4}{e}$，化简得$a\leq\dfrac{\dfrac{2}{e}+x_2-\dfrac{1}{x_2}}{\ln x_2}\ (x_2>1)$

设$s(x)=\dfrac{\dfrac{2}{e}+x-\dfrac{1}{x}}{\ln x}$，

$$s'(x)=\frac{\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right)\ln x-\dfrac{2}{ex}-1+\dfrac{1}{x^2}}{(\ln x)^2}$$

易得$s'(e)=0$，$s(x)$在$(1,e)$上单减，在$(e,+\infty)$单增，

所以$2<a\leq e+\dfrac{1}{e}$.