

南京市 2018-2019 学年度第一学期期末调研测试卷

高二数学（文科）

2019.01

注意事项：

- 本试卷共 4 页，包括填空题（第 1 题~第 14 题）、解答题（第 15 题~第 20 题）两部分，本试卷满分 160 分，考试时间为 120 分钟
- 答题前，请务必将自己的姓名、学校、班级、学号写在答题卡的密封线内，试题的答案写在答题卡上对应题目的答案空格内，考试结束后，交回答题卡

一、填空题

1. 已知命题 $p: \forall x > 0, e^x \geq ex$ ，写出命题 p 的否定：_____.

【答案】 $\exists x > 0, e^x < ex$

【解析】考察命题的否定

2. 在平面直角坐标系 xOy 中，抛物线 $y^2 = 2x$ 的准线方程为_____.

【答案】 $x = -\frac{1}{2}$

【解析】由 $y^2 = 2px (p > 0)$ 的准线为 $x = -\frac{p}{2}$ ，可得 $x = -\frac{1}{2}$

3. 已知 $f(x) = e^x \cdot \sin x$ ，则 $f'(0)$ 的值为_____.

【答案】1

【解析】 $f'(x) = e^x \sin x + e^x \cos x, f'(0) = 0 + 1 = 1$

4. 已知复数 z 满足 $(z-2)i = 1+i$ (i 为虚数单位)，则 z 的实部为_____.

【答案】3

【解析】 $z-2 = \frac{1+i}{i} = \frac{i+i^2}{i^2} = 1-i, \therefore z = 3-i$ ，所以实部为 3

5. 在平面直角坐标系 xOy 中， P 是椭圆 $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ 上一点，若点 P 到椭圆 C 的右焦点距离为 2，则它到椭圆 C 的右准线的距离为_____.

【答案】 $\frac{4\sqrt{3}}{3}$

【解析】 $\Theta \frac{PF}{d} = e = \frac{\sqrt{3}}{2}, PF = 2, \therefore d = \frac{4\sqrt{3}}{3}$

6. 已知实数 x, y 满足 $\begin{cases} y \leq x - 1 \\ x \leq 3 \\ x + y \geq 2 \end{cases}$, 则 $z = x + 2y$ 的最小值为_____.

【答案】 1

【解析】 画出可行域, 是一个以 $(3, -1), (3, 2), \left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right)$ 为顶点的三角形, $z = x + 2y$ 的最小值, 即

求 $y = -\frac{x}{2} + \frac{z}{2}$ 截距最小值, 所以过点 $(3, -1)$ 截距最小, 将点 $(3, -1)$ 代入, 可得最小值为 1

7. 在平面直角坐标系 xOy 中, $m > 0$ 是方程 $x^2 + my^2 = 1$ 表示椭圆的_____条件. (填“充分不必要”, “必要不充分”, “充要”, “既不充分也不必要”)

【答案】 必要不充分

【解析】 若 $m=1$, 则方程表示圆, 所以前面推不出后面

若 $x^2 + my^2 = 1$ 表示椭圆, 由椭圆方程 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 可得 $m > 0$, 所以后面推出前面, 所以是必要不充分条件。

8. 在平面直角坐标系 xOy 中, 双曲线 $\frac{x^2}{4} - y^2 = 1$ 的顶点到它的渐近线的距离为_____.

【答案】 $\frac{2\sqrt{5}}{5}$

【解析】 双曲线顶点为 $(\pm 2, 0)$, 渐近线为 $y = \pm \frac{1}{2}x$, 由对称性可得 $d = \frac{\left|0 - \frac{1}{2} \cdot 2\right|}{\sqrt{1 + \frac{1}{4}}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$

9. 已知函数 $f(x) = \frac{e^x}{x} + a$ 在 $(0, +\infty)$ 上的最小值为 $2e$, 则实数 a 的值为_____

【答案】 e

【解析】 $f'(x) = \frac{e^x \cdot x - e^x}{x^2}$

$$f'(x) = 0, x = 1$$

$(0, 1)$ 递减, $(1, +\infty)$ 递增

$$f(x)_{\min} = f(1) = e + a,$$

$$\therefore a = e$$

10. 在平面直角坐标系 xOy 中, 点 $A(4, 0)$ 点 $B(0, 2)$ 平面上点 P 满足 $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB} = 15$ 则 PO 的最大值是_____.

【答案】 $3\sqrt{5}$

【解析】 $\Theta A(4,0), B(0,2)$, 设点 $P(x, y)$, $\therefore \overrightarrow{PA} = (4-x, -y), \overrightarrow{PB} = (-x, 2-y)$, $\Theta \overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB} = 15$, 可得 $(4-x) \cdot (-x) + (2-y) \cdot (-y) = 15$, 即 $(x-2)^2 + (y-1)^2 = 20$, 说明点 P 在这个圆上, $\Theta O(0,0)$ 在圆内, 所以 PO 最大值为 $\sqrt{(2-0)^2 + (1-0)^2} + 2\sqrt{5} = 3\sqrt{5}$

11. 在平面直角坐标系 xOy 中, 点 F_1, F_2 分别是椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的左、右焦点, 过点 F_2 且与 x 轴垂直的直线与椭圆交于 A, B 两点, 若 $\angle AF_1B = 90^\circ$, 则该椭圆的离心率的值为 _____

【答案】 $\sqrt{2}-1$

【解析】 $A\left(c, \frac{b^2}{a}\right), B\left(c, -\frac{b^2}{a}\right)$

∇F_1AB 是等腰直角三角形

$$\therefore 2c = \frac{b^2}{a}, \text{ 化简得,}$$

$$e = \sqrt{2} - 1$$

12. 在平面直角坐标系 xOy 中, 圆 $C_1: (x-a)^2 + (y-a-2)^2 = 1$ 与圆 $C_2: x^2 + y^2 - 2x - 3 = 0$ 有公共点, 则实数 a 的取值范围是 _____.

【答案】 $[-2, 1]$

【解析】由题知: $C_1(a, a+2), r_1=1; C_2(1, 0), r_2=2$, 又因为圆 C_1 与圆 C_2 有交点, 则两圆的位置关系为相交、外切或内切, 则有 $1 \leq \sqrt{(a-1)^2 + (a+2)^2} \leq 3$, 解得 $-2 \leq a \leq 1$, 则 a 的取值范围为 $[-2, 1]$ 。

【考点】两圆的位置关系。

13. 在平面直角坐标系 xOy 中, 圆 $M: (x-1)^2 + y^2 = 1$, 点 $A(3, 1)$, P 为抛物线 $y^2 = 2x$ 上任意

一点(异于原点),过点P作圆M的切线PB,B为切点,则PA+PB的最小值是_____.

【答案】3

【解析】设 $P(x_0, y_0)$, 其中 $y_0^2 = 2x_0$, $PB = \sqrt{(x_0 - 1)^2 + y_0^2 - 1} = |x_0|$,

$PA = \sqrt{(x_0 - 3)^2 + (y_0 - 1)^2}$, 则 $PA + PB$ 表示P到A与到y轴的距离和, 则最小值为3.

【考点】切线长的表示以及其几何意义, 难度一般。

14. 已知函数 $f(x) = x^3 - 3a^2x - 6a^2 + 4a(a > 0)$, 只有一个零点, 且这个零点为正数, 则实数a的取值范围是_____.

【答案】(1,2)

【解析】 $f'(x) = 3x^2 - 3a^2(a > 0)$, 令 $f'(x) = 0$, 得 $x = \pm a$, 根据图像可知在区间

$(-\infty, a), (a, +\infty)$, $f'(x) > 0$, 在区间 $(-a, a)$, $f'(x) < 0$, 则函数 $f(x)$ 的增区间为

$(-\infty, a), (a, +\infty)$, 减区间为 $(-a, a)$, 又因 $f(x)$ 只有一个零点, 且为正数, 需满足

$f(-a) < 0$, 解得 $1 < a < 2$, 则a的取值范围为(1,2)

【考点】三次函数导数问题, 结合图像解题。

二、解答题

15. (本小题满分14分)

已知复数 $z_1 = m - 2i$, 复数 $z_2 = 1 - ni$, 其中i是虚数单位, m,n为实数

(1) 若 $n=1$, z_1 为纯虚数, 求 $|z_1 + z_2|$ 的值

(2) 若 $z_1 = \overline{z_2}^2$, 求m,n的值

【答案】(1) $\sqrt{10}$; (2) $n=-1, m=0$

【解析】(1) Θz_1 为纯虚数, $\Theta m=0$, $|z_1 + z_2| = |-2i + 1 - i| = |1 - 3i| = \sqrt{1+9} = \sqrt{10}$

(2) $\Theta z_1 = \overline{z_2}^2 \therefore m - 2i = (1 + ni)^2 = 1 + 2ni + n^2i^2 = 1 - n^2 + 2ni$, 即 $\begin{cases} m = 1 - n^2 \\ -2 = 2n \end{cases}$, 可得

$$n = -1, m = 0$$

16. (本小题满分14分)

在平面直角坐标系 xOy 中, 已知椭圆 $E: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1(a > b > 0)$ 经过点 $A(4, 0)$, 其离心率为

$$\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

(1) 求椭圆 E 的方程;

(2) 已知 P 是椭圆 E 上一点, F_1, F_2 为椭圆 E 的焦点, 且 $\angle F_1PF_2 = \frac{\pi}{2}$, 求点 P 到 y 轴的距离.

【答案】(1) $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1$; (2) $\frac{4}{3}\sqrt{6}$

【解析】(1) 由 $\begin{cases} a=4 \\ e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{3}}{2} \\ a^2=b^2+c^2 \end{cases}$, 得 $\begin{cases} a=4 \\ b=2 \\ c=2\sqrt{3} \end{cases}$

\therefore 椭圆方程为 $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1$

(2) 由 $\begin{cases} |PF_1|^2 + |PF_2|^2 = |F_1F_2|^2 = 48 \\ |PF_1| + |PF_2| = 8 \end{cases}$ 得 $|PF_1| \cdot |PF_2| = 8$

\therefore 点 P 到 x 轴的距离为 $\frac{8}{4\sqrt{3}} = \frac{2}{3}\sqrt{3}$

代入椭圆方程得: $x = \pm \frac{4\sqrt{6}}{3}$

\therefore 点 P 到 y 轴的距离为 $\frac{4\sqrt{6}}{3}$

17. (本小题满分 14 分)

在平面直角坐标系 xOy 中, 已知圆 C 经过抛物线 $y = x^2 - x - 6$ 与坐标轴的三个交点.

(1) 求圆 C 的方程;

(2) 经过点 $P(-2, 5)$ 的直线 l 与圆 C 相交于 A, B 两点, 若圆 C 在 A, B 两点处的切线相互垂直, 求直线 l 的方程.

【答案】(1) $x^2 + y^2 - x + 5y - 6 = 0$; (2) $3y + 4x - 7 = 0$

【解析】(1) 三个交点分别为 $(3, 0), (-2, 0), (0, -6)$,

带入圆的一般方程 $x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$, 得

$$x^2 + y^2 - x + 5y - 6 = 0$$

(2) 圆的标准方程为 $\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{5}{2}\right)^2 = \frac{25}{2}$,

设两条切线交点为 Q ,

$$\therefore AQ \perp CA, BQ \perp CB,$$

$\therefore CA \perp CB$

\therefore 四边形 $CAQB$ 是正方形

当 k 不存在, 不符合

当 k 存在, 设直线方程为 $y - 5 = k(x + 2)$

$$d = \frac{\left| -\frac{5}{2} - 5 - \frac{k}{2} - 2k \right|}{\sqrt{1+k^2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}r, \text{ 得}$$

$$k = -\frac{4}{3}, \text{ 直线方程为 } 3y + 4x - 7 = 0$$

18. 如图, 从一个面积为 15π 的半圆形铁皮上截取两个高度均为 x 的矩形, 并将截得的两块矩形铁皮分别以 AB , A_1B_1 为母线卷成两个高均

为 x 的圆柱 (无底面, 连接部分材料损失忽略不计). 记这两个圆柱的体积之和为 V .

- (1) 将 V 表示成 x 的函数, 并写出 x 的取值范围;
(2) 求两个圆柱体积之和 V 的最大值.

【答案】(1) $V = \frac{-5x^3 + 60x}{\pi}, x \in (0, \frac{\sqrt{30}}{2})$, (2) $\frac{80}{\pi}$

【解析】(1) $S = \frac{1}{2}\pi R^2 = 15\pi, \therefore R = \sqrt{30}$

则 $A(\sqrt{30-x^2}, x), A_1(\sqrt{30-4x^2}, 2x)$

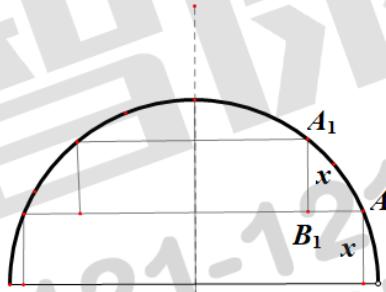
$$2\sqrt{30-x^2} = 2\pi r_1, \therefore r_1 = \frac{\sqrt{30-x^2}}{\pi}, \text{ 同理 } r_2 = \frac{\sqrt{30-4x^2}}{\pi}$$

$$\therefore V = V_1 + V_2 = \pi r_1^2 \cdot x + \pi r_2^2 \cdot x = \frac{-5x^3 + 60x}{\pi}, x \in (0, \frac{\sqrt{30}}{2})$$

$$(2) V' = \frac{-15x^2 + 60}{\pi}, \text{ 令 } V' = 0, x = 2$$

$V(x)$ 在 $(0, 2)$ 递增, $\left(2, \frac{\sqrt{30}}{2}\right)$ 递减。

$$\therefore V_{\max} = V(2) = \frac{80}{\pi}$$



答：当高度为 2 时，体积最大，最大为 $\frac{80}{\pi}$.

19. 已知函数 $f(x) = a \ln x + \frac{1}{x}$, $a \in R$.

- (1) 若 $a=2$, 且直线 $y=x+m$ 是曲线 $y=f(x)$ 的一条切线, 求实数 m 的值;
(2) 若不等式 $f(x)>1$ 对任意 $x \in (1,+\infty)$ 恒成立, 求 a 的取值范围;

【答案】(1) $m=0$; (2) $a \geq 1$; (3) $2 < a \leq e + \frac{1}{e}$

【解析】(1) 因为 $f(x) = 2 \ln x + \frac{1}{x}$,

由 $f'(x) = \frac{2}{x} - \frac{1}{x^2} = 1$, 解得 $x=1$, 解得切点 $(1,1)$, 带入直线得 $m=0$

(2) 由题意得: $f(x) = a \ln x + \frac{1}{x} > 1$ 对 $x \in (1,+\infty)$ 恒成立

$$f'(x) = \frac{a}{x} - \frac{1}{x^2} = \frac{ax-1}{x^2}$$

① 当 $a \leq 0$ 时, $f'(x) < 0$, $f(x) < f(1)=1$, 不合题意;

② 当 $a > 0$ 时, 由 $f'(x)=0$ 得, $x=\frac{1}{a}$

(i) 当 $0 < \frac{1}{a} \leq 1$, 即 $a \geq 1$ 时, $f(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递增,

$f(x) > f(1)=1$, 符合题意;

(ii) 当 $\frac{1}{a} > 1$ 时, 因为 $f\left(\frac{1}{a}\right) < f(1)=1$, 不合题意。

综上: $a \geq 1$

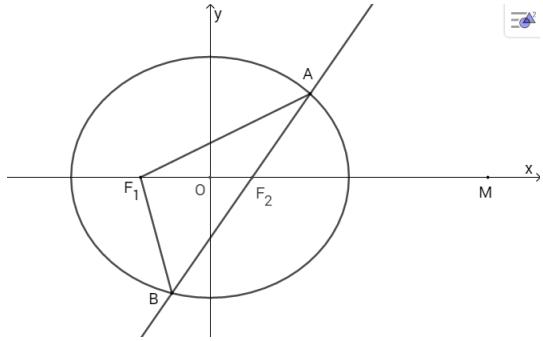
20. 如图, 在平面直角坐标系 xOy 中, F_1 , F_2 分别为椭圆 $C: \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$ 的左右焦点, 动直

线 l 过 F_2 , 且与椭圆 C 相交于 A, B 两点 (直线 l 与 x 轴不重合).

(1) 若点 A 的坐标为 $(0, \sqrt{3})$, 求点 B 坐标;

(2) 点 $M(4,0)$, 设直线 AM, BM 的斜率分别为 k_1, k_2 , 求证: $k_1 + k_2 = 0$;

(3) 求 ΔAF_1B 面积最大时的直线 l 的方程.



【答案】(1) $(\frac{8}{5}, -\frac{3\sqrt{3}}{5})$; (2) 略; (3) $x=1$

【解析】

(1) 点 $A(0, \sqrt{3})$, 过点 A, F_2 的直线方程为 $y = -\sqrt{3}(x-1)$

与椭圆联立, 得 $5x^2 - 8x = 0$, 解得 $x = \frac{8}{5}$ 或 $x = 0$

所以点 B 的坐标为 $(\frac{8}{5}, -\frac{3\sqrt{3}}{5})$

(2) 设直线 l 斜率为 k , 点 $A(x_1, y_1)$, 点 $B(x_2, y_2)$,

则直线方程为 $y = k(x-1)$

联立椭圆方程, 得 $(4k^2 + 3)x^2 - 8k^2x + 4(k^2 - 3) = 0$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = \frac{8k^2}{4k^2 + 3} \\ x_1 x_2 = \frac{4(k^2 - 3)}{4k^2 + 3} \end{cases}$$

$$k_1 + k_2 = \frac{y_1}{x_1 - 4} + \frac{y_2}{x_2 - 4} = \frac{k(x_1 - 1)(x_2 - 4) + k(x_2 - 1)(x_1 - 4)}{(x_1 - 4)(x_2 - 4)}$$

$$(x_1 - 1)(x_2 - 4) + (x_2 - 1)(x_1 - 4) = 2x_1 x_2 - 5(x_1 + x_2) + 8 = 0$$

$$\therefore k_1 + k_2 = 0$$

(3) 当 k 存在时,

$$S_{\Delta AF_1B} = \frac{1}{2} \cdot F_1 F_2 \cdot |y_1 - y_2| = |k(x_1 - x_2)|$$

$$|k(x_1 - x_2)|^2 = k^2[(x_1 + x_2)^2 - 4x_1 x_2] = \frac{144k^2(k^2 + 1)}{(4k^2 + 3)^2}$$

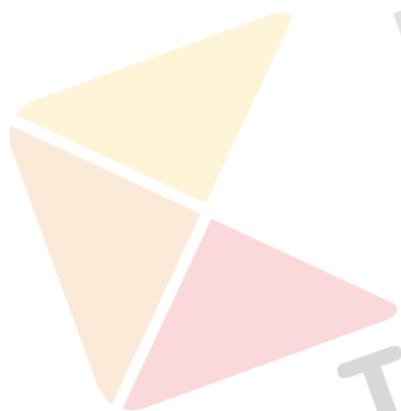
令 $t = k^2$, $g(t) = \frac{t(t+1)}{(4t+3)^2}$, $g'(t) = \frac{2t+3}{(4t+3)^3} > 0$, 所以 $g(t)$ 单增

$$g(t) = \frac{1}{16} - \frac{1}{16} \frac{8t+9}{(4t+3)^2} < \frac{1}{16}, \quad S_{\Delta AF_1B} < 3$$

当 k 不存在时, $S_{\Delta AF_1B} = 3$, 此时 $x = 1$

所以面积最大时 l 的方程为 $x=1$.

【点评】主要考察直线与圆的位置关系，韦达定理的运用，以及三角形面积最值问题，需要结合导数工具进行求解，计算量较大。



爱智康
Tel:4000-121-121
www.izhikang.com