

选择题 (每小题5分, 共40分)

1. 已知 i 是虚数单位, 若 $(m+i)^2 = 3-4i$, 则实数 m 的值为 () .

- A. -2 B. ± 2 C. $\pm\sqrt{2}$ D. 2

2. 在 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c , 若 $C = 2B$, 则 $\frac{c}{b}$ 为 () .

- A. $2\sin C$ B. $2\cos B$ C. $2\sin B$ D. $2\cos C$

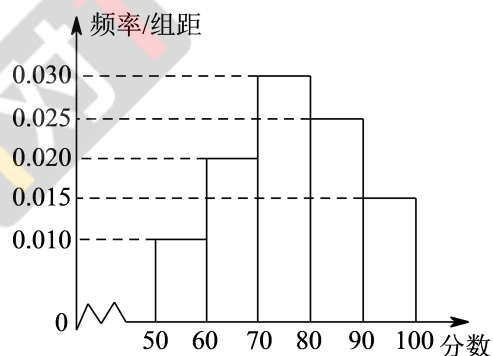
3. 圆 $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 1$ 关于直线 $y = x$ 对称的圆的方程为 () .

- A. $(x-2)^2 + (y-1)^2 = 1$ B. $(x+1)^2 + (y-2)^2 = 1$
C. $(x+2)^2 + (y-1)^2 = 1$ D. $(x-1)^2 + (y+2)^2 = 1$

4. 若函数 $f(x) = \sqrt{x^2 + ax + 1}$ 的定义域为实数集 \mathbf{R} , 则实数 a 的取值范围是 () .

- A. $(-2, 2)$ B. $(-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$
C. $(-\infty, -2] \cup [2, +\infty)$ D. $[-2, 2]$

5. 某中学从某次考试成绩中抽取若干名学生的分数, 并绘制成如图的频率分布直方图. 样本数据分组为 $[50, 60)$, $[60, 70)$, $[70, 80)$, $[80, 90)$, $[90, 100]$. 若用分层抽样的方法从样本中抽取分数在 $[80, 100]$ 范围内的数据16个, 则其中分数在 $[90, 100]$ 范围内的样本数据有 () .



- A. 5个 B. 6个 C. 8个 D. 10个

6. 已知集合 $A = \{x | x \in \mathbf{Z} \text{ 且 } \frac{3}{2-x} \in \mathbf{Z}\}$, 则集合 A 中的元素个数为 () .

- A. 2 B. 3 C. 4 D. 5

7. 设 \vec{a}, \vec{b} 是两个非零向量, 则使 $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}|$ 成立的一个必要非充分条件是 () .

- A. $\vec{a} = \vec{b}$ B. $\vec{a} \perp \vec{b}$ C. $\vec{a} = \lambda \vec{b} (\lambda > 0)$ D. $\vec{a} // \vec{b}$

8. 设 a, b, m 为整数 ($m > 0$), 若 a 和 b 被 m 除得的余数相同, 则称 a 和 b 对模 m 同余, 记为 $a \equiv b \pmod{m}$. 若

$$a = C_{20}^0 + C_{20}^1 \cdot 2 + C_{20}^2 \cdot 2^2 + \cdots + C_{20}^{20} \cdot 2^{20}, \quad a \equiv b \pmod{10}, \quad \text{则 } b \text{ 的值可以是 ()}$$

A. 2011

B. 2012

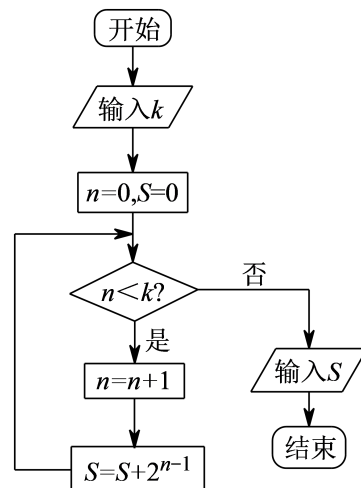
C. 2013

D. 2014

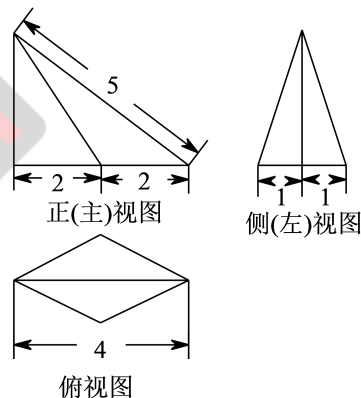
填空题 (每小题5分, 其中9-13题为必做题, 14-15题选做一题, 共30分)

9. 若不等式 $|x - a| < 1$ 的解集为 $\{x | 1 < x < 3\}$, 则实数 a 的值为 _____.

10. 执行如图的程序框图, 若输出 $S = 7$, 则输入 $k (k \in \mathbb{N}^*)$ 的值为 _____.



11. 一个四棱锥的底面为菱形, 其三视图如图所示, 则这个四棱锥的体积是 _____.

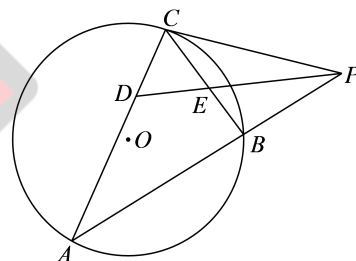


12. 设 α 为锐角, 若 $\cos\left(\alpha + \frac{\pi}{6}\right) = \frac{3}{5}$, 则 $\sin\left(\alpha - \frac{\pi}{12}\right) =$ _____.

13. 在数列 $\{a_n\}$ 中, 已知 $a_1 = 1$, $a_{n+1} = -\frac{1}{a_n + 1}$, 记 S_n 为数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和, 则 $S_{2014} =$ _____.

14. 在极坐标系中, 直线 $\rho(\sin\theta - \cos\theta) = a$ 与曲线 $\rho = 2\cos\theta - 4\sin\theta$ 相交于 A, B 两点, 若 $|AB| = 2\sqrt{3}$, 则实数 a 的值为 _____.

15. 如图, PC 是圆 O 的切线, 切点为 C , 直线 PA 与圆 O 交于 A 、 B 两点, $\angle APC$ 的平分线分别交弦 CA , CB 于 D , E 两点, 已知 $PC = 3$, $PB = 2$, 则 $\frac{PE}{PD}$ 的值为 _____.



解答题 (其中16-17题12分, 18-21题14分, 共80分)

16. 已知函数 $f(x) = \sin x + a \cos x$ 的图象经过点 $(-\frac{\pi}{3}, 0)$.

(1) 求实数 a 的值.

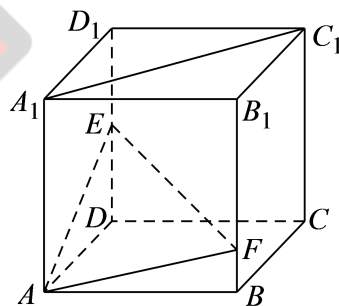
(2) 设 $g(x) = [f(x)]^2 - 2$, 求函数 $g(x)$ 的最小正周期与单调递增区间.

17. 甲, 乙, 丙三人参加某次招聘会, 假设甲能被聘用的概率是 $\frac{2}{5}$, 甲, 丙两人同时不能被聘用的概率是 $\frac{6}{25}$, 乙, 丙两人同时能被聘用的概率是 $\frac{3}{10}$, 且三人各自能否被聘用相互独立.

(1) 求乙, 丙两人各自能被聘用的概率.

(2) 设 ξ 表示甲, 乙, 丙三人中能被聘用的人数与不能被聘用的人数之差的绝对值, 求 ξ 的分布列与均值 (数学期望).

18. 如图, 在棱长为 a 的正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中, 点 E 是棱 D_1D 的中点, 点 F 在棱 B_1B 上, 且满足 $B_1F = 2FB$.



(1) 求证: $EF \perp A_1C_1$.

(2) 在棱 C_1C 上确定一点 G , 使 A , E , G , F 四点共面, 并求此时 C_1G 的长.

(3) 求平面 AEF 与平面 $ABCD$ 所成二面角的余弦值.

19. 已知等差数列 $\{a_n\}$ 的首项为 10, 公差为 2, 等比数列 $\{b_n\}$ 的首项为 1, 公比为 2, $n \in \mathbb{N}^*$.

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 与 $\{b_n\}$ 的通项公式.

(2) 设第 n 个正方形的边长为 $C_n = \min\{a_n, b_n\}$, 求前 n 个正方形的面积之和 S_n . (注: $\min\{a, b\}$ 表示 a 与 b 的最小值.)

20. 已知双曲线 $E: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{4} = 1 (a > 0)$ 的中心为原点 O , 左, 右焦点分别为 F_1, F_2 , 离心率为 $\frac{3\sqrt{5}}{5}$, 点 P 是直线 $x = \frac{a^2}{3}$ 上任意一点, 点 Q 在双曲线 E 上, 且满足 $\overrightarrow{PF_2} \cdot \overrightarrow{QF_2} = 0$.



- (1) 求实数 a 的值.
- (2) 证明: 直线 PQ 与直线 OQ 的斜率之积是定值.
- (3) 若点 P 的纵坐标为 1, 过点 P 作动直线 l 与双曲线右支交于不同两点 M, N , 在线段 MN 上取异于点 M, N 的点 H , 满足 $\frac{|PM|}{|PN|} = \frac{|MH|}{|HN|}$, 证明点 H 恒在一条定直线上.

21. 已知函数 $f(x) = (x^2 - 2x + 1)e^x$ (其中 e 为自然对数的底数).

- (1) 求函数 $f(x)$ 的单调区间.
- (2) 定义: 若函数 $h(x)$ 在区间 $[s, t] (s < t)$ 上的取值范围为 $[s, t]$, 则称区间 $[s, t]$ 为函数 $h(x)$ 的“域同区间”. 试问函数 $f(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 上是否存在“域同区间”? 若存在, 求出所有符合条件的“域同区间”; 若不存在, 请说明理由.

