



7. 采用系统抽样方法从960人中抽取32人做问卷调查, 为此将他们随机编号为1, 2, ..., 960, 分组后在第一组采用简单随机抽样的方法抽到的号码为9. 抽到的32人中, 编号落入区间[1, 450]的人做问卷A, 编号落入区间[451, 750]的人做问卷B, 其余的人做问卷C. 则抽到的人中, 做问卷C的人数为 ( ).

- A. 7                                      B. 9                                      C. 10                                      D. 15

8. 已知函数  $f(x) = 1 + x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots + \frac{x^{2013}}{2013}$  且函数  $f(x)$  的零点均在区间  $[a, b]$  ( $a < b, a, b \in \mathbf{Z}$ ) 内, 圆  $x^2 + y^2 = b - a$  的面积的最小值是 ( ).

- A.  $\pi$                                       B.  $2\pi$                                       C.  $3\pi$                                       D.  $4\pi$

**填空题: 9-13题为必做题, 14-15选做一题, 共30分**

9. 若向量  $\vec{BA} = (2, 3), \vec{CA} = (4, 7)$ , 则  $\vec{BC} =$  \_\_\_\_\_ .

10. 若  $\tan(\pi - \alpha) = 2$ , 则  $\sin 2\alpha =$  \_\_\_\_\_ .

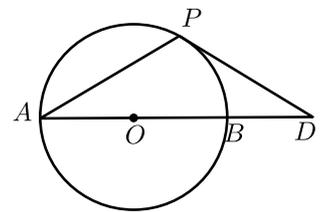
11. 已知变量  $x, y$  满足约束条件  $\begin{cases} x + 2y \geq 1 \\ x - y \leq 1 \\ y - 1 \leq 0 \end{cases}$ , 则  $z = x - 2y$  的最大值为 \_\_\_\_\_ .

12. 若  $(x - \frac{\sqrt{a}}{x^2})^6$  展开式的常数项为60, 则常数  $a$  的值为 \_\_\_\_\_ .

13. 已知奇函数  $f(x) = \begin{cases} 3^x + a(x \geq 0) \\ g(x)(x < 0) \end{cases}$  则  $f(-2)$  的值为 \_\_\_\_\_ .

14. 已知点  $A$  是曲线  $\rho = 2 \cos \theta$  上任意一点, 则点  $A$  到直线  $\rho \sin(\theta + \frac{\pi}{6}) = 4$  的距离的最小值是 \_\_\_\_\_ .

15. 如图,  $D$  是圆  $O$  的直径  $AB$  延长线上一点,  $PD$  是圆  $O$  的切线,  $P$  是切点,  $\angle D = 30^\circ, AB = 4, BD = 2, PA =$  \_\_\_\_\_ .



**解答题 (共6题, 共80分)**

16. 已知函数  $f(x) = \sqrt{3} \sin 2x - \cos 2x$ .

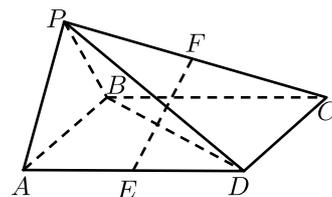
- (1) 求函数  $f(x)$  的最小正周期和最值.
- (2) 求函数  $f(x)$  的单调递减区间.

17. 若盒中装有同一型号的灯泡共10只，其中有8只合格品，2只次品.

- (1) 某工人师傅有放回地连续从该盒中取灯泡3次，每次取一只灯泡，求2次取到次品的概率.
- (2) 某工人师傅用该盒中的灯泡去更换会议室的一只已坏灯泡，每次从中取一灯泡，若是正品则用它更换已坏灯泡，若是次品则将其报废（不再放回原盒中），求成功更换会议室的已坏灯泡所用灯泡只数 $X$ 的分布列和数学期望.

18. 四棱锥 $P-ABCD$ 底面是平行四边形，面 $PAB \perp$ 面 $ABCD$ ,

$$PA = PB = AB = \frac{1}{2}AD, \angle BAD = 60^\circ, EF \text{ 分别为 } AD, PC \text{ 的中点.}$$



- (1) 求证:  $EF \parallel$ 面 $PAB$ .
- (2) 求二面角 $D-PA-B$ 的余弦值.

19. 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 $n$ 项和是 $S_n$ , 且 $S_n + \frac{1}{2}a_n = 1 (n \in \mathbf{N}^*)$ .

- (1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式.
- (2) 设 $b_n = \log_3(1 - S_{n+1}) (n \in \mathbf{N}^*)$ , 求适合方程 $\frac{1}{b_1 b_2} + \frac{1}{b_2 b_3} + \dots + \frac{1}{b_n b_{n+1}} = \frac{25}{51}$ 的正整数 $n$ 的值.

20. 已知左焦点为 $F(-1, 0)$ 的椭圆过点 $E(1, \frac{2\sqrt{3}}{3})$ . 过点 $P(1, 1)$ 分别作斜率为 $k_1, k_2$ 的椭圆的动弦 $AB, CD$ , 设 $M, N$ 分别为线段 $AB, CD$ 的中点.

- (1) 求椭圆的标准方程.
- (2) 若 $P$ 为线段 $AB$ 的中点, 求 $k_1$ .
- (3) 若 $k_1 + k_2 = 1$ , 求证直线 $MN$ 恒过定点, 并求出定点坐标.

21. 已知函数 $f(x) = ax - \ln(1 + x^2)$ .

- (1) 当 $a = \frac{4}{5}$ 时, 求函数 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上的极值.
- (2) 证明: 当 $x > 0$ 时,  $\ln(1 + x^2) < x$ .
- (3) 证明:  $(1 + \frac{1}{2^4})(1 + \frac{1}{3^4}) \dots (1 + \frac{1}{n^4}) < e (n \in \mathbf{N}^*, n \geq 2, e \text{ 为自然对数的底数})$ .