选择题（每小题5分，共40分）

1. 复数$z=\dfrac{\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}}$（其中i为虚数单位）的虚部是（ ）．

A. $-\dfrac{1}{2}$　　B. $\dfrac{1}{2}\mathrm{i}$　　C. $\dfrac{1}{2}$　　D. $-\dfrac{1}{2}\mathrm{i}$

2. 已知集合$A=\{y|y=|x|-1,x\in\mathbf{R}\}$，$B=\{x|x\geqslant 2\}$，则下列结论正确的是（ ）．

A. $-3\in A$　　B. $3\notin B$　　C. $A\cap B=B$　　D. $A\cup B=B$

3. 某学校高一、高二、高三年级的学生人数分别为900、900、1200人，现用分层抽样的方法从该校高中三个年级的学生中抽取容量为50的样本，则应从高三年级抽取的学生人数为（　）．

A. 15　　B. 20　　C. 25　　D. 30

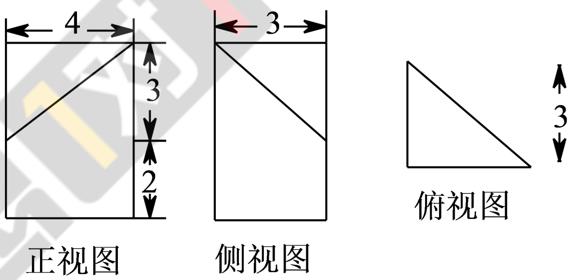
4. 已知等差数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，若$a_4=18-a_5$，则$S_8=$（ ）．

A. 18　　B. 36　　C. 54　　D. 72

5. 在二项式$\left(x^2-\dfrac{1}{x}\right)^5$的展开式中，含$x^4$的项的系数是（ ）．

A. 10　　B. -10　　C. -5　　D. 20

6. 若某几何体的三视图如右图所示,则此几何体的体积等于（ ）．



A. 30　　B. 12　　C. 24　　D. 4

7. 已知x，y都是区间$\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$内任取的一个实数，则使得$y\leqslant\sin x$的取值的概率是（ ）

A. $\dfrac{4}{\pi^2}$　　B. $\dfrac{2}{\pi}$　　C. $\dfrac{1}{2}$　　D. $\dfrac{2}{\pi^2}$

8. 已知向量$\vec{a}$与$\vec{b}$的夹角为θ，定义$\vec{a}\times\vec{b}$为$\vec{a}$与$\vec{b}$的“向量积”，且$\vec{a}\times\vec{b}$是一个向量，它的长度$|\vec{a}\times\vec{b}|=|\vec{a}||\vec{b}|\sin\theta$，若$\vec{u}=(2,0)$，$\vec{u}-\vec{v}=(1,-\sqrt{3})$，则$|\vec{u}\times(\vec{u}\times\vec{v})|=$（ ）．

A. $4\sqrt{3}$　　B. $\sqrt{3}$　　C. 6　　D. $2\sqrt{3}$

填空题：9-13题为必做题，14-15选做一题，共30分

9. 函数$y=\log_3(3x-2)$的定义域是 ______ .

10. 以抛物线$y^2=4x$的焦点为顶点，顶点为中心，离心率为2的双曲线方程是 ______ .

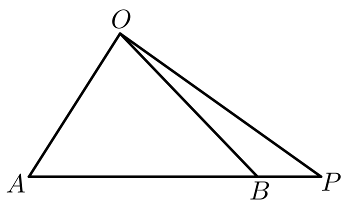
11. 用数字1，2，3，4可以排成没有重复数字的四位偶数，共有 ______ 个.

12. 设变量x，y满足$\begin{cases} x\geqslant 0 \\ x\leqslant y+1 \\ y\leqslant 1 \end{cases}$，则$x+y$的最大值是 ______ .

13. 函数$f(x)$的定义域为$\mathbf{R}$，$f(-1)=2$，对任意$x\in\mathbf{R}$，$f'(x)>2$，则$f(x)>2x+4$的解集为 ______ .

14. 极坐标系中，A，B分别是直线$\rho\cos\theta-\rho\sin\theta+5=0$和圆$\rho=2\sin\theta$上的动点，则$A$，$B$两点之间距离的最小值是 ______ .

15. 如图所示，$\triangle OAB$是等腰三角形，P是底边AB延长线上一点，且$PO=3$，$PA\cdot PB=4$，则腰长$OA=$ ______ .



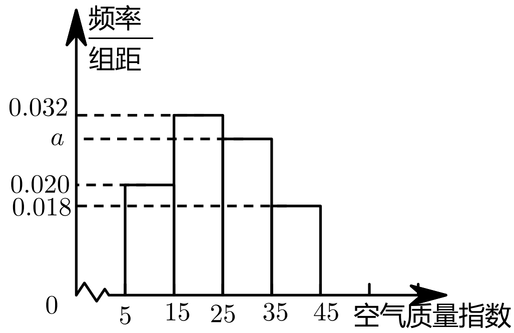
解答题（共6题，共80分）

16. 已知$\sin\frac{x}{2}-2\cos\frac{x}{2}=0$

（1） 求$\tan x$的值.

（2） 求$\dfrac{\cos 2x}{\sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{4}+x\right)\cdot\sin x}$的值.

17. 去年2月29日，我国发布了新修订的《环境空气质量标准》指出空气质量指数在$0-50$为优秀，各类人群可正常活动．惠州市环保局对我市2014年进行为期一年的空气质量监测，得到每天的空气质量指数，从中随机抽取50个作为样本进行分析报告，样本数据分组区间为$(5,15]$，$(15,25]$，$(25,35]$，$(35,45]$，由此得到样本的空气质量指数频率分布直方图，如图.

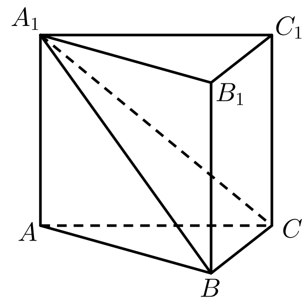


（1） 求a的值．

（2） 根据样本数据，试估计这一年度的空气质量指数的平均值．（注：设样本数据第i组的频率为p_i，第i组区间的中点值为$x_i(i=1,2,3\cdots,n)$，则样本数据的平均值为$\overline{X}=x_1p_1+x_2p_2+x_2p_3+\cdots x_np_n$．）

（3） 如果空气质量指数不超过15，就认定空气质量为“特优等级”，则从这一年的监测数据中随机抽取3天的数值，其中达到“特优等级”的天数为ξ，求ξ的分布列和数学期望．

18. 如图，在直三棱柱$ABC-A_1B_1C_1$中，平面$A_1BC\perp$侧面A_1ABB_1，且$AA_1=AB=2$．



（1） 求证：$AB\perp BC$．

（2） 若直线AC与平面A_1BC所成的角为$\frac{\pi}{6}$，求锐二面角$A-A_1C-B$的大小．

19. 已知数列$\{a_n\}$中，$a_1=3$，前n项和$S_n=\frac{1}{2}(n+1)(a_n+1)-1$．

（1） 求数列$\{a_n\}$的通项公式．

（2） 设数列$\left\{\frac{1}{a_n\cdot a_{n+1}}\right\}$的前$n$项和为$T_n$，是否存在实数$M$，使得$T_n\leqslant M$对一切正整数$n$都成立？若存在，求出$M$的最小值；若不存在，请说明理由．

20. 椭圆C：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\,(a>b>c)$的离心率为$\frac{1}{2}$，其左焦点到点$P\,(2,1)$的距离为$\sqrt{10}$．

（1） 求椭圆C的标准方程；

（2） 若直线l：$y=kx+m$与椭圆C相交于A，B两点（A，B不是左右顶点），且以AB为直径的圆过椭圆C的右顶点．求证：直线l过定点，并求出该定点的坐标．

21. 已知关于x的函数$f(x)=-\frac{1}{3}x^3+bx^2+cx+bc$，其导函数为$f'(x)$．记函数$g(x)=|f'(x)|$在区间$[-1,1]$上的最大值为$M$．

（1） 如果函数$f(x)$在$x=1$处有极值$-\frac{4}{3}$，试确定b、c的值．

（2） 若$|b|>1$，证明对任意的c，都有$M>2$．

（3） 若$M\geqslant k$对任意的b、c恒成立，试求k的最大值．