

A. 16

B. 25

C. 36

D. 49



7. 在 $\triangle ABC$ 中, a, b, c 分别为 $\angle A, \angle B, \angle C$ 所对的边, 若函数 $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + bx^2 + (a^2 + c^2 - ac)x + 1$ 有极值点, 则 $\angle B$ 的范围是 () .

A. $(0, \frac{\pi}{3})$ B. $(0, \frac{\pi}{3}]$ C. $[\frac{\pi}{3}, \pi)$ D. $(\frac{\pi}{3}, \pi)$

8. 如果自然数 a 的各位数字之和等于8, 我们称 a 为“吉祥数”. 将所有“吉祥数”从小到大排成一列 a_1, a_2, a_3, \dots , 若 $a_n = 2015$, 则 $n = ()$.

A. 83

B. 82

C. 39

D. 37

填空题: 9-13题为必做题, 14-15选做一题, 共30分

9. $(x - \frac{1}{3x})^4$ 的展开式中常数项为 _____. (用数字表示)

10. $\int_{-3}^3 (x^2 - 2\sin x) dx =$ _____ .

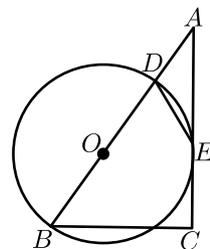
11. 已知向量 $\vec{a} = (\frac{1}{x} - 1, 1)$, $\vec{b} = (1, \frac{1}{y})$ ($x > 0, y > 0$), 若 $\vec{a} \perp \vec{b}$, 则 $x + 4y$ 的最小值为 _____ .

12. 已知圆 $C: x^2 + y^2 + 8x + ay - 5 = 0$ 经过抛物线 $E: x^2 = 4y$ 的焦点, 则抛物线 E 的准线与圆 C 相交所得的弦长为 _____ .

13. 设 P 是函数 $y = \ln x$ 图象上的动点, 则点 P 到直线 $y = x$ 的距离的最小值为 _____ .

14. 在极坐标系中, 曲线 $C_1: \rho \cos \theta = \sqrt{2}$ 与曲线 $C_2: \rho^2 \cos 2\theta = 1$ 相交于 A, B 两点, 则 $|AB| =$ _____ .

15. 如图, 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle A = 30^\circ$, $\angle C = 90^\circ$, D 是 AB 边上的一点, 以 BD 为直径的 $\odot O$ 与 AC 相切于点 E . 若 $BC = 6$, 则 DE 的长为 _____ .



解答题 (共6题, 共80分)

16. 函数 $f(x) = 2\sin(\omega x + \frac{\pi}{3})$ ($\omega > 0$)的最小正周期是 π .

(1)

求 $f\left(\frac{5\pi}{12}\right)$ 的值.

(2) 若 $\sin x_0 = \frac{\sqrt{3}}{3}$, 且 $x_0 \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, 求 $f(x_0)$ 的值.

17. 空气质量指数 (简称AQI) 是定量描述空气质量状况的指数, 其数值越大说明空气污染越严重, 为了及时了解空气质量状况, 广东各城市都设置了实时监测站. 下表是某网站公布的广东省内21个城市在2014年12月份某时刻实时监测到的数据:

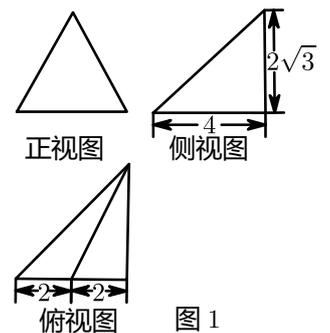
城市	AQI数值												
广州	118	东莞	137	中山	95	江门	78	云浮	76	茂名	107	揭阳	80
深圳	94	珠海	95	湛江	75	潮州	94	河源	124	肇庆	48	清远	47
佛山	160	惠州	113	汕头	88	汕尾	74	阳江	112	韶关	68	梅州	84

(1) 请根据上表中的数据, 完成下列表格:

空气质量	优质	良好	轻度污染	中度污染
AQI值范围	[0, 50)	[50, 100)	[100, 150)	[150, 200)
城市个数				

(2) 统计部门从空气质量“良好”和“轻度污染”的两类城市中采用分层抽样的方式抽取6个城市, 省环保部门再从中随机选取3个城市组织专家进行调研, 记省环保部门“选到空气质量“良好”的城市个数为 ξ ”, 求 ξ 的分布列和数学期望.

18. 在三棱锥 $P-ABC$ 中, 已知平面 $PBC \perp$ 平面 ABC , AB 是底面 $\triangle ABC$ 最长的边. 三棱锥 $P-ABC$ 的三视图如图1所示, 其中侧视图和俯视图均为直角三角形.



(1) 请在图2中, 用斜二测画法, 把三棱锥 $P-ABC$ 的直观图补充完整 (其中点 P 在 xOz 平面内), 并指出三棱锥 $P-ABC$ 的哪些面是直角三角形.

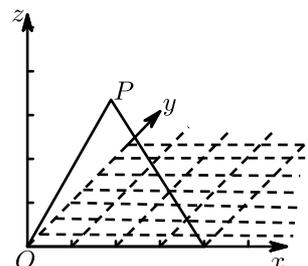


图 2

(2) 求二面角 $B-PA-C$ 的正切值.

(3) 求点 C 到面 PAB 的距离.



19. 已知数列 $\{a_n\}$ 的首项大于 0, 公差 $d = 1$, 且 $\frac{1}{a_1 a_2} + \frac{1}{a_2 a_3} = \frac{2}{3}$.

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式.

(2) 若数列 $\{b_n\}$ 满足: $b_1 = -1, b_2 = \lambda, b_{n+1} = \frac{1-n}{n} b_n + \frac{(-1)^{n-1}}{a_n}$, 其中 $n \geq 2$.

① 求数列 $\{b_n\}$ 的通项 b_n .

② 是否存在实数 λ , 使得数列 $\{b_n\}$ 为等比数列? 若存在, 求出 λ 的值; 若不存在, 请说明理由.

20. 已知椭圆 $E: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的离心率为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$, 过左焦点倾斜角为 45° 的直线被椭圆截得的弦长为 $\frac{4\sqrt{2}}{3}$.

(1) 求椭圆 E 的方程.

(2) 若动直线 l 与椭圆 E 有且只有一个公共点, 过点 $M(1, 0)$ 作 l 的垂线垂足为 Q , 求点 Q 的轨迹方程.

21. 已知定义在 $[-2, 2]$ 上的奇函数 $f(x)$ 满足: 当 $x \in (0, 2]$ 时, $f(x) = x(x-2)$.

(1) 求 $f(x)$ 的解析式和值域.

(2) 设 $g(x) = \ln(x+2) - ax - 2a$, 其中常数 $a > 0$.

① 试指出函数 $F(x) = g(f(x))$ 的零点个数.

② 若当 $1 + \frac{1}{k}$ 是函数 $F(x) = g(f(x))$ 的一个零点时, 相应的常数 a 记为 a_k , 其中 $k = 1, 2, \dots, n$.

证明: $a_1 + a_2 + \dots + a_n < \frac{7}{6} (n \in \mathbf{N}^*)$.

