

# 选择题 (每小题5分, 共40分)

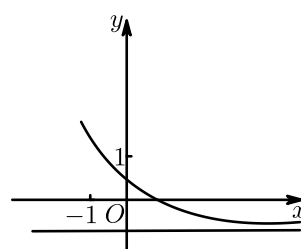
1. 已知集合  $U = \{2, 0, 1, 5\}$ , 集合  $A = \{0, 2\}$ , 则  $\complement_U A = ( \quad )$ .

- A.  $\emptyset$                       B.  $\{0, 2\}$                       C.  $\{1, 5\}$                       D.  $\{2, 0, 1, 5\}$

2. 已知复数  $z$  满足  $z(1+i) = 1$  (其中  $i$  为虚数单位), 则  $z = ( \quad )$ .

- A.  $\frac{-1+i}{2}$                       B.  $\frac{-1-i}{2}$                       C.  $\frac{1+i}{2}$                       D.  $\frac{1-i}{2}$

3. 若函数  $y = a^x + b$  的部分图象如图所示, 则  $( \quad )$ .



- A.  $0 < a < 1, -1 < b < 0$                       B.  $0 < a < 1, 0 < b < 1$   
C.  $a > 1, -1 < b < 0$                       D.  $a > 1, 0 < b < 1$

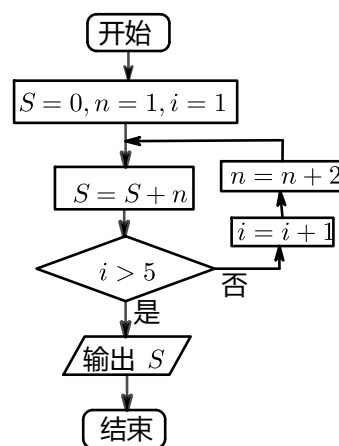
4. 已知实数  $x, y$  满足不等式组  $\begin{cases} x+y \leq 3 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$ , 则  $2x+y$  的最大值为  $( \quad )$ .

- A. 3                      B. 4                      C. 6                      D. 9

5. 已知直线  $a, b$ , 平面  $\alpha, \beta$ , 且  $a \perp \alpha, b \subset \beta$ , 则 " $a \perp b$ " 是 " $\alpha \parallel \beta$ " 的  $( \quad )$ .

- A. 充分不必要条件                      B. 必要不充分条件  
C. 充要条件                      D. 既不充分也不必要条件

6. 执行如图所示的程序框图, 则输出  $S$  的值为  $( \quad )$ .



A. 16

B. 25

C. 36

D. 49



7. 在 $\triangle ABC$ 中,  $a, b, c$ 分别为 $\angle A, \angle B, \angle C$ 所对的边, 若函数 $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + bx^2 + (a^2 + c^2 - ac)x + 1$ 有极值点, 则 $\angle B$ 的范围是 ( ) .

A.  $(0, \frac{\pi}{3})$

B.  $(0, \frac{\pi}{3}]$

C.  $[\frac{\pi}{3}, \pi)$

D.  $(\frac{\pi}{3}, \pi)$

8. 如果自然数 $a$ 的各位数字之和等于8, 我们称 $a$ 为“吉祥数”. 将所有“吉祥数”从小到大排成一列 $a_1, a_2, a_3, \dots$ , 若 $a_n = 2015$ , 则 $n =$  ( ) .

A. 83

B. 82

C. 39

D. 37

填空题: 9-13题为必做题, 14-15选做一题, 共30分

9.  $(x - \frac{1}{3x})^4$ 的展开式中常数项为 \_\_\_\_\_. (用数字表示)

10.  $\int_{-3}^3 (x^2 - 2\sin x) dx =$  \_\_\_\_\_.

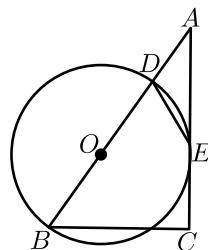
11. 已知向量 $\vec{a} = (\frac{1}{x} - 1, 1)$ ,  $\vec{b} = (1, \frac{1}{y})$  ( $x > 0, y > 0$ ), 若 $\vec{a} \perp \vec{b}$ , 则 $x + 4y$ 的最小值为 \_\_\_\_\_.

12. 已知圆 $C: x^2 + y^2 + 8x + ay - 5 = 0$ 经过抛物线 $E: x^2 = 4y$ 的焦点, 则抛物线 $E$ 的准线与圆 $C$ 相交所得的弦长为 \_\_\_\_\_.

13. 设 $P$ 是函数 $y = \ln x$ 图象上的动点, 则点 $P$ 到直线 $y = x$ 的距离的最小值为 \_\_\_\_\_.

14. 在极坐标系中, 曲线 $C_1: \rho \cos \theta = \sqrt{2}$ 与曲线 $C_2: \rho^2 \cos 2\theta = 1$ 相交于 $A, B$ 两点, 则 $|AB| =$  \_\_\_\_\_.

15. 如图, 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中,  $\angle A = 30^\circ$ ,  $\angle C = 90^\circ$ ,  $D$ 是 $AB$ 边上的一点, 以 $BD$ 为直径的 $\odot O$ 与 $AC$ 相切于点 $E$ . 若 $BC = 6$ , 则 $DE$ 的长为 \_\_\_\_\_.



解答题 (共6题, 共80分)

16. 函数 $f(x) = 2\sin(\omega x + \frac{\pi}{3})$  ( $\omega > 0$ )的最小正周期是 $\pi$ .

(1)

求  $f\left(\frac{5\pi}{12}\right)$  的值.

(2) 若  $\sin x_0 = \frac{\sqrt{3}}{3}$ , 且  $x_0 \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ , 求  $f(x_0)$  的值.



17. 空气质量指数 (简称AQI) 是定量描述空气质量状况的指数, 其数值越大说明空气污染越严重, 为了及时了解空气质量状况, 广东各城市都设置了实时监测站. 下表是某网站公布的广东省内21个城市在2014年12月份某时刻实时监测到的数据:

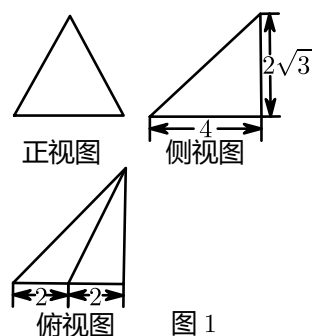
| 城市 | AQI数值 | 城市 | AQI数值 | 城市 | AQI数值 | 城市 | AQI数值 | 城市 | AQI数值 | 城市 | AQI数值 | 城市 | AQI数值 |
|----|-------|----|-------|----|-------|----|-------|----|-------|----|-------|----|-------|
| 广州 | 118   | 东莞 | 137   | 中山 | 95    | 江门 | 78    | 云浮 | 76    | 茂名 | 107   | 揭阳 | 80    |
| 深圳 | 94    | 珠海 | 95    | 湛江 | 75    | 潮州 | 94    | 河源 | 124   | 肇庆 | 48    | 清远 | 47    |
| 佛山 | 160   | 惠州 | 113   | 汕头 | 88    | 汕尾 | 74    | 阳江 | 112   | 韶关 | 68    | 梅州 | 84    |

(1) 请根据上表中的数据, 完成下列表格:

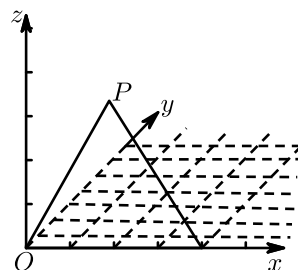
| 空气质量   | 优质        | 良好          | 轻度污染         | 中度污染         |
|--------|-----------|-------------|--------------|--------------|
| AQI值范围 | $[0, 50)$ | $[50, 100)$ | $[100, 150)$ | $[150, 200)$ |
| 城市个数   |           |             |              |              |

(2) 统计部门从空气质量“良好”和“轻度污染”的两类城市中采用分层抽样的方式抽取6个城市, 省环保部门再从中随机选取3个城市组织专家进行调研, 记省环保部门“选到空气质量“良好”的城市个数为 $\xi$ ”, 求 $\xi$ 的分布列和数学期望.

18. 在三棱锥  $P-ABC$  中, 已知平面  $PBC \perp$  平面  $ABC$ ,  $AB$  是底面  $\triangle ABC$  最长的边. 三棱锥  $P-ABC$  的三视图如图1所示, 其中侧视图和俯视图均为直角三角形.



(1) 请在图2中, 用斜二测画法, 把三棱锥  $P-ABC$  的直观图补充完整 (其中点  $P$  在  $xOz$  平面内), 并指出三棱锥  $P-ABC$  的哪些面是直角三角形.



(2) 求二面角  $B-PA-C$  的正切值.

(3) 求点  $C$  到面  $PAB$  的距离.



19. 已知数列  $\{a_n\}$  的首项大于 0, 公差  $d=1$ , 且  $\frac{1}{a_1 a_2} + \frac{1}{a_2 a_3} = \frac{2}{3}$ .

(1) 求数列  $\{a_n\}$  的通项公式.

(2) 若数列  $\{b_n\}$  满足:  $b_1 = -1$ ,  $b_2 = \lambda$ ,  $b_{n+1} = \frac{1-n}{n} b_n + \frac{(-1)^{n-1}}{a_n}$ , 其中  $n \geq 2$ .

① 求数列  $\{b_n\}$  的通项  $b_n$ .

② 是否存在实数  $\lambda$ , 使得数列  $\{b_n\}$  为等比数列? 若存在, 求出  $\lambda$  的值; 若不存在, 请说明理由.

20. 已知椭圆  $E: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$  的离心率为  $\frac{\sqrt{2}}{2}$ , 过左焦点倾斜角为  $45^\circ$  的直线被椭圆截得的弦长为  $\frac{4\sqrt{2}}{3}$ .

(1) 求椭圆  $E$  的方程.

(2) 若动直线  $l$  与椭圆  $E$  有且只有一个公共点, 过点  $M(1, 0)$  作  $l$  的垂线垂足为  $Q$ , 求点  $Q$  的轨迹方程.

21. 已知定义在  $[-2, 2]$  上的奇函数  $f(x)$  满足: 当  $x \in (0, 2]$  时,  $f(x) = x(x-2)$ .

(1) 求  $f(x)$  的解析式和值域.

(2) 设  $g(x) = \ln(x+2) - ax - 2a$ , 其中常数  $a > 0$ .

① 试指出函数  $F(x) = g(f(x))$  的零点个数.

② 若当  $1 + \frac{1}{k}$  是函数  $F(x) = g(f(x))$  的一个零点时, 相应的常数  $a$  记为  $a_k$ , 其中  $k = 1, 2, \dots, n$ .

证明:  $a_1 + a_2 + \dots + a_n < \frac{7}{6} (n \in \mathbf{N}^*)$ .

