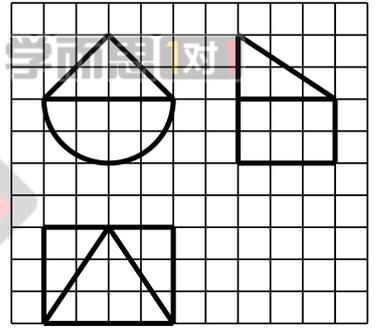


选择题 (本大题共12小题, 每小题5分, 共60分)

1. 已知集合 $M = \{x | -1 < x < 1\}$, $N = \{x | x^2 < 2, x \in \mathbf{Z}\}$, 则 ().
- A. $M \subseteq N$ B. $N \subseteq M$ C. $M \cap N = \{0\}$ D. $M \cup N = N$
2. 已知复数 $z = \frac{\sqrt{3} + i}{(1 + i)^2}$, 其中 i 为虚数单位, 则 $|z| = ()$.
- A. $\frac{1}{2}$ B. 1 C. $\sqrt{2}$ D. 2
3. 已知 $\cos\left(\frac{\pi}{12} - \theta\right) = \frac{1}{3}$, 则 $\sin\left(\frac{5\pi}{12} + \theta\right)$ 的值是 ().
- A. $\frac{1}{3}$ B. $\frac{2\sqrt{2}}{3}$ C. $-\frac{1}{3}$ D. $-\frac{2\sqrt{2}}{3}$
4. 已知随机变量 x 服从正态分布 $N(3, \sigma^2)$, 且 $P(x \leq 4) = 0.84$, 则 $P(2 < x < 4) = ()$.
- A. 0.84 B. 0.68 C. 0.32 D. 0.16
5. 不等式组 $\begin{cases} x - y \leq 0 \\ x + y \geq -2 \\ x - 2y \geq -2 \end{cases}$ 的解集记为 D , 若 $(a, b) \in D$, 则 $z = 2a - 3b$ 的最小值是 ().
- A. -4 B. -1 C. 1 D. 4
6. 使 $\left(x^2 + \frac{1}{2x^3}\right)^n$ ($n \in \mathbf{N}$) 展开式中含有常数项的 n 的最小值是 ().
- A. 3 B. 4 C. 5 D. 6
7. 已知函数 $f(x) = \sin(2x + \varphi)$ ($0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$) 的图象的一个对称中心为 $\left(\frac{3\pi}{8}, 0\right)$, 则函数 $f(x)$ 的单调递减区间是 ().
- A. $\left[2k\pi - \frac{3\pi}{8}, 2k\pi + \frac{\pi}{8}\right]$ ($k \in \mathbf{Z}$) B. $\left[2k\pi + \frac{\pi}{8}, 2k\pi + \frac{5\pi}{8}\right]$ ($k \in \mathbf{Z}$)
- C. $\left[k\pi - \frac{3\pi}{8}, k\pi + \frac{\pi}{8}\right]$ ($k \in \mathbf{Z}$) D. $\left[k\pi + \frac{\pi}{8}, k\pi + \frac{5\pi}{8}\right]$ ($k \in \mathbf{Z}$)
8. 已知球 O 的半径为 R , A, B, C 三点在球 O 的球面上, 球心 O 到平面 ABC 的距离为 $\frac{1}{2}R$. $AB = AC = 2$, $\angle BAC = 120^\circ$, 则球 O 的表面积为 ().
- A. $\frac{16}{9}\pi$ B. $\frac{16}{3}\pi$ C. $\frac{64}{9}\pi$ D. $\frac{64}{3}\pi$
9. 已知命题 $p: \forall x \in \mathbf{N}^*, \left(\frac{1}{2}\right)^x \geq \left(\frac{1}{3}\right)^x$, 命题 $q: \exists x \in \mathbf{N}^*, 2^x + 2^{1-x} = 2\sqrt{2}$, 则下列命题中为真命题的是 ().
- A. $p \wedge q$ B. $(\neg p) \wedge q$ C. $p \wedge (\neg q)$ D. $(\neg p) \wedge (\neg q)$
10. 如图, 网格纸上的小正方形的边长为1, 粗实线画出的是某几何体的三视图, 则该几何体的体积是 ().



A. $4 + 6\pi$

B. $8 + 6\pi$

C. $4 + 12\pi$

D. $8 + 12\pi$

11. 已知点 O 为坐标原点, 点 M 在双曲线 $C: x^2 - y^2 = \lambda$ (λ 为正常数) 上, 过点 M 作双曲线 C 的某一条渐近线的垂线, 垂足为 N , 则 $|ON| \cdot |MN|$ 的值为 ().

A. $\frac{\lambda}{4}$

B. $\frac{\lambda}{2}$

C. λ

D. 无法确定

12. 设函数 $f(x)$ 的定义域为 \mathbf{R} , $f(-x) = f(x)$, $f(x) = f(2-x)$, 当 $x \in [0, 1]$ 时, $f(x) = x^3$. 则函数 $g(x) = |\cos(\pi x) - f(x)|$ 在区间 $[-\frac{1}{2}, \frac{5}{2}]$ 上的所有零点的和为 ().

A. 7

B. 6

C. 3

D. 2

填空题 (本大题共4小题, 每小题5分, 共20分)

13. 曲线 $f(x) = \frac{2}{x} + 3x$ 在点 $(1, f(1))$ 处的切线方程为 _____.

14. 已知平面向量 \vec{a} 与 \vec{b} 的夹角为 $\frac{\pi}{3}$, $\vec{a} = (1, \sqrt{3})$, $|\vec{a} - 2\vec{b}| = 2\sqrt{3}$. 则 $|\vec{b}| =$ _____.

15. 已知中心在坐标原点的椭圆 C 的右焦点为 $F(1, 0)$, 点 F 关于直线 $y = \frac{1}{2}x$ 的对称点在椭圆 C 上, 则椭圆 C 的方程为 _____.

16. 在 $\triangle ABC$ 中, a, b, c 分别为内角 A, B, C 的对边, $a + c = 4$, $(2 - \cos A)\tan \frac{B}{2} = \sin A$, 则 $\triangle ABC$ 的面积的最大值为 _____.

解答题 (本大题共5小题, 共60分)

17. 设 S_n 是数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和, 已知 $a_1 = 3$, $a_{n+1} = 2S_n + 3 (n \in \mathbf{N})$.

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式.

(2) 令 $b_n = (2n - 1)a_n$, 求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 T_n .

18. 班主任为了对本班学生的考试成绩进行分析, 决定从本班24名女同学, 18名男同学中随机抽取一个容量为7的样本进行分析.

(1) 如果按照性别比例分层抽样, 可以得到多少个不同的样本? (写出算式即可, 不必计算出结果)

(2) 如果随机抽取的7名同学的数学, 物理成绩 (单位: 分) 对应如表:

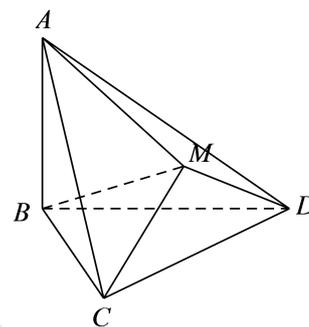
学生序号 <i>i</i>	1	2	3	4	5	6	7
数学成绩 x_i	60	65	70	75	85	87	90
物理成绩 y_i	70	77	80	85	90	86	93

- ① 若规定85分以上 (包括85分) 为优秀, 从这7名同学中抽取3名同学, 记3名同学中数学和物理成绩均为优秀的人数为 ξ , 求 ξ 的分布列和数学期望.
- ② 根据上表数据, 求物理成绩 y 关于数学成绩 x 的线性回归方程 (系数精确到0.01); 若班上某位同学的数学成绩为96分, 预测该同学的物理成绩为多少分?

附: 回归直线的方程是: $\hat{y} = bx + a$, 其中 $b = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}$, $a = \bar{y} - b\bar{x}$.

\bar{x}	\bar{y}	$\sum_{i=1}^7 (x_i - \bar{x})^2$	$\sum_{i=1}^7 (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})$
76	83	812	526

19. 如图, 在多面体 $ABCDM$ 中, $\triangle BCD$ 是等边三角形, $\triangle CMD$ 是等腰直角三角形, $\angle CMD = 90^\circ$, 平面 $CMD \perp$ 平面 BCD , $AB \perp$ 平面 BCD .



- (1) 求证: $CD \perp AM$.
- (2) 若 $AM = BC = 2$, 求直线 AM 与平面 BDM 所成角的正弦值.

20. 已知点 $F(1, 0)$, 点 A 是直线 $l_1: x = -1$ 上的动点, 过 A 作直线 l_2 , $l_1 \perp l_2$, 线段 AF 的垂直平分线与 l_2 交于点 P .

- (1) 求点 P 的轨迹 C 的方程.
- (2) 若点 M, N 是直线 l_1 上两个不同的点, 且 $\triangle PMN$ 的内切圆方程为 $x^2 + y^2 = 1$, 直线 PF 的斜率为 k , 求 $\frac{|k|}{|MN|}$ 的取值范围.

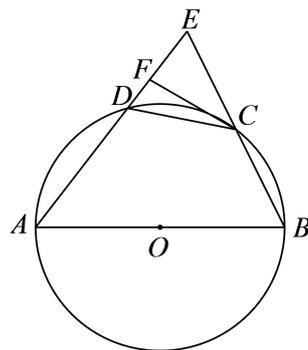
21. 已知函数 $f(x) = e^{-x} - ax (x \in \mathbf{R})$.

- (1) 当 $a = -1$ 时, 求函数 $f(x)$ 的最小值.
- (2) 若 $x \geq 0$ 时, $f(-x) + \ln(x+1) \geq 1$, 求实数 a 的取值范围.
- (3) 求证: $e^{2-\sqrt{e}} < \frac{3}{2}$.

选做题 (本大题共3小题, 选做1题, 共10分)



22. 如图, 四边形 $ABCD$ 是圆 O 的内接四边形, AB 是圆 O 的直径, $BC = CD$, AD 的延长线与 BC 的延长线交于点 E , 过 C 作 $CF \perp AE$, 垂足为点 F .



- (1) 证明: CF 是圆 O 的切线.
- (2) 若 $BC = 4$, $AE = 9$, 求 CF 的长.

23. 在直角坐标系 xOy 中, 曲线 C 的参数方程为 $\begin{cases} x = \sqrt{3} \cos \theta \\ y = \sin \theta \end{cases}$ (θ 为参数). 以点 O 为极点, x 轴正半轴为极轴建立极坐标系, 直线 l 的极坐标方程为 $\rho \sin\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}$.

- (1) 将曲线 C 和直线 l 化为直角坐标方程.
- (2) 设点 Q 是曲线 C 上的一个动点, 求它到直线 l 的距离的最大值.

24. 已知函数 $f(x) = \log_2(|x + 1| + |x - 2| - a)$.

- (1) 当 $a = 7$ 时, 求函数 $f(x)$ 的定义域.
- (2) 若关于 x 的不等式 $f(x) \geq 3$ 的解集是 \mathbf{R} , 求实数 a 的最大值.

