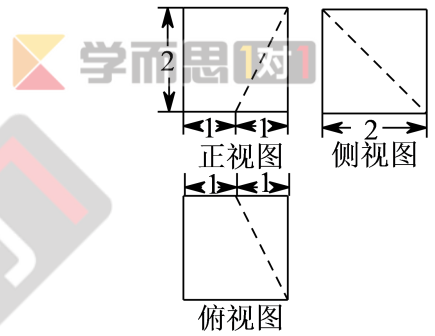


选择题 (每小题5分, 共60分)

- 已知全集为 \mathbf{R} , 集合 $M = \{-1, 1, 2, 4\}$, $N = \{x | x^2 - 2x \geq 3\}$, 则 $M \cap (\complement_{\mathbf{R}} N) = (\quad)$.
 A. $\{-1, 2, 2\}$ B. $\{4\}$ C. $\{1, 2\}$ D. $\{x | -1 \leq x \leq 2\}$
- 复数 z 满足 $z(2 + i) = 3 - i$, 则复数 z 在复平面内对应的点位于 ().
 A. 第一象限 B. 第二象限 C. 第三象限 D. 第四象限
- 设等比数列 $\{a_n\}$ 的公比为 q , 前 n 项和为 S_n , 则“ $|q| = 1$ ”是“ $S_6 = 3S_2$ ”的 ().
 A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件
 C. 充要条件 D. 既不充分也不必要条件
- 变量 x, y 满足约束条件 $\begin{cases} x + y - 2 \geq 0 \\ x - y - 2 \leq 0 \\ y \leq 1 \end{cases}$, 则目标函数 $z = x + 3y$ 的最小值为 ().
 A. 2 B. 4 C. 5 D. 6
- 在考试测评中, 常用难度曲线图来检测题目的质量, 一般来说, 全卷得分高的学生, 在某道题目上的答对率也应较高, 如果是某次数学测试压轴题的第1、2问得分难度曲线图, 第1、2问满分均为6分, 图中横坐标为分数段, 纵坐标为该分数段的全体考生在第1、2问的平均难度, 则下列说法正确的是 ().


分数段 (Score Interval)	第1问平均难度 (Q1 Avg Difficulty)	第2问平均难度 (Q2 Avg Difficulty)
[0,10)	0.10	0.05
[10,20)	0.15	0.10
[20,30)	0.20	0.15
[30,40)	0.25	0.20
[40,50)	0.30	0.25
[50,60)	0.35	0.30
[60,70)	0.40	0.35
[70,80)	0.45	0.40
[80,90)	0.50	0.45
[90,100)	0.55	0.50
[100,110)	0.60	0.55
[110,120)	0.65	0.60
[120,130)	0.70	0.65
[130,140)	0.75	0.70
[140,150]	0.80	0.75

 A. 此题没有考生得12分
 B. 此题第1问比第2问更能区分学生数学成绩的好坏
 C. 分数在 $[40, 50)$ 的考生此大题的平均得分大约为4.8分
 D. 全体考生第1问的得分标准差小于第2问的得分标准差
- 某几何体的三视图如图所示, 则该几何体的体积为 ().



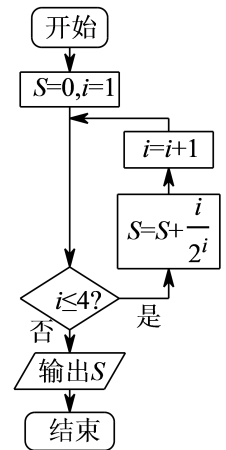
A. 6

B. $\frac{20}{3}$

C. 7

D. $\frac{22}{3}$

7. 如图所示的程序框图，输出的值为 () .



A. $\frac{15}{16}$

B. $\frac{15}{12}$

C. $\frac{13}{8}$

D. $\frac{13}{4}$

8. 一直线 l 与平行四边形 $ABCD$ 中的两边 AB 、 AD 分别交于 E 、 F ，且交其对角线 AC 于 K ，若 $\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{AE}$ ， $\overrightarrow{AD} = 3\overrightarrow{AF}$ ， $\overrightarrow{AC} = \lambda\overrightarrow{AK}$ ($\lambda \in \mathbf{R}$)，则 $\lambda =$ () .

A. 2

B. $\frac{5}{2}$

C. 3

D. 5

9. 下列函数中，同时满足两个条件 “① $\forall x \in \mathbf{R}$, $f\left(\frac{\pi}{12} + x\right) + f\left(\frac{\pi}{12} - x\right) = 0$; ② 当 $-\frac{\pi}{6} < x < \frac{\pi}{3}$ 时, $f'(x) > 0$ ” 的一个函数是 () .

A. $f(x) = \sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right)$

B. $f(x) = \cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$

C. $f(x) = \sin\left(2x - \frac{\pi}{6}\right)$

D. $f(x) = \cos\left(2x - \frac{\pi}{6}\right)$

10. 二项式 $(\sqrt{3}x + \sqrt[3]{2})^n$ ($n \in \mathbf{N}^*$) 展开式中只有一项的系数为有理数，则 n 可能取值为 () .

A. 6

B. 7

C. 8

D. 9

11. 任意 $a \in \mathbf{R}$ ，曲线 $y = e^x(x^2 + ax + 1 - 2a)$ 在点 $P(0, 1 - 2a)$ 处的切线 l 与圆 $C: x^2 + 2x + y^2 - 12 = 0$ 的位置关系是 () .

A. 相交

B. 相切

C. 相离

D. 以上均有可能

12.

已知函数 $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$, $g(x) = 3x^2 + 2ax + b$ (a, b, c 是常数), 若 $f(x)$ 在 $(0, 1)$ 上单调递减, 则下列结论中:

① $f(0) \cdot f(1) \leq 0$; ② $g(0) \cdot g(1) \geq 0$; ③ $a^2 - 3b$ 有最小值.



正确结论的个数为 () .

- A. 0 B. 1 C. 2 D. 3

填空题 (每小题5分, 共20分)

13. 函数 $f(x) = \frac{1}{x} - \log_2 \frac{1+ax}{1-x}$ 为奇函数, 则实数 $a =$ _____ .

14. 已知 $0 < x < \frac{\pi}{2}$, 且 $\tan\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{1}{7}$, 则 $\sin x + \cos x =$ _____ .

15. 所有真约数 (除本身之外的正约数) 的和等于它本身的正整数叫做完全数 (也称为完备数、玩美数), 如 $6 = 1 + 2 + 3$;

$$28 = 1 + 2 + 4 + 7 + 14;$$

$496 = 1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 31 + 62 + 124 + 248$, 此外, 它们都可以表示为2的一些连续正整数次幂之和, 如 $6 = 2^1 + 2^2$,

$28 = 2^2 + 2^3 + 2^4$, ..., 按此规律, 8128可表示为 _____ .

16. 已知双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b > 0$) 的右焦点为 F , O 为坐标原点, 若存在直线 l 过点 F 交双曲线 C 的右支于 A, B 两点, 使 $\vec{OA} \cdot \vec{OB} = 0$, 则双曲线离心率的取值范围是 _____ .

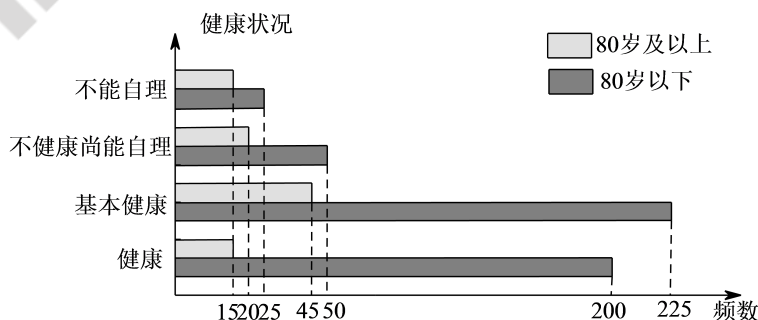
解答题 (共5题, 共60分)

17. $\triangle ABC$ 中的内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 若 $\sqrt{5}b = 4c, B = 2C$.

(1) 求 $\cos B$.

(2) 若 $c = 5$, 点 D 为边 BC 上一点, 且 $BD = 6$, 求 $\triangle ADC$ 的面积.

18. 我们国家正处于老龄化社会中, 老有所依也是政府的民生工程. 某市共有户籍人口400万, 其中老人 (年龄60岁及以上) 人数约有66万, 为了了解老人们的健康状况, 政府从老人中随机抽取600人并委托医疗机构免费为他们进行健康评估, 健康状况共分为不能自理、不健康尚能自理、基本健康、健康四个等级, 并以80岁为界限分成两个群体进行统计, 样本分布被制作成如图表.



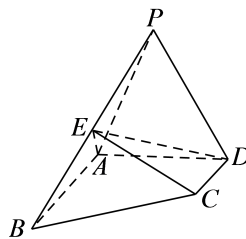
(1)

若采用分层抽样的方法再从样本中的不能自理的老人中抽取8人进一步了解他们的生活状况，则两个群体中各应抽取多少人？



- (2) 估算该市80岁及以上长者占全市户籍人口的百分比.
- (3) 据统计该市大约有五分之一的户籍老人无固定收入，政府计划为这部分老人每月发放生活补贴，标准如下：
- ① 80岁及以上长者每人每月发放生活补贴200元.
 - ② 80岁以下老人每人每月发放生活补贴120元.
 - ③ 不能自理的老人每人每月额外发放生活补贴120元. 试估计政府执行此计划的年度预算.

19. 如图，四棱锥 $P-ABCD$ 中， $\triangle PAD$ 为正三角形， $AB \parallel CD$ ， $AB = 2CD$ ， $\angle BAD = 90^\circ$ ， $PA \perp CD$ ， E 为棱 PB 的中点.



- (1) 求证：平面 $PAB \perp$ 平面 CDE .
- (2) 若直线 PC 与平面 PAD 所成角为 45° ，求二面角 $A-DE-C$ 的余弦值.

20. 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 过点 $M(2, 1)$ ，且离心率为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

- (1) 求椭圆 C 的方程.
- (2) 设 $A(0, -1)$ ，直线 l 与椭圆 C 交于 P, Q 两点，且 $|AP| = |AQ|$ ，当 $\triangle OPQ$ (O 为坐标原点) 的面积 S 最大时，求直线 l 的方程.

21. 设函数 $f(x) = e^{ax} + \lambda \ln x$ ，其中 $a < 0$ ， $0 < \lambda < \frac{1}{e}$ ， e 是自然对数的底数.

- (1) 求证：函数 $f(x)$ 有两个极值点.
- (2) 若 $-e \leq a < 0$ ，求证：函数 $f(x)$ 有唯一零点.

选做题

解答题 (第22题10分，第23题10分)

22. 已知不等式 $|x+3| - 2x - 1 < 0$ 的解集为 $(x_0, +\infty)$.

- (1) 求 x_0 的值.
- (2) 若函数 $f(x) = |x-m| + \left|x + \frac{1}{m}\right| - x_0 (m > 0)$ 有零点，求实数 m 的值.

23. 在极坐标系中，射线 $l: \theta = \frac{\pi}{6}$ 与圆 $C: \rho = 2$ 交于点 A ，椭圆 Γ 的方程为 $\rho^2 = \frac{3}{1 + 2\sin^2\theta}$ ，以极点为原点，极轴为 x 轴正半轴建立平面直角坐标系 xOy .

(1) 求点 A 的直角坐标和椭圆 Γ 的参数方程.

(2) 若 E 为椭圆 Γ 的下顶点, F 为椭圆 Γ 上任意一点, 求 $\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{AF}$ 的取值范围.

