

选择题 (本大题共12小题, 每小题5分, 共计60分)

1. 等比数列 $x, 3x+3, 6x+6, \dots$ 的第四项等于 () .

- A. -24 B. 0 C. 12 D. 24

2. 已知复数 z 的实部为 $a (a < 0)$, 虚部为1, 模长为2, \bar{z} 是 z 的共轭复数, 则 $\frac{1+\sqrt{3}i}{\bar{z}}$ 的值为 () .

- A. $\frac{\sqrt{3}+i}{2}$ B. $-\sqrt{3}-i$ C. $-\sqrt{3}+i$ D. $-\frac{\sqrt{3}+i}{2}$

3. 已知集合 $A = \{0, 1, 2\}$, 若 $A \cap \complement_{\mathbf{Z}} B = \emptyset$ (\mathbf{Z} 是整数集合), 则集合 B 可以为 () .

- A. $\{x|x = 2a, a \in A\}$ B. $\{x|x = 2a, a \in A\}$
 C. $\{x|x = a - 1, a \in \mathbf{N}\}$ D. $\{x|x = a^2, a \in \mathbf{N}\}$

4. 已知抛物线 $C: y^2 = 8x$ 的焦点为 F , 准线与 x 轴的交点为 K , 点 A 在 C 上且 $|AK| = \sqrt{2}|AF|$, 则 $\triangle AFK$ 的面积为 () .

- A. 4 B. 8 C. 16 D. 32

5. “牟合方盖”是我国古代数学家刘徽在研究球的体积的过程中构造的一个和谐优美的几何体. 它由完全相同的四个曲面构成, 相对的两个曲面在同一个圆柱的侧面上, 好似两个扣合(牟合)在一起的方形伞(方盖). 其直观图如下左图, 图中四边形是为体现其直观性所作的辅助线. 其实际直观图中四边形不存在, 当其正视图和侧视图完全相同时, 它的正视图和俯视图分别可能是 () .

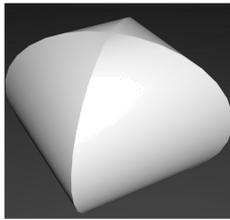


图1

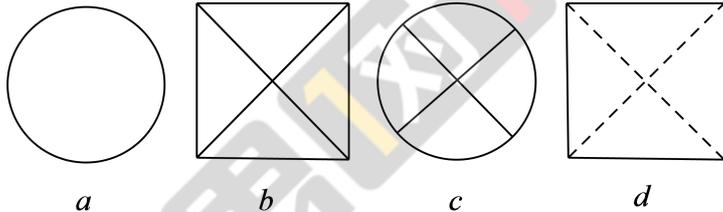


图2

- A. a, b B. a, c C. c, b D. b, d

6. 若变量 x, y 满足约束条件 $\begin{cases} y \leq 2x \\ x + y \leq 1 \\ y \geq -1 \end{cases}$, 则 $x + 2y$ 的最大值是 () .

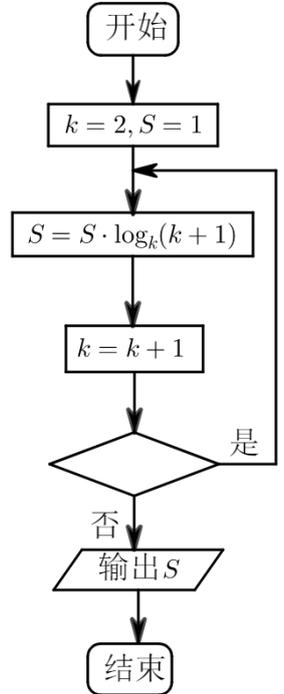
- A. $-\frac{5}{2}$ B. 0 C. $\frac{5}{3}$ D. $\frac{5}{2}$

7. 函数 $f(x) = \sqrt{3}\sin 2x + \cos 2x$, 则下列表述正确的是 () .

- A. $f(x)$ 在 $(-\frac{\pi}{3}, -\frac{\pi}{6})$ 单调递减 B. $f(x)$ 在 $(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{6})$ 单调递增
 C. $f(x)$ 在 $(-\frac{\pi}{6}, 0)$ 单调递减 D. $f(x)$ 在 $(\frac{\pi}{6}, 0)$ 单调递增

8. 在某种信息传输过程中，用4个数字的一个排列（数字允许重复）表示一个信息，不同排列表示不同信息，若所用数字只有0和1，则与信息0110至多有两个对应位置上的数字相同的信息个数为（ ）
- A. 10 B. 11 C. 12 D. 15

9. 若执行如图所示的程序框图，输出S的值为3，则判断框中应填入的条件是（ ）。



- A. $k < 6?$ B. $k < 7?$ C. $k < 8?$ D. $k < 9?$

10. 计算： $4 \cos 50^\circ - \tan 40^\circ = ()$.

- A. $\sqrt{3}$ B. $\frac{\sqrt{2} + \sqrt{3}}{2}$ C. $\sqrt{2}$ D. $2\sqrt{2}$

11. 已知三棱锥 $P - ABC$ 的四个顶点均在半径为1的球面上，且满足 $\vec{PA} \cdot \vec{PB} = 0$, $\vec{PB} \cdot \vec{PC} = 0$, $\vec{PC} \cdot \vec{PA} = 0$ ，则三棱锥 $P - ABC$ 的侧面积的最大值为（ ）。

- A. 1 B. 2 C. 4 D. 8

12. 已知定义在 \mathbf{R} 上的函数 $f(x)$ 是奇函数且满足 $f\left(\frac{3}{2} - x\right) = f(x)$, $f(-2) = -3$, 数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = -1$, 且 $\frac{S_n}{n} = 2 \times \frac{a_n}{n} + 1$ (其中 S_n 为 $\{a_n\}$ 的前 n 项和), 则 $f(a_5) + f(a_6) = ()$.

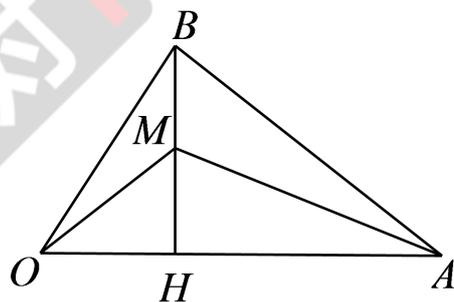
- A. -3 B. -2 C. 3 D. 2

填空题 (本大题共4小题, 每小题5分, 共计20分)

13. 设等比数列 $\{a_n\}$ 的公比为 q , 前 n 项和为 S_n . 若 S_{n+1} , S_n , S_{n+2} 成等差数列, 则 q 的值为 _____ .

14. 若 $(1 - 2x)^4 = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \dots$, 则 $a_0 + a_1 + a_3 = \underline{\hspace{2cm}}$.

15. 如图所示: 在 $\triangle AOB$ 中, $\angle AOB = \frac{\pi}{3}$, $OA = 3$, $OB = 2$, $BH \perp OA$ 于 H , M 为线段 BH 上的点, 且 $\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{MA} = -\frac{5}{4}$, 若 $\overrightarrow{BM} = x\overrightarrow{BO} + y\overrightarrow{BA}$, 则 $x + y$ 的值等于_____.



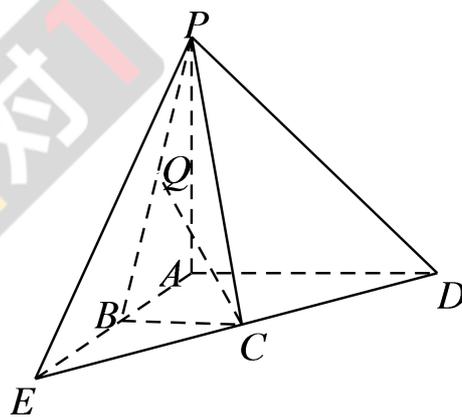
16. 一辆汽车在行驶中由于遇到紧急情况而刹车, 以速度 $v(t) = 7 - 3t + \frac{25}{1+t}$ (t 的单位: s , v 的单位: m/s) 行驶至停止, 在此期间汽车继续行驶的距离 (单位: m) 是_____.

解答题 (本大题共5小题, 每小题12分, 共计60分)

17. 在 $\triangle ABC$ 中, 内角 A, B, C 对边的边长分别是 a, b, c , 已知 $c = 2$, $C = \frac{\pi}{3}$.

- (1) 若 $\triangle ABC$ 的面积等于 $\sqrt{3}$, 求 a, b .
- (2) 若 $\sin C + \sin(B - A) = 2 \sin 2A$, 求 $\triangle ABC$ 的面积.

18. 如图, $PA \perp$ 平面 ADE , B, C 分别是 AE, DE 的中点, $AE \perp AD$, $AD = AE = AP = 2$.



- (1) 求二面角 $A - PE - D$ 的余弦值.
- (2) 点 Q 是线段 BP 上的动点, 当直线 CQ 与 DP 所成的角最小时, 求线段 BQ 的长.

19. 某次运动会的游泳比赛中, 已知5名游泳运动员中有1名运动员服用过兴奋剂, 需要通过检验尿液来确定因服用过兴奋剂而违规的运动员, 尿液检验结果呈阳性的即为服用过兴奋剂的运动员, 呈阴性则没有服用过兴奋剂, 组委会提供两种检验方法:
方案A: 逐个检验, 直到能确定服用过兴奋剂的运动员为止.

方案B: 先任选3名运动员, 将他们的尿液混在一起检验, 若结果呈阳性则表明违规的运动员是这3名运动员中的1名, 然后再逐个检验, 直到能确定为止; 若结果呈阴性则在另外2名运动员中任选1名检验.



(1) 求依方案A所需检验次数不少于依方案B所需检验次数的概率.

(2) ξ 表示依方案B所需检验次数, 求 ξ 的数学期望.

20. 已知直线 $y = -x + 1$ 与椭圆 $G: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b > 0$) 相交于 A, B 两点, 且线段 AB 的中点在直线 $l: x - 2y = 0$ 上, 椭圆 G 的右焦点关于直线 l 的对称点的在圆 $x_2^2 + y_2^2 = 4$ 上.

(1) 求椭圆 G 的标准方程.

(2) 已知点 C, D 分别为椭圆 G 的右顶点与上顶点, 设 P 为第三象限内一点且在椭圆 G 上, 直线 PC 与 y 轴交于点 M , 直线 PD 与 x 轴交于点 N , 求证: 四边形 $CDNM$ 的面积为定值.

21. 已知函数 $f(x) = -\frac{1}{4}x^4 + \frac{2}{3}x^3 + ax^2 - 2x - 2$ 在区间 $[-1, 1]$ 上单调递减, 在区间 $[1, 2]$ 上单调递增.

(1) 求实数 a 的值.

(2) 若关于 x 的方程 $f(2x) = m$ 有三个不同实数解, 求实数 m 的取值范围.

(3) 若函数 $y = \log_2[f(x) + p]$ 的图象与坐标轴无交点, 求实数 p 的取值范围.

选修题 (本大题共2小题, 每小题10分, 共计20分)

22. 在平面直角坐标系中, 以原点为极点, x 轴正半轴为极轴建立极坐标系, 并在两坐标系中取相同的长度单位. 已知曲线 C 的极坐标方程为 $\rho = 2 \cos \theta$, 直线 l 的参数方程为 $\begin{cases} x = -1 + t \cos \alpha \\ y = t \sin \alpha \end{cases}$ (t 为参数, α 为直线的倾斜角).

(1) 写出直线 l 的普通方程和曲线 C 的直角坐标方程.

(2) 若直线 l 与曲线 C 有唯一的公共点, 求角 α 的大小.

23. 已知函数 $f(x) = |x - 2| + |2x + a|$, $a \in \mathbf{R}$.

(1) 当 $a = 1$ 时, 解不等式 $f(x) \geq 5$.

(2) 若存在 x_0 满足 $f(x_0) + |x_0 - 2| < 3$, 求 a 的取值范围.

