选择题（本大题共8小题，每小题5分，共40分）

1. 已知集合$A=\{-1,0,1,2\}$，$B=\{1,x,x^2-x\}$，且$B\subseteq A$，则$x=$（　　）.

A. 1　B. 0　C. 2　D. -1

答案　D

解析　$\because A=\{-1,0,1,2\}$，$B\subseteq A$，

$\therefore x=-1$ 或$x=0$ 或$x=2$，

若$x=-1$，则$x^2-x=2$，故成立；

若$x=0$，则$x^2-x=0$，故不成立；

若$x=2$，则$x^2-x=2$，故不成立；

故选：D．

+试题篮　纠错　添加空白

jiaoshi.izhikang.com 2019/03/01

2. 已知等差数列$\{a_n\}$的公差为2，若a_1，a_3，a_4成等比数列，则a_2等于（　　）.

A. -4　B. -6　C. -8　D. -10

答案　B

解析　$\because$等差数列$\{a_n\}$的公差为2，a_1，a_3，a_4成等比数列，$\therefore (a_1+4)^2=a_1(a_1+6)$，$\therefore a_1=-8$，$\therefore a_2=-6$．故选：B．

3. 已知向量$\vec{a}$，$\vec{b}$为非零向量，则“$(x\vec{a}+y\vec{b})\perp(2y\vec{a}-x\vec{b})$对任意非零实数$x$，$y$都成立”是“$\vec{a}\perp\vec{b}$”的（　　）

A. 充分不必要条件　B. 必要不充分条件

C. 充要条件　D. 既不充分又不必要条件

答案　A

解析　$\because$“$(x\vec{a}+y\vec{b})\perp(2y\vec{a}-x\vec{b})$ 对任意非零实数x，y都成立”，

$\therefore (x\vec{a}+y\vec{b})\cdot(2y\vec{a}-x\vec{b})=2xy\vec{a}^2-xy\vec{b}^2+(2y^2-x^2)\vec{a}\cdot\vec{b}=0$，

$\Leftrightarrow 2\vec{a}^2-\vec{b}+\dfrac{2y^2-x^2}{xy}\vec{a}\cdot\vec{b}=0$，

必然有$\vec{a}\cdot\vec{b}=0$．

反之：可得$(x\vec{a}+y\vec{b})\cdot(2y\vec{a}-x\vec{b})=2xy\vec{a}^2-xy\vec{b}^2+(2y^2-x^2)\vec{a}\cdot\vec{b}=2xy(\vec{a}^2-\vec{b}^2)=0$，不一定成立．

因此“$(x\vec{a}+y\vec{b})\perp(2y\vec{a}-x\vec{b})$ 对任意非零实数x，y都成立”是“$\vec{a}\perp\vec{b}$”的充分不必要条件．

故选：A．

4. 已知函数$f(x)=\begin{cases}1+x(x\geqslant 0)\\1-x(x<0)\end{cases}$，并给出以下命题，其中正确的是（　　）.

A. 函数$y=f(\sin x)$是奇函数，也是周期函数

B. 函数$y=f(\sin x)$是偶函数，不是周期函数

C. 函数$y=f(\sin\dfrac{1}{x})$是偶函数，但不是周期函数

D. 函数$y=f(\sin\dfrac{1}{x})$是偶函数，也是周期函数

答案　C

解析　$\because f(x)=\begin{cases}1+x,(x\geqslant 0)\\1-x,(x<0)\end{cases}$，$\therefore f(\sin x)=\begin{cases}1+\sin x,\sin x\geqslant 0\\1-\sin x,\sin x<0\end{cases}$．

目录

当$\sin x>0$时，$-\sin x<0$，$\therefore f\left[\sin(-x)\right]=f(-\sin x)=1+\sin x=f(\sin x)$，

当$\sin x<0$时，$-\sin x>0$，$\therefore f\left[\sin(-x)\right]=f(-\sin x)=1-\sin x=f(\sin x)$，

$\therefore f(\sin x)$是偶函数，

$\because f\left[\sin(x+2\pi)\right]=f(\sin x)$，$\therefore y=f(\sin x)$是以$2\pi$为周期的函数．

同理可得：$y=f(\sin\frac{1}{x})$是偶函数，

$\because y=\sin\frac{1}{x}$不是周期函数，$\therefore y=f(\sin\frac{1}{x})$不是周期函数．

故选：C．

5. 下列命题中，正确的是（　　）．

A. 若a，b是两条直线，α，β是两个平面，且$a\subset\alpha$，$b\subset\beta$，则a，b是异面直线

B. 若a，b是两条直线，且$a//b$，则直线a平行于经过直线b的所有平面

C. 若直线a与平面α不平行，则此直线与平面内的所有直线都不平行

D. 若直线$a//$平面α，点$P\in\alpha$，则平面α内经过点P且与直线a平行的直线有且只有一条

答案　D

解析　对于A，当$\alpha//\beta$，a，b分别为第三个平面γ与α，β的交线时，由面面平行的性质可知$a//b$，故A错误．

对于B，设a，b确定的平面为α，显然$a\subset\alpha$，$b\subset\alpha$，故B错误．

对于C，当$a\subset\alpha$时，直线a与平面α内的无数条直线都平行，故C错误．

对于D，$\because$直线$a//$平面α，$\therefore$存在直线$b\subset\alpha$，使得$a//b$，过P作$c//b$，则$a//c$．故D正确．

故选：D．

6. 已知二面角$\alpha-I-\beta$的平面角为θ，$PA\perp\alpha$，$PB\perp\beta$，A，B为垂足，$PA=4$，$PB=2$，设A，B到二面角的棱I的距离分别为x，y，当θ变化时点(x,y)的轨迹为（　　）．

A. 圆弧　　B. 双曲线的一段　　C. 线段　　D. 椭圆的一段

答案　B

解析　$\because PA\perp\alpha$，$PB\perp\beta$，

$\therefore PB^2+BC^2=PA^2+AC^2$，

$\therefore PB^2+y^2=PA^2+x^2$

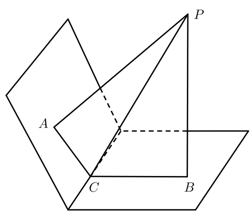
$\because PA=4$，$PB=2$，

$\therefore 4+y^2=16+x^2$，

即$y^2-x^2=12$ 其中$x\geqslant 0$，$y\geqslant 0$．

故(x,y)迹为双曲线的一段，

故选：B．



7. 已知$\triangle ABC$中，a，b，c分别为角A，B，C所对的边，且$a=4$，$b+c=5$，$\tan A+\tan B+\sqrt{3}=\sqrt{3}\tan A\cdot\tan B$，则$\triangle ABC$的面积为（　　）

A. $\frac{\sqrt{3}}{2}$　　B. $3\sqrt{3}$　　C. $\frac{3}{2}\sqrt{3}$　　D. $\frac{3}{2}$

答案　C

jiaoshi.izhikang.com 2019/03/01

目录

解析 解：$\because \tan C=-\tan(A+B)=-\dfrac{\tan A+\tan B}{1-\tan A\tan B}$ 化简得，

$\therefore \tan A+\tan B+\tan C=\tan A\tan B\tan C$ ，

所以$\tan C=\sqrt{3}$ ．所以$C=60^\circ$ ．

$\cos C=\dfrac{1}{2ab}(a^2+b^2-c^2)$ ，把$a=4$ ，$b+c=5$ ，$C=60^\circ$ 代入

解得$b=\dfrac{3}{2}$ ，

所以$S=\dfrac{1}{2}ab\sin C=\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$

故选：C ．

8. 已知数列$\{a_n\}$的首项$a_1=a$，其前n项和为S_n，且满足$S_n+S_{n-1}=3n^2+2n+4\,(n\geqslant 2)$，若对任意的$n\in\mathbf{N}^*$，$a_n<a_{n+1}$恒成立，则$a$的取值范围是（ ）．

A. $\left(\dfrac{23}{4},\dfrac{29}{4}\right)$　B. $\left(\dfrac{20}{3},\dfrac{29}{4}\right)$　C. $\left(\dfrac{23}{4},\dfrac{20}{3}\right)$　D. $\left(-\infty,\dfrac{20}{3}\right)$

答案 C

解析 由$S_n+S_{n-1}=3n^2+2n+4(n\geqslant 2)$ ，可以得到$S_{n+1}+S_n=3(n+1)^2+2(n+1)+4$ ，

两式相减得$a_{n+1}+a_n=6n+5$ ，

故$a_{n+2}+a_{n+1}=6n+11$ ，两式再相减得$a_{n+2}-a_n=6$ ，

由$n=2$得$a_1+a_2+a_1=20$ ，$a_2=20-2a$，

故偶数项为以$20-2a$为首项，以6为公差的等差数列，

从而$a_{2n}=6n+14-2a$，

$n=3$得$a_1+a_2+a_3+a_1+a_2=37$ ，$a_3=2a-3$ ，

从而$a_{2n+1}=6n-9+2a$ ，

由条件得$\begin{cases}a<20-2a\\6n+14-2a<6n-9+2a\\6n-9+2a<6(n+1)+14-2a\end{cases}$ ，

解得$\dfrac{23}{4}<a<\dfrac{20}{3}$ ，

故选C ．

填空题（多空题6分，单空题4分，共36分）

9. 已知双曲线$x^2-\dfrac{y^2}{b^2}=1(b>0)$的离心率为$\sqrt{5}$．则$b=$ ______ ，若以$(2,1)$为圆心，r为半径的圆与该双曲线的两条渐近线组成的图形只有一个公共点，则半径$r=$ ______．

答案 1．2

2．$\dfrac{3\sqrt{5}}{5}$

解析 双曲线$x^2-\dfrac{y^2}{b^2}=1(b>0)$ 的$a=1$，$c=\sqrt{1+b^2}$ ，

由题意可得$e=\dfrac{c}{a}=\dfrac{\sqrt{1+b^2}}{1}=\sqrt{5}$ ，

解得$b=2$；

由双曲线$x^2-\dfrac{y^2}{4}=1$ 可得渐近线方程为$y=\pm 2x$ ，

由以$(2,1)$为圆心，r为半径的圆与渐近线$y=2x$ 相切，

可得$d=r$，即$r=\dfrac{|2\times 2-1|}{\sqrt{1+4}}=\dfrac{3\sqrt{5}}{5}$ ．

故答案为：2，$\dfrac{3\sqrt{5}}{5}$ ．

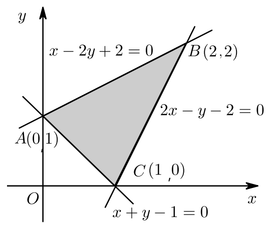
jiaoshi.izhikang.com 2019/03/01

10. 记$z=x+ky+1$，$(k\in\mathbf{R})$，其中x，y满足$\begin{cases}2x-y-2\leqslant 0\\x-2y+2\geqslant 0\\x+y-1\geqslant 0\end{cases}$，若$z$的最大值为3，则实数$k$的值为 ______ ，$z$的最小值为 ______ ．

答案 1．0

2．1

解析 作出约束条件的可行域，如图所示：



（1）若$k=0$，则$z=x+1$，显然当$x=2$时z取得最大值3，符合题意，此时，当$x=0$时，z取得最小值1．

（2）若$k\neq 0$，由$z=x+ky+1$ 得$y=-\frac{1}{k}x+\frac{z-1}{k}$ ．

①若$k>0$，则当直线$y=-\frac{1}{k}x+\frac{z-1}{k}$ 经过点$B(2,2)$时，直线截距最大，即z最大．

$\therefore 3=2+2k+1$ ，解得$k=0$（舍），

②若$k<0$，则当$-\frac{1}{k}\leqslant 2$即$k\leqslant -\frac{1}{2}$时，直线$y=-\frac{1}{k}x+\frac{z-1}{k}$ 经过点$C(1,0)$时，直线截距最小，即z最大．

$\therefore 3=1+0\times k+1$ ，无解．

当$-\frac{1}{k}\geqslant 2$即$-\frac{1}{2}\leqslant k<0$时，直线$y=-\frac{1}{k}x+\frac{z-1}{k}$ 经过点$B(2,2)$时，直线截距最小，即z最大．

$\therefore 3=2+2k+1$ ，解得$k=0$（舍）．

综上，$k=0$ ，z的最小值为1．

故答案为0，1．

11. 下面几个数中：①$3^{0.4}$；②$\frac{1+\tan 15^\circ}{1-\tan 15^\circ}$；③$\log_2 3\cdot\log_9 8$；④$5^{0.2}$；⑤$3^{\frac{1}{3}}$，最大的是 ______ ，最小的是 ______ （请填写对应数的序号）．

答案 1．②

2．④

解析 ①$3^{0.4}=3^{\frac{2}{5}}>3^{\frac{1}{3}}$ ，且$3^{\frac{2}{5}}<3^{\frac{1}{2}}$ ，

②$\frac{1+\tan 15^\circ}{1-\tan 15^\circ}=\tan(45^\circ+15^\circ)=\sqrt{3}=3^{\frac{1}{2}}$ ，

③$\log_2 3\cdot\log_9 8=\frac{\lg 3}{\lg 2}\cdot\frac{3\lg 2}{2\lg 3}=\frac{3}{2}$ ，

④$5^{0.2}=5^{\frac{1}{5}}$

⑤$3^{\frac{1}{3}}$，

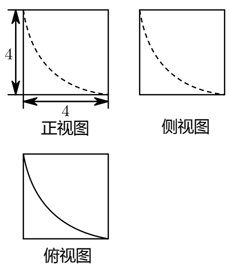
$\therefore$最大的是②，最小的是④．

故答案为：②，④．

12. 如图，某几何体的三视图位置如图所示，则此几何体的体积为 ______ ．（单位：cm^2）．

答案 $64-\frac{32\pi}{3}$

解析 根据几何体的三视图位置，得；



该几何体是棱长为4的正方体，去掉一个半径为4的$\frac{1}{8}$球体，

所以该几何体的体积为：

$V=4^3-\frac{1}{8}\times\frac{4}{3}\pi\cdot 4^3=64-\frac{32\pi}{3}$ ．

故答案为：$64-\frac{32\pi}{3}$ ．

jiaoshi.izhikang.com 2019/03/01

13. 已知正数x，y满足$xy \leqslant 1$，则$M=\frac{1}{1+x}+\frac{1}{1+2y}$的最小值为______．

答案 $2\sqrt{2}-2$

解析 解：由正数x，y满足$xy \leqslant 1$，可得$0<x \leqslant \frac{1}{y}$，

则$M=\frac{1}{1+x}+\frac{1}{1+2y} \geqslant \frac{1}{1+\frac{1}{y}}+\frac{1}{1+2y}=\frac{y}{1+y}+\frac{1}{1+2y}$，

$=1-\frac{1}{1+y}+\frac{1}{1+2y}$，

$=1-\frac{y}{(1+y)(1+2y)}=1-\frac{1}{2y+\frac{1}{y}+3} \geqslant 1-\frac{1}{3+2\sqrt{2y \cdot \frac{1}{y}}}$，

$=1-\frac{1}{3+2\sqrt{2}}=2\sqrt{2}-2$．

当且仅当$y=\frac{\sqrt{2}}{2}$，$x=\sqrt{2}$时，取得最小值$2\sqrt{2}-2$．

故答案为：$2\sqrt{2}-2$．

14. 已知函数$f(x)=x^2+ax+b(a,b \in \mathbf{R})$，对于任意实数$a$，总存在实数$m$，当$x \in [m,m+1]$时，使得$f(x) \leqslant 0$恒成立，则$b$的取值范围为______．

答案 $b \leqslant -\frac{1}{4}$

解析 设$f(x)=x^2+ax+b$，有两根x_1，x_2，

$\therefore 4b<a^2$，$x_1+x_2=-a$，$x_1x_2=b$，

$\because$对于任意实数a，总存在实数m，当$x \in [m,m+1]$时，使得$f(x) \leqslant 0$恒成立，

$\therefore (x_1-x_2)^2 \geqslant 1$恒成立，

$\therefore a^2-1 \geqslant 4b$，

$\therefore b \leqslant -\frac{1}{4}$．

15. 在平面直角坐标系中，定义$\begin{cases} x_{n+1}=x_n-y_n \\ y_{n+1}=x_n+y_n \end{cases}$，$(n \in \mathbf{N}^*)$为点$P_n(x_n,y_n)$到点$P_{n+1}(x_{n+1},y_{n+1})$的一个变换，我们把它称为点变换，已知$P_1(1,0)$，$P_2(x_2,y_2)$，$P_3(x_3,y_3)$，$\ldots$是经过点变换得到的一无穷点列，则$P_3$的坐标为______；设$a_n=\overrightarrow{P_nP_{n+1}} \cdot \overrightarrow{P_{n+1}P_{n+2}}$，则满足$a_1+a_2+\ldots+a_n>1000$的最小正整数$n=$______．

答案 1．$(0,2)$

2．10

解析 由条件得，$P_1(1,0)$，$P_2(1,1)$，$P_3(0,2)$，$P_4(-2,2)$，$P_5(-4,0)$，$P_6(-4,-4)$，$P_7(0,-8)\ldots$；

$\therefore a_1=\overrightarrow{P_1P_2} \cdot \overrightarrow{P_2P_3}=(0,1)\cdot(-1,1)=1$，$a_2=\overrightarrow{P_2P_3}\cdot\overrightarrow{P_3P_4}=(-1,1)\cdot(-2,0)=2$，

$a_3=\overrightarrow{P_3P_4}\cdot\overrightarrow{P_4P_5}=(-2,0)\cdot(-2,2)=4$，$a_4=\overrightarrow{P_4P_5}\cdot\overrightarrow{P_5P_6}=(-2,-2)\cdot(0,-4)=8$，

$a_5=\overrightarrow{P_5P_6}\cdot\overrightarrow{P_6P_7}=(0,-4)\cdot(4,-4)=16$；

$\therefore$数列$\{a_n\}$是首项为1，公比为2的等比数列；

$\therefore a_1+a_2+\ldots+a_n=\frac{1\cdot(1-2^n)}{1-2}=2^n-1$；

$\therefore$由$a_1+a_2+\ldots+a_n>1000$得，$2^n-1>1000$；

$\therefore 2^n>1001$；

$\because 2^9=512$，$2^{10}=1024$；

$\therefore$满足$a_1+a_2+\ldots+a_n>1000$的最小正整数$n=10$．

故答案为：$(0,2)$，10．

解答题：共5小题，满分74分

目录

jiaoshizhikang.com 2019/03/01

16. 已知函数$f(x)=m\sin(\omega x)\cos(\omega x)+n\sin^2(\omega x)(\omega>0)$关于点$\left(\frac{\pi}{12},1\right)$对称．

（1）若$m=4$，求$f(x)$的最小值；

答案 $1-\sqrt{5}$．

解析 $f(x)=m\sin(\omega x)\cos(\omega x)+n\sin^2(\omega x)$

$=\frac{m}{2}\sin(2\omega x)+\frac{n(1-\cos 2\omega x)}{2}=\frac{m\sin(2\omega x)-n\cos(2\omega x)}{2}+\frac{n}{2}$

$=\frac{\sqrt{m^2+n^2}}{2}\sin(2\omega x+\theta)+\frac{n}{2}$．

其中$\cos\theta=\frac{m}{\sqrt{m^2+n^2}}$，$\sin\theta=-\frac{n}{\sqrt{m^2+n^2}}$，

$\because f(x)$ 关于点$\left(\frac{\pi}{12},1\right)$对称，$\therefore\frac{n}{2}=1$，

即$n=2$，且$\frac{2\omega\pi}{12}+\theta=k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$，

$\because m=4$，$\therefore f(x)=\sqrt{5}\sin(2\omega x+\theta)+1$，

$\therefore f(x)_{\min}=1-\sqrt{5}$．

（2）若函数$f(x)$的最小正周期是一个三角形的最大内角的值，又$f(x)\leqslant f\left(\frac{\pi}{4}\right)$对任意实数$x$成立，求函数$f(x)$的解析式，并写出函数$f(x)$的单调递增区间．

答案 $f(x)=\sin 3x-\cos 3x+1=\sqrt{2}\sin\left(3x-\frac{\pi}{4}\right)+1$，$\left[-\frac{\pi}{12}+\frac{2}{3}k\pi,\frac{\pi}{4}+\frac{2}{3}k\pi\right]$，$k\in\mathbf{Z}$．

解析 由$f(x)\leqslant f\left(\frac{\pi}{4}\right)$ 对任意实数x成立，

则$\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{12}=\frac{T}{4}+k\cdot\frac{T}{2}$，$k\in\mathbf{Z}$，$k\geqslant 0$，其中$T$为函数$f(x)$ 的最小正周期，

且$\frac{\pi}{3}\leqslant T<\pi$，得$k=0$，$T=\frac{2\pi}{3}$．

$2\omega=\frac{2\pi}{T}=3$．

$f(x)=\frac{m}{2}\sin 3x-\cos 3x+1$，

由$f\left(\frac{\pi}{12}\right)=\frac{m}{2}\sin\frac{\pi}{4}-\cos\frac{\pi}{4}+1=1$，得$m=2$．

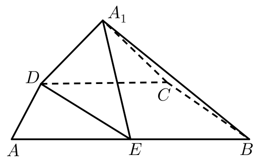
$f(x)=\sin 3x-\cos 3x+1=\sqrt{2}\sin\left(3x-\frac{\pi}{4}\right)+1$．

由$-\frac{\pi}{2}+2k\pi\leqslant 3x-\frac{\pi}{4}\leqslant\frac{\pi}{2}+2k\pi$，得$-\frac{\pi}{12}+\frac{2}{3}k\pi\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{4}+\frac{2}{3}k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$．

$\therefore f(x)$ 的单调增区间为$\left[-\frac{\pi}{12}+\frac{2}{3}k\pi,\frac{\pi}{4}+\frac{2}{3}k\pi\right]$，$k\in\mathbf{Z}$．

jiaoshi.izhikang.com 2019/03/01

17. 已知直角梯形$ABCD$中，$AB//CD$，$\angle A=\frac{\pi}{2}$，$AD=1$，$AB=2CD=4$，E为AB中点，将$\triangle ADE$沿直线DE折起到$\triangle A_1DE$，使得A_1在平面$EBCD$上的射影H在直线CD上．



（1）求证：平面$A_1EC\perp$平面A_1DC.

答案 证明见解析．

解析 证明：过A_1过$A_1H\perp CD$ 交CD 于H，

由A_1在平面$EBCD$ 上的射影在直线CD 上，知$A_1H\perp$ 平面CDE，

$\therefore A_1H\perp CE$，

易得$AD//CE$，又$A=\frac{\pi}{2}$，

所以$CD\perp CE$，$CD\cap A_1H=H$，

$\therefore CE\perp$ 平面A_1CD，

$\because CE\subset$ 平面A_1EC，

$\therefore$平面$A_1EC\perp$ 平面A_1DC．

（2）求平面DEA_1与平面A_1BC所成的锐二面角的余弦值．

目录

目录

答案 $\frac{\sqrt{6}}{4}$

解析 连结AH交DE、BC于M，N，

由$AD=A_1D$，$AE=A_1E$，$\therefore A_1A\perp DE$，

又$A_1H\perp DE$，

$\therefore DE\perp$平面A_1AH，

$\therefore DE\perp A_1M$，$DE\perp A_1N$，$DE\perp AH$，

又$DE//$平面A_1BC，设平面$DEA_1\cap$平面$A_1BC=I$，

$\therefore DE//I$，从而$I\perp A_1M$，$I\perp A_1N$，

$\therefore\angle MA_1N$ 为二面角$E-I-B$的平面角，

$DH=\frac{1}{2}$，$A_1H=\frac{\sqrt{3}}{2}$，$MH=\frac{\sqrt{5}}{10}$，$NH=3MH=\frac{3\sqrt{5}}{10}$，

$\therefore\tan\angle MA_1H=\frac{MH}{A_1H}=\frac{\sqrt{15}}{15}$，

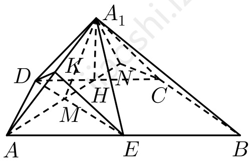
$\tan\angle NA_1H=\frac{NH}{A_1H}=\frac{\sqrt{15}}{5}$，

$\tan\angle MA_1N=\tan(\angle MA_1H+\angle NA_1H)$

$=\frac{\frac{\sqrt{15}}{15}+\frac{3\sqrt{15}}{15}}{1-\frac{\sqrt{15}}{15}\times\frac{3\sqrt{15}}{15}}=\frac{\sqrt{15}}{3}$，

$\therefore\cos\angle MA_1N=\frac{\sqrt{6}}{4}$，

$\therefore$平面DEA_1与平面A_1BC所成的锐二面角的余弦值为$\frac{\sqrt{6}}{4}$．



shiti.izhikang.com 2019/03/01

18. 已知$f(x)=\begin{cases}x^2+ax+1-a(x\geqslant 0)\\f(x+2)(x<0)\end{cases}$．

（1）若$a=-8$，求当$-6\leqslant x\leqslant 5$时，$|f(x)|$的最大值．

答案 9．

解析 当$a=-8$，$f(x)=\begin{cases}x^2-8x+9,(x\geqslant 0)\\f(x+2),(x<0)\end{cases}$，

当$-6\leqslant x<0$ 时，存在$0\leqslant t<2$，使$f(x)=f(t)$，

从而只要求当$0\leqslant x\leqslant 5$ 时，$|f(x)|$ 的最大值，

而$f(x)=x^2-8x+9=(x-4)^2-7$，

$-7\leqslant f(x)\leqslant 9$；

则$|f(x)|\leqslant 9$；

故$|f(x)|$ 的最大值为9．

（2）对于任意实数$x_1(x_1\leqslant 3)$，存在$x_2(x_2\neq x_1)$，使得$f(x_2)=f(x_1)$，求实数a的取值范围．

答案 $a<-6$或$-4<a\leqslant -3$．

解析 若$x_2<2$时，取$x_2=x_1-2$，则$f(x_2)=f(x_1-2)=f(x_1)$；

符合题意；

只要考虑$2\leq x_1\leq 3$，存在$x_2(x_2\neq x_1)$，使得$f(x_2)=f(x_1)$；

①当$-\frac{a}{2}\leq 0$，即$a\geq 0$时，

$f(x)=x^2+ax+1-a$ 在$[0,+\infty]$上单调递增；

故不存在$x_2(x_2\neq x_1)$，$f(x_2)=f(x_1)$；

②当$0<-\frac{a}{2}<2$，即$-4<a<0$ 时，

则只要$f(3)\leq f(0)$，

即$10+2a\leq 1-a$，

2019/03/01

从而解得 $-4 < a \leq -3$ ；

③当$2 \leq -\frac{a}{2} \leq 3$ ，即$-6 \leq a \leq -4$ 时，

取$x_1 = -\frac{a}{2}$ 时，不存在$x_2(x_2 \neq x_1)$ ，使$f(x_2) = f(x_1)$ ；

④当$-\frac{a}{2} > 3$ ，即$a < -6$ 时，

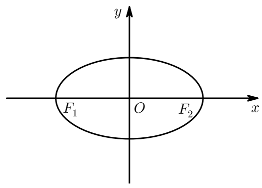
取$x_2 = -a - x_1 > 3$ ，

必有$f(x_2) = f(x_1)$ ，符合题意；

综上所述，$a < -6$ 或$-4 < a \leqslant -3$ ．

目录

19. 已知$F_1(-\sqrt{3},0)$，$F_2(\sqrt{3},0)$为椭圆$C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1(a > b > 0)$的左、右焦点，点$P$在椭圆$C$上，且$\triangle PF_1F_2$面积的最大值为$\sqrt{3}$．



（1）求椭圆C的方程．

答案 $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ ．

解析 由题意可得$c = \sqrt{3}$ ，

当P为短轴的端点时，$\triangle PF_1F_2$ 面积取得最大值$\frac{1}{2} \cdot b \cdot 2c = \sqrt{3}$ ，

解得$b = 1$ ，$a = \sqrt{b^2 + c^2} = 2$ ，

即有椭圆的方程为$\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ ．

（2）若直线l与椭圆C交于A，B两点．$\triangle OAB$的面积为1，$\overrightarrow{OG} = s\overrightarrow{OA} + t\overrightarrow{OB}(s,t \in \mathbf{R})$，当点$G$在椭圆$C$上运动时，试问$s^2 + t^2$是否为定值，若是定值，求出这个定值，若不是定值，求出$s^2 + t^2$的取值范围．

答案 是定值，$s^2 + t^2 = 1$ ．

解析 设直线l的方程为$y = kx + m$ ，代入椭圆方程$x^2 + 4y^2 = 4$ ，

可得$(1 + 4k^2)x^2 + 8kmx + 4m^2 - 4 = 0$ ，

设$A(x_1, y_1)$ ，$B(x_2, y_2)$ ，

即有$x_1 + x_2 = -\frac{8km}{1 + 4k^2}$ ，$x_1x_2 = \frac{4m^2 - 4}{1 + 4k^2}$ ，

$S_{\triangle OAB} = \frac{1}{2}|OA| \cdot |OB| \sin\angle AOB = \frac{1}{2}\sqrt{|OA|^2|OB|^2 - (\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB})^2}$ ，

$= \frac{1}{2}\sqrt{({x_1}^2 + {y_1}^2)({x_2}^2 + {y_2}^2) - (x_1x_2 + y_1y_2)^2} = \frac{1}{2}|x_1y_2 - x_2y_1|$ ，

$= \frac{1}{2}|x_1(kx_2 + m) - x_2(kx_1 + m)| = \frac{1}{2}|m(x_1 - x_2)| = \frac{1}{2}|m| \cdot \sqrt{\frac{64k^2m^2}{(1 + 4k^2)^2} - \frac{16m^2 - 16}{1 + 4k^2}} = 1$ ，

化简可得$1 + 4k^2 = 2m^2$ ，

设$G(x, y)$ ，由$\overrightarrow{OG} = s\overrightarrow{OA} + t\overrightarrow{OB}$ ，可得:

$x = sx_1 + tx_2$ ，$y = sy_1 + ty_2$ ．

又因为点G在椭圆C上，所以有$(sx_1 + tx_2)^2 + 4(sy_1 + ty_2)^2 = 4$ ，

整理可得：$s^2({x_1}^2 + 4{y_1}^2) + t^2({x_2}^2 + 4{y_2}^2) + 2st(x_1x_2 + 4y_1y_2) = 4$ ．

即为$4(s^2 + t^2) + 2st(x_1x_2 + 4y_1y_2) = 4$ ．

由$x_1x_2 = 2 - \frac{2}{m^2}$ ，$x_1 + x_2 = -\frac{4k}{m}$ ，

可得$4y_1y_2 = 4(kx_1 + m)(kx_2 + m) = 4\left[k^2x_1x_2 + km(x_1 + x_2) + m^2\right]$

$= 4k^2 \cdot (2 - \frac{2}{m^2}) + 4km(-\frac{4k}{m}) + 4m^2 = \frac{2}{m^2} - 2$ ，

可得$x_1x_2 + 4y_1y_2 = 0$ ，即有$s^2 + t^2 = 1$ 为定值．

20. 已知在数列$\{a_n\}$中，$a_1 = 1$，$a_{n+1} = \frac{{a_n}^2}{ta_n + 2}$ ．

（1）若$t = 0$，求数列$\{a_n\}$的通项公式．

jiaoshizhikang.com 2019/03/01

答案 $a_n=$

解析 若$t=0$，则$a_{n+1}=\dfrac{{a_n}^2}{2}$ ，

由$a_1=1$ 可知$a_n>0$ ，

从而$\ln a_{n+1}=2\ln a_n-\ln 2$ ，

从而$\ln a_{n+1}-\ln 2=2(\ln a_n-\ln 2)$ ，即$\ln\dfrac{a_{n+1}}{2}=2\ln\dfrac{a_n}{2}$ ，

又$\because\ln\dfrac{a_1}{2}=\ln 2^{-1}$ ，

$\therefore$数列$\left\{\ln\dfrac{a_n}{2}\right\}$是首项为$\ln 2^{-1}$、公比为$2$的等比数列，

$\therefore\ln\dfrac{a_n}{2}=2^{n-1}\ln 2^{-1}=\ln 2^{-2^{n-1}}$ ，即$a_n=2^{1-2^{n-1}}$.

（2）若$t=1$，求证：$\dfrac{2}{3}\leqslant\dfrac{2a_1}{a_1+2}+\dfrac{4a_2}{a_2+2}+\dfrac{6a_3}{a_3+2}+\cdots+\dfrac{2na_n}{a_n+2}<\dfrac{3}{2}$.

答案 证明见解析 .

解析 首先，由$a_1=1$ ，$a_{n+1}=\dfrac{{a_n}^2}{a_n+2}$ ，可知$a_n>0$ ，

则：$\dfrac{2a_1}{a_1+2}+\dfrac{4a_2}{a_2+2}+\cdots+\dfrac{2na_n}{a_n+2}\geqslant\dfrac{2a_1}{a_1+2}=\dfrac{2}{3}$ ，

$\because a_{n+1}-a_n=\dfrac{-2a_n}{a_n+2}<0$ ，

$\therefore$数列$\{a_n\}$是递减数列，

$\therefore\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=\dfrac{a_n}{a_n+2}=1-\dfrac{2}{a_n+2}\leqslant 1-\dfrac{2}{a_1+2}=\dfrac{1}{3}$ ，即$a_{n+1}\leqslant\dfrac{1}{3}a_n$ ，

$\therefore a_n\leqslant\dfrac{1}{3^{n-1}}a_1=\dfrac{1}{3^{n-1}}$ ，

又$\because a_{n+1}-a_n=\dfrac{{a_n}^2}{a_n+2}-a_n=-\dfrac{2a_n}{a_n+2}$ ，

$\therefore\dfrac{2a_1}{a_1+2}+\dfrac{4a_2}{a_2+2}+\cdots+\dfrac{2na_n}{a_n+2}=(a_1-a_2)+2(a_2-a_3)+3(a_3-a_4)+\cdots+n(a_n-a_{n+1})$

$=a_1+a_2+a_3+a_4+\cdots+a_n-na_{n+1}$

$<1+\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{3^2}+\cdots+\dfrac{1}{3^{n-1}}=\dfrac{1-\dfrac{1}{3^n}}{1-\dfrac{1}{3}}<\dfrac{3}{2}$ ，

综上所述：$\dfrac{2}{3}\leqslant\dfrac{2a_1}{a_1+2}+\dfrac{4a_2}{a_2+2}+\dfrac{6a_3}{a_3+2}+\cdots+\dfrac{2na_n}{a_n+2}<\dfrac{3}{2}$.

jiaoshi.izhikang.com 2019/03/01