学生版　教师版　答案版　　编辑

目录

选择题：每题4分,共40分
填空题：每题6分,共36分
解答题 ：共5小题，共74分

选择题：每题4分,共40分

1. 已知$U=\mathbf{R}$，集合$A=\{x|-1<x<1\}$，则$\complement_U A=$（　　）．

A. $(-1,1)$　　B. $(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$

C. $[-1,1]$　　D. $(-\infty,-1]\cup[1,+\infty)$

答案　D

解析　$\because U=\mathbf{R}$，集合$A=\{x|-1<x<1\}$　，

$\therefore \complement_U A=\{x|x\geqslant 1$ 或$x\leqslant -1\}(-\infty,-1]\cup[1,+\infty)$　，

故选D．

+试题篮　纠错　添加空白

jiaoshi.izhikang.com 2019/03/01

2. 已知定义在复数集C上的函数$f(x)$满足$f(x)=\begin{cases}1+x,x\in\mathbf{R}\\(1-\mathrm{i})x,x\notin\mathbf{R}\end{cases}$，则$f(1+\mathrm{i})$等于（　）．

A. -2　　B. 0　　C. 2　　D. $2+\mathrm{i}$

答案　C

解析　$f(1+\mathrm{i})=(1-\mathrm{i})(1+\mathrm{i})=2$．

3. 已知互相垂直的平面α，β交于直线l，若直线m，n满足$m//\alpha$，$n\perp\beta$，则（　）．

A. $m//l$　　B. $m//n$　　C. $n\perp l$　　D. $m\perp n$

答案　C

解析　方法一：m位于与α平行的平面内，A错误 ；

由线面垂直的定义，C正确；

m和n可以平行，D错误．

方法二：由题意知$\alpha\cap\beta=l$　，$\therefore l\subset\beta$ $\because n\perp\beta$，$\therefore n\perp l$ ．

故选C ．

4. 对任意的实数有$x^4=a_0+a_1(x-2)+a_2(x-2)^2+\cdots+a_4(x-2)^4$，则$a_2$等于（　　）．

A. 24　　B. 16　　C. 8　　D. 32

答案　A

解析　对任意的实数有$x^4=a_0+a_1(x-2)+a_2(x-2)^2+\cdots+a_4(x-2)^4=[2+(x-2)]^4$　　，

故$a_2=\mathrm{C}_4^2\cdot 2^2=24$　，

故选A ．

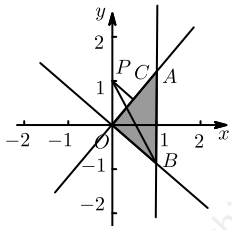
5. 已知实数x，y满足$\begin{cases}y\leqslant x\\y\geqslant -x\\x\leqslant 1\end{cases}$，则$x^2+y^2-2y$的取值范围为（　　）．

A. $\left[\frac{\sqrt{2}}{2},\sqrt{5}\right]$　　B. $\left[\frac{1}{2},5\right]$　　C. $\left[-\frac{1}{2},4\right]$　　D. $[0,4]$

答案　C

解 析 实数x，y满$\begin{cases} y \leqslant x \\ \end{cases}$的可行域如图所示：由可行域$A(1,1)$，$B(1,-1)$，

目标函数$z=x^2+y^2-2y$ 的几何意义是可行域内的点到点$(0,1)$距离的平方减1由图形可知仅在点$B(1,-1)$，



取得最大值，$z=1+1+2=4$ ．

由图知，原点到直线$x-y=0$ 的距离最小，

$d=\frac{1}{\sqrt{2}}$ ，

可得$z=x^2+y^2-2y=d^2-1=-\frac{1}{2}$ ．

则$z=x^2+y^2+2y$ 取值范围为$\left[-\frac{1}{2},4\right]$，

故选C ．

目录

选择题：每题4分,共40分

填空题：每题6分,共36分

解答题 ：共5小题，共74分

6. 将函数$y=\sin x\cos x$的图象沿直线$y=\sqrt{3}x$向左下方平移两个单位，得到$y=f(x)$，则$f(x)$的解析式为（　　）．

A. $y=2\sin(2x+2)-\sqrt{3}$　　B. $y=2\sin(2x+1)-\sqrt{3}$

C. $y=\frac{1}{2}\sin(2x+2)-\sqrt{3}$　　D. $y=\frac{1}{2}\sin(2x+1)-\sqrt{3}$

答案　C

解 析　将函数$y=\sin x\cos x=\frac{1}{2}\sin 2x$ 的图象沿着直线$y=\sqrt{3}x$ 的方向向左下方平移两个单位，

相当于把函数$y=f(x)$ 的图象向右左平移1个单位，再向下平移$\sqrt{3}$个单位，

故把函数$y=f(x)$ 的图象向左平移1个单位，再向下平移$\sqrt{3}$个单位，得到$y=\frac{1}{2}\sin 2(x+1)-\sqrt{3}$ 的图象，

则$f(x)$ 的解析式为$f(x)=\frac{1}{2}\sin(2x+2)-\sqrt{3}$ ，

故选C ．

7. 若$|y-x^2|=4x$，$0<x<2$，则实数y的取值范围为（　　）．

A. $(-4,0)$　　B. $(0,12)$　　C. $(-4,12)$　　D. $(-4,0)\cup(0,12)$

答案　D

解 析　$|y-x^2|=4x$ 可化为$\begin{cases} y \geqslant x^2 \\ y=x^2+4x \end{cases}$ 或$\begin{cases} y<x^2 \\ y=x^2-4x \end{cases}$ ．

$\Rightarrow y=x^2+4x$ ，$(0<x<2)$ 或$y=x^2-4x$ ，$(0<x<2)$

$\Rightarrow 0<y<12$ ，或$-4<y<0$ ．

$\therefore$实数y的取值范围为$(-4,0)\cup(0,12)$ ，

故选D ．

8. 设a，b，c是不全相等的实数，随机变量ξ取值为a，b，c的概率都是$\frac{1}{3}$，随机变量η取值为$\frac{a+b}{2}$，$\frac{b+c}{2}$，$\frac{c+a}{2}$的概率也都是$\frac{1}{3}$，则（　　）．

A. $E\xi<E\eta$，$D\xi<D\eta$　　B. $E\xi=E\eta$，$D\xi>D\eta$

C. $E\xi<E\eta$，$D\xi=D\eta$　　D. $E\xi=E\eta$，$D\xi=D\eta$

答案　B

解 析　随机变量ξ取值为a，b，c的概率都是$\frac{1}{3}$，

$\therefore E\xi=\frac{1}{3}(a+b+c)$ ；

设$t=\frac{1}{3}(a+b+c)$ ，

jiaoshi.izhikang.com 2019/03/01

目录

选择题：每题4分,共40分

填空题：每题6分,共36分

解答题 ：共5小题，共74分

则$D\xi=\frac{1}{3}[(a-t)^2+(b-t)^2+(c-t)^2]$

$=\frac{1}{3}[a^2+b^2+c^2-2(a+b+c)t+3t^2]$

$=\frac{1}{3}[a^2+b^2+c^2-6t+3t^2]$ ；

随机变量η取值为$\frac{a+b}{2}$ ，$\frac{b+c}{2}$ ，$\frac{c+a}{2}$ 的概率都是$\frac{1}{3}$，

$\therefore E\eta=\frac{1}{3}\left(\frac{a+b}{2}+\frac{b+c}{2}+\frac{c+a}{2}\right)=\frac{1}{3}(a+b+c)$ ，

$D\eta=\frac{1}{3}\left[\left(\frac{a+b}{2}-t\right)^2+\left(\frac{b+c}{2}-t\right)^2+\left(\frac{c+a}{2}-t\right)^2\right]$

$=\frac{1}{3}\left[\left(\frac{a+b}{2}\right)^2+\left(\frac{b+c}{2}\right)^2+\left(\frac{c+a}{2}\right)^2-6t+3t^2\right]$ ；

由a，b，c是不全相等的实数，

$\therefore(a^2+b^2+c^2)-\left[\left(\frac{a+b}{2}\right)^2+\left(\frac{b+c}{2}\right)^2+\left(\frac{c+a}{2}\right)^2\right]$

$=\left(\frac{a-b}{2}\right)^2+\left(\frac{b-c}{2}\right)^2+\left(\frac{c-a}{2}\right)^2>0$ ，

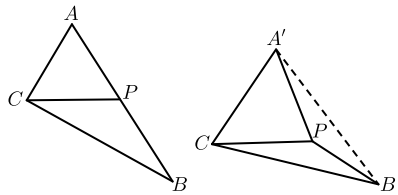
$\therefore a^2+b^2+c^2>\left(\frac{a+b}{2}\right)^2+\left(\frac{6+c}{2}\right)^2+\left(\frac{c+a}{2}\right)^2$ ，

$\therefore D\xi>D\eta$ ．

综上，$E\xi=E\eta$ ，$D\xi>D\eta$ ．

故选B ．

9. 如图，P是$\triangle ABC$边AB上一点，将$\triangle ACP$沿CP折成直二面角$A'-CP-B$，要使$|A'B|$最短，则CP是（　　）．



A. $\triangle ABC$中AB边上的中线

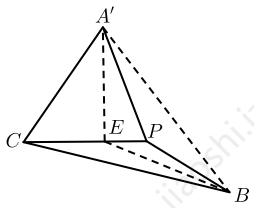
B. $\triangle ABC$中AB边上的高线

C. $\triangle ABC$中$\angle ACB$的平分线

D. 要视$\triangle ABC$的具体情况而定

答案　C

解析　如图所示，作$A'E\perp CP$ ，垂足为E ．



$\because$直二面角$A'-CP-B$ ，

$\therefore A'E\perp$ 平面BCP ．

时$AC=b$ ，$BC=a$ ，$\angle ACB=\alpha$ ．

设$\angle ACP=\theta$ ．则$A'E=b\sin\theta$ ，$CE=b\cos\theta$ ．

$BE^2=b^2\cos^2\theta+a^2-2ab\cos\theta\cos(\alpha-\theta)$ ，

$\therefore A'B^2=(A'E)^2+BE^2$ ，

$=b^2\sin^2\theta+b^2\cos^2\theta+a^2-2ab\cos\theta\cos(\alpha-\theta)$

$=b^2+a^2-2ab\cos\theta\cos(\alpha-\theta)$ ，

$\because\cos\theta\cos(\alpha-\theta)=\cos\theta(\cos\alpha\cos\theta+\sin\alpha\sin\theta)$

$=\cos\alpha\cos^2\theta+\frac{1}{2}\sin\alpha\sin2\theta$

$=\cos\alpha\frac{1+\cos2\theta}{2}+\frac{1}{2}\sin\alpha\sin2\theta$

$=\frac{1}{2}\cos\alpha+\frac{1}{2}\cos(\alpha-2\theta)$ ．

$\therefore A'B^2=b^2+a^2-ab\cos\alpha-ab\cos(\alpha-2\theta)$ ，

当且仅当$\cos(\alpha-2\theta)=1$ 时，即$\alpha=2\theta$时，即CP为$\angle ACB$的平分线时，$|A'B|$最短．

故选C ．

jiaoshi.izhikang.com 2019/03/0

目录

选择题：每题4分,共40分

填空题：每题6分,共36分

解答题 ：共5小题，共74分

10. 已知数列$\{a_n\}$，$\{b_n\}$的通项公式为：$a_n=4n+1$，$b_n=3^n\,(n\in\mathbf{N}^*)$，在数列$\{a_n\}$中存在连续的$k(k>1,k\in\mathbf{N}^*)$项和是数列$\{b_n\}$中的某一项，则$k$的取值集合为（　　）．

A. $\{k|k=2^\alpha,\alpha\in\mathbf{N}^*\}$　　B. $\{k|k=3^\alpha,\alpha\in\mathbf{N}^*\}$

C. $\{k|k=2\alpha,\alpha\in\mathbf{N}^*\}$　　D. $\{k|k=3\alpha,\alpha\in\mathbf{N}^*\}$

答案　B

解析　$a_n=4n+1$，

$\therefore a_m=4m+1$，

$\therefore a_{m+k-1}=4(m+k-1)+1$，

$\therefore$数列$\{a_n\}$中存在连续的$k(k>1,k\in\mathbf{N}^*)$项和$\dfrac{k(4m+1+4m+4k-3)}{2}$，

$\because$数列$\{a_n\}$中存在连续的$k(k>1,k\in\mathbf{N}^*)$项和是数列$\{b_n\}$中的某一项，

$\therefore\dfrac{k(4m+1+4m+4k-3)}{2}=3^n$，$k(4m+2k-1)=3^n$．

令$k=3^p$，$n=3p$．

则上式变为：$4m+2\times3^p-1=9^p$，

$\therefore m=\dfrac{(8+1)^p-2(4-1)^p+1}{4}=\dfrac{4M+[2+2(-1)^{p+1}]}{4}$　为整数．

因此k的取值集合为$\{k|k=3^\alpha,\alpha\in\mathbf{N}^*\}$．

故选B．

填空题：每题6分,共36分

11. 已知抛物线$x^2=8y$的准线方程为 _____ ；焦点坐标为 _____ ．

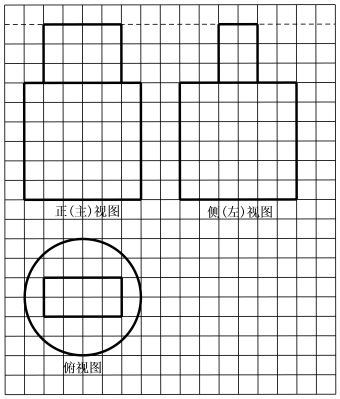
答案　1．$y=-2$

2．$(0,2)$

解析　抛物线$x^2=8y$中$p=4$，则抛物线的准线方程为$y=-2$，焦点坐标为$(0,2)$，

故答案为：$y=-2$，$(0,2)$．

12. “榫卯”是我国古代工匠极为精巧的发明，它是在两个构件上采用凹凸部位相结合的一种连接方式．我国的北京紫禁城，山西悬空寺，福建宁德的廊桥等建筑都用到了榫卯结构．图中网格小正方形的边长为1，粗实线画出的是一种榫卯构件中榫的三视图，则其体积为 _____ ；表面积分别为 _____ ．

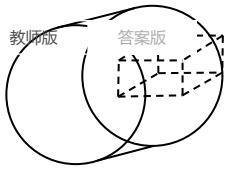


答案　1．$24+54\pi$

2．$54\pi+36$

解析　依题意，该几何体由一个长方体和一个圆柱体拼接而成，

jiaoshi.zhikang.com 2019/03/01



故其体积$V=4\times2\times3+\pi\times3^2\times6=24+54\pi$ ；

表面积$S=2\times\pi\times3^2+2\times\pi\times3\times6+4\times3\times2+2\times2\times3=54\pi+36$.

故答案为：$24+54\pi$ ，$54\pi+36$.

目录

选择题：每题4分,共40分

填空题：每题6分,共36分

解答题 ：共5小题，共74分

13. 已知数列$\{a_n\}$是正项等比数列，满足$\log_2 a_{n+1}=1+\log_2 a_n(n\in\mathbf{N}^*)$，且$a_1+a_2+a_3+a_4+a_5=2$，则公比$q=$ _____ ；$\log_2(a_{51}+a_{52}+a_{53}+a_{54}+a_{55})=$ _____ .

答案 1．2

2．51

解析 数列$\{a_n\}$是正项等比数列，满足$\log_2 a_{n+1}=1+\log_2 a_n(n\in\mathbf{N}^*)$ ，

$\therefore\log_2\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=1$ ，可得$q=2$.

$\because a_1+a_2+a_3+a_4+a_5=2$ ，

$\therefore\dfrac{a_1\left(2^5-1\right)}{2-1}=2$ ，解得$a_1=\dfrac{2}{31}$.

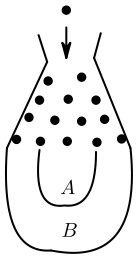
$\therefore\log_2(a_{51}+a_{52}+a_{53}+a_{54}+a_{55})$

$=\log_2\left[\dfrac{2}{31}\times\left(2^{50}+2^{51}+2^{52}+2^{53}+2^{54}\right)\right]$

$=\log_2 2^{51}=51$.

故答案为：2，51 .

14. 将一个半径适当的小球放入如图所示的容器最上方的入口处，小球将自由下落．小球在下落的过程中，将3次遇到黑色障碍物，最后落入A袋或B袋中．已知小球每次遇到黑色障碍物时，向左、右两边下落的概率都是$\dfrac{1}{2}$，则小球落入A袋中的概率为 _____ .



答案 $\dfrac{3}{4}$

解析 方法一：记小球落入B袋中的概率$P(B)$ ，则$P(A)+P(B)=1$ ，

由于小球每次遇到黑色障碍物时一直向左或者一直向右下落，小球将落入B袋，

所以有$P(B)=\left(\dfrac{1}{2}\right)^3+\left(\dfrac{1}{2}\right)^3=\dfrac{1}{4}$ ，

$\therefore P(A)=1-P(B)=\dfrac{3}{4}$.

方法二：由于小球每次遇到障碍物时，有一次向左和两次向右或两次向左和一次向右下落时小球将落下A袋．

$\therefore P(A)=\mathrm{C}_3^1\left(\dfrac{1}{2}\right)^3+\mathrm{C}_3^2\left(\dfrac{1}{2}\right)^3=\dfrac{3}{4}$ ；

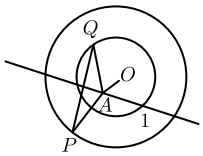
故答案为：$\dfrac{3}{4}$.

15. 已知两个同心圆的半径分别为3和4，圆心为O．点P、Q分别是大圆、小圆上的任意一点，线段PQ的中垂线为l．若光线从点O射出，经直线l（入射光线与直线l的公共点为A）反射后经过点Q，则$|OA|-|AQ|$的取值范围是 _____ .

jiaoshi.jikang.com 2019/03/01

答案 $[-4,3]$

解析 线段PQ的中垂线为l，



可得$|AP|=|AQ|$，

且Q关于l的对称点为P，

可得$|OA|+|AQ|\geqslant|OP|=4$，

即有$||OA|-|AQ||=||OA|-|AP|<|OP|=4$，

则$-4\leqslant|OA|-|AQ|<4$，

但$|OA|-|AQ|\leqslant|OQ|=3$，

故答案为：$[-4,3]$．

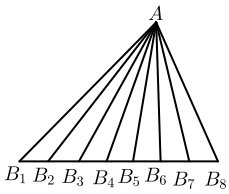
目录

选择题：每题4分,共40分

填空题：每题6分,共36分

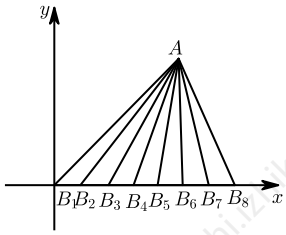
解答题 ：共5小题，共74分

16. 如图，在$\triangle AB_1B_8$中，已知$\angle B_1AB_8=\frac{\pi}{3}$，$AB_1=6$，$AB_8=4$，点$B_2$，$B_3$，$B_4$，$B_5$，$B_6$，$B_7$分别为边$B_1B_8$的7等分点，则当$i+j=9(1\leqslant i\leqslant 8)$时，$\overrightarrow{AB_i}\cdot\overrightarrow{AB_j}$的最大值为 _____ ．



答案 $\frac{132}{7}$

解析 如图所示，



由余弦定理可得：B1B8=$B_1B_8=\sqrt{6^2+4^2-2\times6\times4\times\cos\frac{\pi}{3}}=2\sqrt{7}$ ．

$\cos\angle AB_1B_8\frac{6^2+(2\sqrt{7})^2-4^2}{2\times6\times2\sqrt{7}}=\frac{2\sqrt{7}}{7}$ ，

$\therefore\sin\angle AB_1B_8=\sqrt{1-\cos^2\angle AB_1B_8}=\frac{\sqrt{21}}{7}$ ．

$\therefore A\left(\frac{12\sqrt{7}}{7},\frac{6\sqrt{21}}{7}\right)$ ．

$B_1(0,0)$，$B_2\left(\frac{2\sqrt{7}}{7},0\right)$，$B_3\left(\frac{4\sqrt{7}}{7},0\right)$，$B_4\left(\frac{6\sqrt{7}}{7},0\right)$，$B_5\left(\frac{8\sqrt{7}}{7},0\right)$，$B_6\left(\frac{10\sqrt{7}}{7},0\right)$，$B_7\left(\frac{12\sqrt{7}}{7},0\right)$，$B_8(2\sqrt{7},0)$ ．

$\therefore\overrightarrow{AB_1}\cdot\overrightarrow{AB_8}=6\times4\times\cos\frac{\pi}{3}=12k$ ．

$\overrightarrow{AB_2}\cdot\overrightarrow{AB_7}=(-\frac{10\sqrt{7}}{7},-\frac{6\sqrt{7}}{7})\cdot\left(0,-\frac{6\sqrt{21}}{7}\right)=\frac{108}{7}$ ．

同理可得：$\overrightarrow{AB_3}\cdot\overrightarrow{AB_6}=\frac{124}{7}$，$\overrightarrow{AB_4}\cdot\overrightarrow{AB_5}=\frac{132}{7}$ ．

故答案为：$\frac{132}{7}$ ．

jiaoshi.zikang.com 2019/03/01

17. 已知a，b，$c\in\mathbf{R}$，$a+b+c=3$，$a\geqslant b\geqslant c$，方程$ax^2+bx+c=0$有实根，则a的最小值为 _____ ．

答案 $\frac{4}{3}$

解析 $\because a+b+c=3$，$a\geqslant b\geqslant c$，

$\therefore 3a \geqslant 3$ ，即$a \geqslant 1$

$\because ax^2+bx+c=0$ 有实数根，

$\therefore \Delta = b^2-4ac \geqslant 0$ ，

将$c=3-a-b$ 代入$b^2-4ac \geqslant 0$ 得$(b+2a)^2 \geqslant 12a$ ，

即有$b \geqslant 2\sqrt{3a}-2a$ 或$b \leqslant -2\sqrt{3a}-2a$ ，

得一定有$a \geqslant 2\sqrt{3a}-2a$ 或$3-a-c \leqslant -2\sqrt{3a}-2a$ ，即$3+a+2\sqrt{3a} \leqslant c$ ，

$\because a \geqslant c$ ，$a \geqslant 1$ ，

$\therefore 3+a+2\sqrt{3a} \leqslant c$ 不成立，舍去；

$\therefore 3a \geqslant 2\sqrt{3a}$ ，可得$a \geqslant \frac{4}{3}$ ，

则a的最小值为$\frac{4}{3}$.

故答案为：$\frac{4}{3}$.

目录

选择题：每题4分,共40分

填空题：每题6分,共36分

解答题 ：共5小题，共74分

解答题 ：共5小题，共74分

18. 已知向量$\vec{m}=(\sqrt{3}\sin x,\sin x)$，$\vec{n}=(\cos x,\sin x)$，函数$f(x)=\vec{m}\cdot\vec{n}-\frac{1}{2}\cdot(x\in\mathbf{R})$.

（1）求函数$f(x)$的最大值和单调递增区间 .

答案 $\left[-\frac{\pi}{6}+k\pi,\frac{\pi}{3}+k\pi\right]$ ，$k\in\mathbf{Z}$.

解析 $f(x)=\vec{m}\cdot\vec{n}-\frac{1}{2}$

$=\sqrt{3}\sin x\cos x+\sin^2 x-\frac{1}{2}$

$=\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2x-\frac{1}{2}\cos 2x=\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)$ ，

$\because -1\leqslant\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)\leqslant 1$ ，

$\therefore f(x)$ 的最大值为1 ，

$\because -\frac{\pi}{2}+2k\pi\leqslant 2x-\frac{\pi}{6}\leqslant\frac{\pi}{2}+2k\pi$ ，$k\in\mathbf{Z}$ ，

$\therefore -\frac{\pi}{6}+k\pi\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{3}+k\pi$ ，$k\in\mathbf{Z}$ ，

故函数$f(x)$ 的单调递增区间为$\left[-\frac{\pi}{6}+k\pi,\frac{\pi}{3}+k\pi\right]$ ，$k\in\mathbf{Z}$.

（2）在$\triangle ABC$中，角A，B，C所对边分别为a，b，c，满足$b^2=ac$且$f(B)=\frac{1}{2}$，求$\frac{1}{\tan A}+\frac{1}{\tan C}$值 .

答案 2 .

解析 $\because b^2=ac$ ，

$\therefore \cos B=\frac{a^2+c^2-b^2}{ac}=\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}\geqslant\frac{2ac-ac}{2ac}=\frac{1}{2}$ ，

$\therefore 0<B<\frac{\pi}{3}$.

$\because f(B)=\frac{1}{2}$ ，

$\therefore \sin\left(2B-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{2}$ ，

$\therefore 2B-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{6}$ 或$2B-\frac{\pi}{6}=\frac{5\pi}{6}$ ，

解得$B=\frac{\pi}{6}$或$B=\frac{\pi}{2}$（舍去），

$\therefore A+C=\pi-\frac{\pi}{6}=\frac{5\pi}{6}$ ，

$\therefore \sin(A+C)=\sin A\cos C+\cos A\sin C=\sin\frac{5\pi}{6}=\frac{1}{2}$ ，

把$b^2=ac$，利用正弦定理化简得：$\sin^2 B=\sin A\sin C$ ，

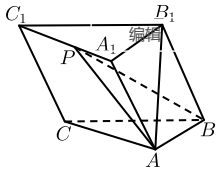
$\therefore \sin A\sin C=\frac{1}{4}$ ，

$\therefore \frac{1}{\tan A}+\frac{1}{\tan C}=\frac{\cos A}{\sin A}+\frac{\cos C}{\sin C}$

$=\frac{\sin C\cos A+\cos C\sin A}{\sin A\sin C}=\frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{4}}=2$.

19. 如图，在三棱柱$ABC-A_1B_1C_1$中，$AB\perp BC$，$AB_1\perp$平面ABC，且$AB=BC=AB_1=2$.

jiaoshi.izikang.com/2019/03/01



（1）证明：平面$C_1CBB_1\perp$平面A_1ABB_1．

答案　证明见解析．

解析　$\because B_1A\perp$ 平面ABC，

$\therefore B_1A\perp BC$，

又$\because AB\perp BC$，$AB\cap BC=B$，

$\therefore BC\perp$ 平面A_1ABB_1，

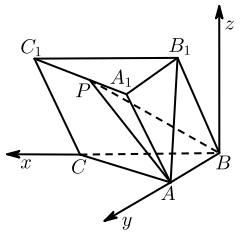
又$\because BC\subset$ 平面C_1CBB_1，

$\therefore$平面$C_1CBB_1\perp$ 平面A_1ABB_1．

（2）若点P为A_1C_1的中点，求直线BP与平面A_1ACC_1所成角的正弦值．

答案　$\frac{\sqrt{399}}{21}$．

解析　过B点作$BM\perp$平面ABC，则$BM\perp BA$，$BM\perp BC$，分别以$\overrightarrow{BC}$，$\overrightarrow{BA}$，$\overrightarrow{BM}$为x，y，z轴的非负向量建立空间直角坐标系$B-xyz$，



则$B(0,0,0)$，$B_1(0,2,2)$，

$\because \overrightarrow{AA_1}=\overrightarrow{BB_1}=\overrightarrow{CC_1}=(0,2,2)$，

$\therefore A_1(0,4,2)$，$C_1(2,2,2)$，$P(1,3,2)$，

$\therefore \overrightarrow{AC}=(2,-2,0)$，$\overrightarrow{BP}=(1,3,2)$，

设$\vec{n}=(x,y,z)$ 为平面A_1ACC_1 的一个法向量，

则$\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{AC}=0\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{AA_1}=0\end{cases}$，即$\begin{cases}2x-2y=0\\ 2y+2z=0\end{cases}$，取$x=1$，解得：$y=1$，$z=-1$，

$\therefore \vec{n}=(1,1,-1)$，

故直线BP与平面A_1ACC_1 所成角的余弦值为$|\cos<\vec{n},\overrightarrow{BP}>|=|\frac{1+3-2}{\sqrt{3}\times\sqrt{14}}|=\frac{\sqrt{42}}{21}$，

$\sin<\vec{n},\overrightarrow{BP}>=\sqrt{1-(\frac{\sqrt{42}}{21})^2}=\frac{\sqrt{399}}{21}$．

20. 已知函数$f(x)=lnx-2\sqrt{x}$．

（1）当$x>1$时，证明：$f(x)<-\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt{x}}$．

答案　证明见解析．

解析　$f(x)+\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}=\ln x-\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}$，

令$g(x)=\ln x-\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}$，

$\therefore g'(x)=\frac{1}{x}-\frac{1}{2\sqrt{x}}-\frac{1}{2x\sqrt{x}}=\frac{2\sqrt{x}-x-1}{2x\sqrt{x}}$，

令$h(x)=2\sqrt{x}-x-1$，

$\therefore h'(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}-1<0$ 恒成立，

$\therefore h(x)$ 在$(1,+\infty)$ 单调递减，

$\therefore h(x)<h(1)=2-1-1=0$，

目录

选择题：每题4分,共40分
填空题：每题6分,共36分
解答题 ：共5小题，共74分

jiaoshi.zhikang.com 2019/03/01

$\therefore g'(x)>0$ 恒成立，

$\therefore g(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 单调递减，

$\therefore g(x)<g(1)=0-1+1=0$ ，

$\therefore f(x)+\sqrt{x}+\dfrac{1}{\sqrt{x}}=\ln x-\sqrt{x}+\dfrac{1}{\sqrt{x}}<0$ ，

$\therefore f(x)<-\sqrt{x}-\dfrac{1}{\sqrt{x}}$.

（2）当 $\dfrac{1}{4}\leqslant x\leqslant 1$ 时，证明：$f(x)\geqslant \dfrac{2}{3}x-\dfrac{8}{3}$.

答案 证明见解析 .

解析 要证 $f(x)\geqslant \dfrac{2}{3}x-\dfrac{8}{3}$ ，

只要证 $\ln x-2\sqrt{x}-\dfrac{2}{3}x+\dfrac{8}{3}\geqslant 0$ ，

$\varphi(x)=\ln x-2\sqrt{x}-\dfrac{2}{3}x+\dfrac{8}{3}$ ，

$\therefore \varphi'(x)=\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{\sqrt{x}}-\dfrac{2}{3}=\dfrac{3-3\sqrt{x}-2x}{3x}$ ，

令 $m(x)=-2x-3\sqrt{x}+3$ ，

易知 $m(x)$ 在 $\left[\dfrac{1}{4},1\right]$ 上单调递减，

$\therefore m(1)\leqslant m(x)\leqslant m\left(\dfrac{1}{4}\right)$ ，

$\therefore -2\leqslant m(x)\leqslant 1$ ，

$\therefore$ 存在 $x_0\in\left[\dfrac{1}{4},1\right]$ ，使得 $\varphi'(x_0)=0$ ，

当 $x\in\left[\dfrac{1}{4},x_0\right]$ ，$\varphi'(x)>0$ ，函数单调递增，当 $x\in(x_0,1]$ ，$\varphi'(x)<0$ ，函数单调递减，

$\because \varphi=(1)=-2-\dfrac{2}{3}+\dfrac{8}{3}=0$ ，$\varphi\left(\dfrac{1}{4}\right)=\ln\dfrac{1}{4}-1-\dfrac{1}{6}+\dfrac{8}{3}=\dfrac{3}{2}-\ln 4>0$ ，

$\therefore \varphi(x)\geqslant 0$ 恒成立，

故 $f(x)\geqslant \dfrac{2}{3}x-\dfrac{8}{3}$.

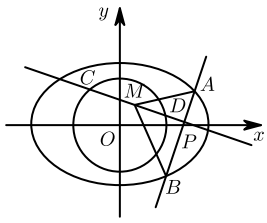
目录

选择题：每题4分,共40分

填空题：每题6分,共36分

解答题 ：共5小题，共74分

21. 已知 F_1，F_2 为椭圆 $C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\,(a>b>0)$ 的左、右焦点，离心率 $e=\dfrac{1}{2}$，椭圆上的点作以 F_1F_2 为直径的圆 O 的切线，切线长最短为 $\sqrt{2}$.



（1）求椭圆 C 的方程 .

答案 $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$.

解析 $\because F_1$，F_2 为椭圆 $C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\,(a>b>0)$ 的左、右焦点，离心率 $e=\dfrac{1}{2}$ ，

椭圆上的点作以 F_1F_2 为直径的圆 O 的切线，切线长最短为 $\sqrt{2}$，

设椭圆上的点为 (x,y) ，可得切线长为 $\sqrt{x^2+y^2-c^2}$ ，

当 (x,y) 为椭圆短轴上的点时，切线长最短，且 $\sqrt{b^2-c^2}$ ，

$\therefore \begin{cases} e=\dfrac{c}{a}=\dfrac{1}{2} \\ b^2-c^2=2 \\ a^2=b^2+c^2 \end{cases}$ ，解得 $a=2$，$b=\sqrt{3}$，$c=1$，

$\therefore$ 椭圆 C 的方程为 $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$.

（2）设斜率存在且不为零的直线 $l_1:x=ty+m(m>1)$ 交椭圆 C 于 A，B 两点，与 x 轴交于点 P，过点 P 与 l_1 垂直的直线 l_2 交圆 O 于 C，D 两点，M 为线段 CD 中点，求 $\triangle MAB$ 面积最大时 m 的取值范围 .

答案 $\left(\sqrt{2},\sqrt{\dfrac{3+\sqrt{7}}{2}}\right)$.

jiaoshi.izhikang.com 2019/03/01

目录

选择题：每题4分,共40分

填空题：每题6分,共36分

解答题 ：共5小题，共74分

解析 由$x=ty+m$联立椭圆方程可得$(4+3t^2)y^2+6tmy+3m^2-12=0$ ，

$\Delta=36t^2m^2-4(4+3t^2)(3m^2-12)>0$ ，

可得$y_A+y_B=-\dfrac{6tm}{4+3t^2}$ ，$y_Ay_B=\dfrac{3m^2-12}{4+3t^2}$ ，$1<m<2$ ，

$|AB|=\sqrt{1+t^2}\cdot\sqrt{(y_A+y_B)^2-4y_Ay_B}$

$=\sqrt{1+t^2}\cdot\sqrt{\dfrac{36t^2m^2}{(4+3t^2)^2}-\dfrac{12m^2-48}{4+3t^2}}$

$=4\sqrt{3}\sqrt{1+t^2}\cdot\dfrac{\sqrt{4+3t^2-m^2}}{4+3t^2}$ ，

由$l_2:x=-\dfrac{y}{t}+m$ ，代入圆$x^2+y^2=1$ ，可得

$\left(1+\dfrac{1}{t_2}\right)y^2-\dfrac{2my}{t}+m^2-1=0$ ，

可得$y_C+y_D=\dfrac{2mt}{1+t^2}$ ，

即有中点$M\left(\dfrac{mt^2}{1+t^2},\dfrac{mt}{1+t^2}\right)$ ，

可得M到直线AB的距离为$d=\dfrac{m}{\sqrt{1+t^2}}$ ，

则$S_{\triangle MAB}=\dfrac{1}{2}d|AB|=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{m}{\sqrt{1+t^2}}\cdot4\sqrt{3}\sqrt{1+t^2}\cdot\dfrac{\sqrt{4+3t^2-m^2}}{4+3t^2}$

$=2\sqrt{3}\cdot\dfrac{m\sqrt{4+3t^2-m^2}}{4+3t^2}$

$\leqslant2\sqrt{3}\cdot\dfrac{\frac{1}{2}(m^2+4+3t^2-m^2)}{4+3t^2}=\sqrt{3}$ ，

当且仅当$4+3t^2=2m^2$ ，即有$m^2>2$ ，

由O到直线l_2的距离小于1，可得

$\dfrac{|mt|}{\sqrt{1+t^2}}<1$ ，即$1+t^2>m^2t^2$ ，

即有$2<m^2<\dfrac{3+\sqrt{7}}{2}$ ，

即$\sqrt{2}<m<\sqrt{\dfrac{3+\sqrt{7}}{2}}$ ，

则$\triangle MAB$面积最大时m的取值范围为$\left(\sqrt{2},\sqrt{\dfrac{3+\sqrt{7}}{2}}\right)$.

22. 已知正项数列$\{a_n\}$中，$a_1=2$，$a_{n+1}^2-a_{n+1}-a_n^2+1=0$，$n\in\mathbf{N}^*$．证明：

（1）$1<a_n<a_{n+1}$．

答案 证明见解析．

解析 $a_1=2>1$ ，由$a_{n+1}^2-a_{n+1}-a_n^2+1=0$ ，$n\in\mathbf{N}^*$ ，

可得$a_{n+1}(a_{n+1}-1)=(a_n-1)(a_n+1)$ ，

若$n=k$时，$a_k>1$ ，则由上式可得$n=k+1$也有$a_{k+1}>1$ ，

即有$a_n>1$ ；

由$a_n>1$ ，且$a_{n+1}^2-a_n^2=a_{n+1}-1>0$ ，

即有$1<a_n<a_{n+1}$.

（2）$\dfrac{n+7}{4}\leqslant a_n\leqslant n+1$．

答案 证明见解析．

解析 由$a_{n+1}^2-a_n^2=a_{n+1}-1$ ，可得

$a_{n+1}-a_n=\dfrac{a_{n+1}-1}{a_{n+1}+a_n}<1$ ，

可得$a_n=(a_n-a_{n-1})+(a_{n-1}-a_{n-2})+\cdots+(a_2-a_1)+a_1$

$<n-1+2=n+1$ ；

又$a_{n+1}-a_n=\dfrac{a_{n+1}-1}{a_{n+1}+a_n}>\dfrac{a_{n+1}-1}{2a_{n+1}}=\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2a_{n+1}}>\dfrac{1}{4}$ ，

可得$a_n>2+\dfrac{n-1}{4}=\dfrac{n+7}{4}$ ，

由于$n=1$，可取等号，

即有$\dfrac{n+7}{4}\leqslant a_n\leqslant n+1$ ；

（3）$\dfrac{1}{2a_1^2-3}+\dfrac{1}{2a_2^2-3}+\cdots+\dfrac{1}{2a_n^2-3}<1$．

学生版 教师版 答案版 编辑

目录

选择题：每题4分,共40分

填空题：每题6分,共36分

解答题 ：共5小题，共74分

答案 证明

解析 $a_{n+1}{}^2-a_n{}^2=a_{n+1}-1\geqslant\frac{n+8}{4}-1=\frac{n+4}{4}$ ，

即有$(a_{n+1}^2-a_n^2)+(a_n^2-a_{n-1}^2)+\cdots+(a_2^2-a_1^2)>\frac{1}{4}[n+(n-1)+\cdots+2+1]+n$

$=\frac{n(n+1)}{8}+n$ ，

可得$a_{n+1}{}^2>\frac{n^2+9n}{8}+a_1^2=\frac{n^2+9n+32}{8}$ ，

即$a_n^2>\frac{n^2+7n+24}{8}$ ，

$2a_n^2-3>\frac{n^2+7n+12}{4}=\frac{(n+3)(n+4)}{4}$ ，

则$\frac{1}{2a_1^2-1}+\frac{1}{2a_2^2-1}+\cdots+\frac{1}{2a_n^2-1}<4\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{5}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\cdots+\frac{1}{n+3}-\frac{1}{n+4}\right)$

$=4\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{n+4}\right)=1-\frac{4}{n+4}<1$.