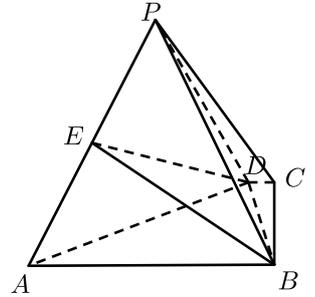


18. 已知函数 $f(x) = \sin^2 x - \cos^2 x + 2\sin x \cos x$.

(1) 求 $f(x)$ 的最小正周期.

(2) 若在 $\triangle ABC$ 中 $f(A) + f(B) = 0$, $\angle C = \frac{\pi}{6}$, 求 $\frac{a}{b}$ 的值.

19. 如图, 在四棱锥 $P-ABCD$ 中, 底面为直角梯形, $AB \parallel DC$, $\angle ABC = 90^\circ$, 且 $PA = PB = PC = AB = 6$, $CD = 2$, $BC = 2\sqrt{3}$, E 为 PA 中点.



(1) 求证: $BD \perp PA$.

(2) 求直线 PC 与平面 BDE 所成角的正弦值.

20. 已知函数 $f(x) = \ln x + \frac{1}{x} + ax$, 其中 $x > 0$, $a \in \mathbf{R}$.

(1) 若函数 $f(x)$ 在区间 $[1, +\infty)$ 上不单调, 求 a 的取值范围.

(2) 若函数 $f(x)$ 在区间 $[1, +\infty)$ 上有极大值 $\frac{2}{e}$, 求 a 的值.

21. 在平面直角坐标系 xOy 中, F 是抛物线 $C: x^2 = 2py (p > 0)$ 的焦点, M 是抛物线 C 上位于第一象限内的任意一点, 过 M , F , O 三点的圆的圆心为 Q , 点 Q 到抛物线 C 的准线的距离为 $\frac{3}{4}$.

(1) 求抛物线 C 的方程.

(2) 若点 M 的横坐标为 $\sqrt{2}$, 直线 $l: y = kx + \frac{1}{4}$ 与抛物线 C 有两个不同的交点 A, B , l 与圆 Q 有两个不同的交点 D, E , 求当 $\frac{1}{2} \leq k \leq 2$ 时, $|AB|^2 + |DE|^2$ 的最小值.

22. 数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ 满足条件: $a_1 = 1$, $b_1 = 1$, $a_{n+1} = a_n + 2b_n$, $b_{n+1} = a_n + b_n$, 其中 $n \in \mathbf{N}^+$. 证明: 对于任意的正整数 n , 有如下结果成立.

(1) 数列 $\{a_n^2 - 2b_n^2\}$ 为等比数列.

(2) 记数列 $c_n = \left| \frac{a_n}{b_n} - \sqrt{2} \right|$, 则数列 $\{c_n\}$ 为单调递减数列.

(3) $\frac{1}{2^2} \frac{1^2}{a_1} + \frac{1}{3^2} \left(\frac{1^2}{a_1} + \frac{2^2}{a_2} \right) + \cdots + \frac{1}{(n+1)^2} \left(\frac{1^2}{a_1} + \frac{2^2}{a_2} + \frac{n^2}{a_n} \right) < \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{n}{a_n}$.

