导数复习

一、选择

1 （3分）函数$f(x)=x^3-ax^2-bx+a^2$在$x=1$处有极值10，则点(a,b)为（ ）．

A. $(3,-3)$　　B. $(-4,11)$　　C. $(3,-3)$或$(-4,11)$　　D. 不存在

答案 B

解析 $f'(x)=3x^2-2ax-b$．由已知得$f'(1)=0$，$f(1)=10$，

即$\begin{cases}3-2a-b=0,\\1-a-b+a^2=10,\end{cases}$

解得$\begin{cases}a=3,\\b=-3\end{cases}$或$\begin{cases}a=-4,\\b=11.\end{cases}$

当$a=3$，$b=-3$时，$f'(x)=3(x-1)^2$，函数无极值点；

当$a=-4$，$b=11$时，$f'(x)=3x^2+8x-11=(3x+11)(x-1)$．

经检验知$x=1$是函数的极值点，所以符合条件的点(a,b)为$(-4,11)$．

标注 【题型】 导数 > 导数的应用 > 利用导数研究函数的极值问题 > 已知极值情况求参数的取值范围

【知识点】 导数 > 导数的应用 > 导数与极值

2 （3分）已知函数$f(x)=x+\dfrac{a}{x^2}(a\in\mathbf{R})$在区间$[2,+\infty)$上单调递增，那么实数$a$的取值范围是（ ）．

A. $(-\infty,4)$　　B. $(-\infty,4]$　　C. $(-\infty,8)$　　D. $(-\infty,8]$

答案 B

解析 $\because$函数$f(x)=x+\dfrac{a}{x^2}(a\in\mathbf{R})$在区间$[2,+\infty)$上单调递增，

$\therefore f'(x)=1-\dfrac{2a}{x^3}\geqslant 0$在$[2,+\infty)$上恒成立，

$\therefore a\leqslant\dfrac{x^3}{2}$在$[2,+\infty)$上恒成立，

求出$\dfrac{x^3}{2}$的最小值，可得其最小值为$\dfrac{2^3}{2}=4$，

$\therefore a\leqslant 4$．

故选B．

标注 【知识点】 函数 > 函数及其表示 > 函数的值域

3 （3分）直线$x=t(t>0)$与函数$f(x)=x^2+1$，$g(x)=\ln x$的图象分别交于A、B两点，当$|AB|$最小时，t值是（ ）．

A. 1　　B. $\dfrac{1}{2}$　　C. $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$　　D. $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

答案 C

解析 设函数$y=f(x)-g(x)=x^2-\ln x+1$，求导数得

$y'=2x-\dfrac{1}{x}=\dfrac{2x^2-1}{x}$

当$0<x<\dfrac{\sqrt{2}}{2}$时，$y'<0$，函数在$\left(0,\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$上为单调减函数，

当$x>\dfrac{\sqrt{2}}{2}$时，$y'>0$，函数在$\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2},+\infty\right)$上为单调增函数

所以当$x=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$时，所设函数的最小值为$\dfrac{3}{2}+\dfrac{1}{2}\ln 2$，

所求t的值为$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$．

标注 【知识点】 函数 > 函数的应用 > 函数的零点 > 函数零点的概念

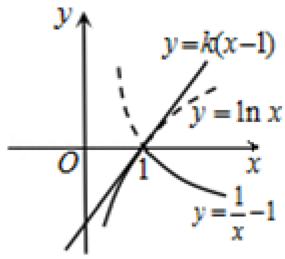
【题型】 导数 > 导数的应用 > 利用导数研究函数的最值问题 > 求函数的最值

4 （3分）已知$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{x}-1,x\geqslant 1\\ \ln x,0<x<1\end{cases}$，若$f(x)\leqslant k(x-1)$恒成立，则$k$的取值范围是（ ）．

A. $(1,+\infty)$　　B. $(-\infty,0]$　　C. $(0,1)$　　D. $[0,1]$

答案 D

解析 由$f(x)$的解析式画出其图象，如右图所示，



设曲线$y=\ln x\,(x>0)$在点$(1,0)$处的切线的斜率为k_0，

由直线$y=k\,(x-1)$的位置变化知，若$f(x)\leqslant k\,(x-1)$恒成立，

则$0\leqslant k\leqslant k_0$，

又由$y'=(\ln x)'=\dfrac{1}{x}$，得$k_0=1$，

所以$0\leqslant k\leqslant 1$.

标注 【题型】函数 > 函数的应用 > 已知零点个数求参数范围问题 > 已知零点情况求参数的取值范围

【知识点】函数 > 函数的应用 > 函数的零点 > 函数零点的概念

5 （3分）已知函数$f(x)\,(x\in\mathbf{R})$满足$f'(x)>f(x)$，则（ ）.

A. $f(2)<e^2f(0)$　　B. $f(2)\leqslant e^2f(0)$　　C. $f(2)=e^2f(0)$　　D. $f(2)>e^2f(0)$

答案 D

解析 令$g(x)=\dfrac{f(x)}{\mathrm{e}^x}$，

则$g'(x)=\dfrac{\mathrm{e}^x\cdot f'(x)-\mathrm{e}^x\cdot f(x)}{\mathrm{e}^{2x}}=\dfrac{\mathrm{e}^x(f'(x)-f(x))}{\mathrm{e}^{2x}}$，

$\because f'(x)>f(x)$，$\therefore g'(x)>0$，

$\therefore$函数$g(x)=\dfrac{f(x)}{\mathrm{e}^x}$为$(-\infty,+\infty)$上的增函数，

故$\dfrac{f(2)}{\mathrm{e}^2}>\dfrac{f(0)}{\mathrm{e}^0}$，即$f(2)>\mathrm{e}^2f(0)$.

故选D.

标注 【知识点】导数 > 导数的应用 > 导数与单调性

二、填空

6 （3分）函数$f(x)=5+x+2\sin x(x\in(0,\pi))$的单调增区间是______.

答案

$(0,\dfrac{2\pi}{3})$

解析 $f'(x)=1+2\cos x>0$，所以$\cos x>-\dfrac{1}{2}$，所以单调增区间为$(0,\dfrac{2\pi}{3})$.

标注 【知识点】 函数

7 （3分）如果函数$y=\dfrac{1}{2}x^2+\ln x-ax$在定义域内为增函数，则$a$的取值范围是 ______ .

答案 $(-\infty,2]$

解析 定义域为$(0,+\infty)$，所以$y'=x+\dfrac{1}{x}-a\geqslant 0$，即$a\leqslant x+\dfrac{1}{x}$在$x\in(0,+\infty)$内恒成立，又$x+\dfrac{1}{x}$最小值为$2$，所以$a\leqslant 2$.

标注 【知识点】 函数

8 （3分）已知函数$f(x)=\mathrm{e}^x-2x+a$有零点，则a的取值范围是 ______ .

答案 $(-\infty,2\ln 2-2]$

解析 由原函数有零点，可将问题转化为方程$\mathrm{e}^x-2x+a=0$有解问题，即方程$a=2x-\mathrm{e}^x$有解.

令函数$g(x)=2x-\mathrm{e}^x$，则$g'(x)=2-\mathrm{e}^x$，令$g'(x)=0$，得$x=\ln 2$，

所以$g(x)$在$(-\infty,\ln 2)$上是增函数，在$(\ln 2,+\infty)$上是减函数，

所以$g(x)$的最大值为：$g(\ln 2)=2\ln 2-2$.

$\therefore$当$a\leqslant 2\ln 2-2$时，方程有解，即原函数有零点.

$\therefore a$的取值范围为$(-\infty,2\ln 2-2]$.

标注 【知识点】 导数 > 导数的应用 > 导数与单调性

【题型】 导数 > 导数的应用 > 利用导数研究函数的零点与交点问题 > 已知零点或根情况求参数范围

9 （3分）若函数$f(x)=a\sin x+\cos x$在区间$(\dfrac{\pi}{6},\dfrac{\pi}{4})$上单调递增，则实数$a$的取值范围是 ______ .

答案 $[1,+\infty)$

解析 函数的导数$f'(x)=a\cos x-\sin x$，

$\because$函数$f(x)=a\sin x+\cos x$在区间$(\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{4})$上单调递增，

$\therefore f'(x)=a\cos x-\sin x\geqslant 0$在$(\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{4})$上恒成立，

即$a\cos x\geqslant\sin x$，故$a\geqslant\frac{\sin x}{\cos x}=\tan x$.

$\because x\in(\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{4})$，$\therefore\tan\frac{\pi}{6}<\tan x<\tan\frac{\pi}{4}$，

即$\frac{\sqrt{3}}{3}<\tan x<1$，则$a\geqslant 1$.

标注 【知识点】导数 > 导数的应用

10 （3分）函数$f(x)=\frac{1}{3}x^3+ax+4$有极大值又有极小值，则a的取值范围是 ______ .

答案 $(-\infty,0)$

解析 $\because f(x)=\frac{1}{3}x^3+ax+4$，

$\therefore f'(x)=x^2+a$，

$\because$函数$f(x)=\frac{1}{3}x^3+ax+4$既有极大值又有极小值，

$\therefore$方程$x^2+a=0$有两个不相等的实根，

$\therefore\Delta=0^2-4a>0$，

解得$a<0$.

故答案为：$(-\infty,0)$.

标注 【知识点】导数 > 导数的应用 > 导数与极值

【题型】导数 > 导数的应用 > 利用导数研究函数的极值问题 > 已知极值情况求参数的取值范围

三、解答

11 （13分）已知函数$f(x)=\mathrm{e}^x+2ax$.

（1）（3分）当$a=1$时，求曲线$y=f(x)$在点$(0,1)$处的切线方程；

（2）（5分）若函数$f(x)$在区间$[1,+\infty)$上的最小值为0，求a的值；

（3）（5分）若对于任意$x\geqslant 0$，$f(x)\geqslant \mathrm{e}^{-x}$恒成立，求$a$的取值范围．

答案

（1）$3x-y+1=0$

（2）$a=-\dfrac{\mathrm{e}}{2}$．

（3）a的取值范围为$[-1,+\infty)$．

解析

（1）$a=1$时，$f(x)=\mathrm{e}^x+2x, f'(x)=\mathrm{e}^x+2$，

所求切线的斜率为$f'(0), f'(0)=3$．

所以，曲线$y=f(x)$在点$(0,1)$处的切线方程为$3x-y+1=0$．

（2）当$a\geqslant 0$时，函数$f(x)=\mathrm{e}^x+2ax>0$，不符合题意．

当$a<0$时，$f'(x)=\mathrm{e}^x+2a$，

令$\mathrm{e}^x+2a=0$，得$x=\ln(-2a)$，

所以，当$x\in(-\infty,\ln(2a))$时，$f'(x)<0$，函数$f(x)$单调递减；当$x\in(\ln(-2a),+\infty)$时，$f'(x)>0$，函数$f(x)$单调递增．

①当$\ln(-2a)\leqslant 1$，即$-\dfrac{\mathrm{e}}{2}\leqslant a<0$时，$f(x)$最小值为$f(1)=2a+\mathrm{e}$．

解$2a+\mathrm{e}=0$，得$a=-\dfrac{\mathrm{e}}{2}$，符合题意．

②当$\ln(-2a)\leqslant 1$，即$a<-\dfrac{\mathrm{e}}{2}$时，$f(x)$最小值为$f(\ln(-2a))=-2a+2a\ln(-2a)$．

解$-2a+2a\ln(-2a)=0$，得$a=-\dfrac{\mathrm{e}}{2}$，不符合题意．

综上，$a=-\dfrac{\mathrm{e}}{2}$．

（3）　构建新函数$g(x)=\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}+2ax$，$g'(x)=\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}+2a$．

①当$2a\geqslant -2$，即$a\geqslant -1$时，

因为$\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}\geqslant 2$，所以$g'(x)\geqslant 0$．（且$a=-1$时，仅当$x=0$时，$g'(x)=0$．）

所以$g(x)$在$\mathbf{R}$上单调递增．

又$g(0)=0$，所以，当$a\geqslant -1$时，对于任意$x\geqslant 0$都有$g(x)\geqslant 0$．

②当$a<-1$时，解$\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}+2a<0$，即$(\mathrm{e}^x)^2+2a\mathrm{e}^x+1<0$，

得$-a-\sqrt{a^2-1}<\mathrm{e}^x<-a+\sqrt{a^2-1}$，

其中$0<-a-\sqrt{a^2-1}<1, -a+\sqrt{a^2-1}>1$．

所以$\ln(-a-\sqrt{a^2-1})<x<\ln(-a+\sqrt{a^2-1})$，

且$\ln(-a-\sqrt{a^2-1})<0$，$\ln(-a+\sqrt{a^2-1})>0$.

所以$g(x)$在$(0,\ln(-a+\sqrt{a^2-1}))$上单调递减.

又$g(0)=0$，所以存在$x_0\in(0,\ln(-a+\sqrt{a^2-1}))$，使$g(x_0)<0$，不符合题意.

综上，a的取值范围为$[-1,+\infty)$.

标注 【知识点】导数 > 导数的应用 > 导数与极值

12 （13分）已知函数$f(x)=\frac{1}{2}ax^2-(2a+1)x+2\ln x\ (a\in\mathbf{R})$.

（1）（3分）若曲线$y=f(x)$在$x=1$和$x=3$处的切线互相平行，求a的值；

（2）（5分）求$f(x)$的单调区间；

（3）（5分）设$g(x)=x^2-2x$，若对任意$x_1\in(0,2]$，均存在$x_2\in(0,2]$，使得$f(x_1)<g(x_2)$，求a的取值范围.

答案 （1）$\frac{2}{3}$

（2）当$a\leqslant 0$时，$f(x)$的单调递增区间是$(0,2)$，单调递减区间是$(2,+\infty)$.

当$0<a<\frac{1}{2}$时，$f(x)$的单调递增区间是$(0,2)$和$(\frac{1}{a},+\infty)$，单调递减区间是$(2,\frac{1}{a})$.

$a=\frac{1}{2}$时，$f(x)$的单调递增区间是$(0,+\infty)$.

当$a>\frac{1}{2}$时，$f(x)$的单调递增区间是$(0,\frac{1}{a})$和$(2,+\infty)$，单调递减区间是$(\frac{1}{a},2)$.

（3）$a>\ln 2-1$

解析 （1）$f'(x)=ax-(2a+1)+\frac{2}{x}(x>0)$.

$f'(1)=f'(3)$，解得$a=\frac{2}{3}$.

（2）$f'(x)=\frac{(ax-1)(x-2)}{x}(x>0)$.

当$a\leqslant 0$时，$x>0$，$ax-1<0$，在区间$(0,2)$上，$f'(x)>0$；在区间$(2,+\infty)$上

$f'(x)<0$，

故$f(x)$的单调递增区间是$(0,2)$，单调递减区间是$(2,+\infty)$. 当$0<a<\frac{1}{2}$时，$\frac{1}{a}>2$，

在区间$(0,2)$和$(\frac{1}{a},+\infty)$上，$f'(x)>0$；在区间$(2,\frac{1}{a})$上$f'(x)<0$，

故$f(x)$的单调递增区间是$(0,2)$和$(\frac{1}{a},+\infty)$，单调递减区间是$(2,\frac{1}{a})$.

$a=\frac{1}{2}$时，$f'(x)=\frac{(x-2)^2}{2x}$，故$f(x)$的单调递增区间是$(0,+\infty)$.

当$a>\frac{1}{2}$时，$0<\frac{1}{a}<2$，

在区间$(0,\dfrac{1}{a})$和$(2,+\infty)$上，$f'(x)>0$；在区间$(\dfrac{1}{a},2)$上$f'(x)<0$，

故$f(x)$的单调递增区间是$(0,\dfrac{1}{a})$和$(2,+\infty)$，单调递减区间是$(\dfrac{1}{a},2)$．

（3）由已知，在$(0,2]$上有$f(x)_{\max}<g(x)_{\max}$．

由已知，$g(x)_{\max}=0$，由（Ⅱ）可知，

$a\leqslant\dfrac{1}{2}$时，$f(x)$在$(0,2]$上单调递增，

故$f(x)_{\max}=f(2)=2a-2(2a+1)+2\ln 2=-2a-2+2\ln 2$，

所以，$-2a-2+2\ln 2<0$，解得$a>\ln 2-1$，故$\ln 2-1<a\leqslant\dfrac{1}{2}$．

当$a>\dfrac{1}{2}$时，$f(x)$在$(0,\dfrac{1}{a}]$上单调递增，在$[\dfrac{1}{a},2]$上单调递减，

故$f(x)_{\max}=f(\dfrac{1}{a})=-2-\dfrac{1}{2a}-2\ln a$．

由$a>\dfrac{1}{2}$可知$\ln a>\ln\dfrac{1}{2}>\ln\dfrac{1}{e}=-1$，$2\ln a>-2$，$-2\ln a<2$，

所以，$-2-2\ln a<0$，$f(x)_{\max}<0$，

综上所述，$a>\ln 2-1$．

标注 【知识点】导数 > 导数的概念及其意义 > 导数的几何意义

【知识点】导数 > 导数的应用 > 导数与极值

【知识点】导数 > 导数的应用 > 导数与单调性

【题型】导数 > 导数的应用 > 利用导数求曲线的切线方程问题 > 求在某点处的切线方程

【题型】导数 > 导数的应用 > 综合问题 > 利用导数证明不等式恒成立与能成立综合问题