复数

1 （5分）复数z在复平面内对应的点是$(1,-1)$，则$\bar{z}=$______．

答案 $1+\mathrm{i}$

解析 $\because$复数z在复平面内对应的点是$(1,-1)$，

$\therefore z=1-\mathrm{i}$，则$\bar{z}=1+\mathrm{i}$．

故答案为$1+\mathrm{i}$．

标注 【知识点】 复数 > 复数的概念及几何意义 > 共轭复数

2 （5分）已知复数$z=\left(a^2-4\right)+(a+2)\mathrm{i}\,(a\in\mathbf{R})$，则“$a=2$”是“$z$为纯虚数”的（　　）．

A. 充分不必要条件　　B. 必要不充分条件

C. 既不充分也不必要条件　　D. 充要条件

答案 D

解析 复数$z=\left(a^2-4\right)+(a+2)\mathrm{i}$为纯虚数，

$\therefore a^2-4=0$，且$a+2\neq 0$，

解得$a=2$，

$\therefore$“$a=2$”是“z为纯虚数”的充要条件，

故选D.

标注 【知识点】 常用逻辑用语 > 充要条件

3 （5分）已知集合$M=\{0,2,z\mathrm{i}\}$，i为虚数单位，$N=\{1,3\}$，$M\cap N=\{1\}$，则复数$z=$（ ）.

A. $-\mathrm{i}$ B. i C. -2i D. 2i

答案 A

解析 $\because M=\{0,2,z\mathrm{i}\}$，i为虚数单位，$N=\{1,3\}$，$M\cap N=\{1\}$，

$\therefore z\mathrm{i}=1$，

则$z=-\mathrm{i}$.

故选：A.

标注 【知识点】集合 > 集合的运算 > 交集

4 （5分）已知复数z满足$z\left(\sqrt{7}+3\mathrm{i}\right)=16\mathrm{i}$（i为虚数单位），则复数$z$的模为（ ）.

A. $\frac{1}{2}$ B. 2 C. 4 D. 8

答案 C

解析 $z\left(\sqrt{7}+3\mathrm{i}\right)=16\mathrm{i}$（i为虚数单位），

$\therefore z\left(\sqrt{7}+3\mathrm{i}\right)\left(\sqrt{7}-3\mathrm{i}\right)=16\mathrm{i}\left(\sqrt{7}-3\mathrm{i}\right)$，

$\therefore 16z=16\mathrm{i}\left(\sqrt{7}-3\mathrm{i}\right)$，

$\therefore z=3+\sqrt{7}\mathrm{i}$.

则复数$|z|=\sqrt{3^2+\left(\sqrt{7}\right)^2}=4$.

故选C.

标注 【知识点】复数 > 复数的概念及几何意义 > 复数的模

5 （5分）设i是虚数单位，复数$\frac{1+a\mathrm{i}}{2-\mathrm{i}}$所对应的点在第一象限，则实数$a$的取值范围为 ______ .

答案 $(-\frac{1}{2},2)$

解析

$$\frac{1+a\mathrm{i}}{2-\mathrm{i}}=\frac{(1+a\mathrm{i})(2+\mathrm{i})}{(2-\mathrm{i})(2+\mathrm{i})}=\frac{(2-a)+(2a+1)\mathrm{i}}{4-\mathrm{i}^2}$$
$$=\frac{2-a}{5}+\frac{2a+1}{5}\mathrm{i},$$

∵对应的点在第一象限，

$\therefore\begin{cases}\frac{2-a}{5}>0\\ \frac{2a+1}{5}>0\end{cases}\Rightarrow -\frac{1}{2}<a<2$

$\therefore a$的取值范围为$-\frac{1}{2}<a<2$.

故答案为$-\frac{1}{2}<a<2$.

标注 【知识点】复数 > 复数的概念及几何意义 > 复平面

6 （5分）若$z_1=a+2\mathrm{i}, z_2=3-4\mathrm{i}$，且$\frac{z_1}{z_2}$为纯虚数，则实数$a$的值为 ______ .

答案 $\frac{8}{3}$

解析 略

标注 【知识点】复数 > 复数的概念及几何意义 > 复数的基本概念

7 （5分）已知复数$z=\frac{4+\mathrm{i}}{1+2\mathrm{i}}$，则$z$在复平面上对应的点在第（　　）象限.

A. 一　　B. 二　　C. 三　　D. 四

答案 D

解析 $\because z=\frac{4+\mathrm{i}}{1+2\mathrm{i}}=\frac{(4+\mathrm{i})(1-2\mathrm{i})}{(1+2\mathrm{i})(1-2\mathrm{i})}=\frac{6-7\mathrm{i}}{5}=\frac{6}{5}-\frac{7}{5}\mathrm{i}$,

$\therefore z$在复平面上对应的点的坐标为$\left(\frac{6}{5},-\frac{7}{5}\right)$，在第四象限.

故选D.

标注 【知识点】复数 > 复数的概念及几何意义 > 复平面

8 （5分）已知a，$b\in\mathbf{R}$，i是虚数单位，$a+\mathrm{i}=3-b\mathrm{i}$，则若$\frac{a+b\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}=$（ ）.

A. $2-\mathrm{i}$　B. $2+\mathrm{i}$　C. $1-2\mathrm{i}$　D. $1+\mathrm{i}$

答案 B

解析 $\because a+\mathrm{i}=3-b\mathrm{i}$,

$\therefore a=3$，$b=-1$,

则$\dfrac{a+b\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}=\dfrac{3-\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}=2+\mathrm{i}$,

故选B.

标注 【知识点】 复数 > 复数的运算 > 复数的乘法和除法

9 （5分）欧拉公式$\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}=\cos x+\mathrm{i}\sin x$（i为虚数单位）是由瑞士著名数学家欧拉发明的，它将指数函数的定义域扩大到复数，建立了三角数和指数函数的关系，它在复变函数理论里占有非常重要地位，被誉为“数学中的天桥”，根据欧拉公式可知，$\mathrm{e}^{2\mathrm{i}}$表示的复数在复平面中位于（ ）.

A. 第一象限　B. 第二象限　C. 第三象限　D. 第四象限

答案 B

解析 $\mathrm{e}^{2\mathrm{i}}=\cos 2+i\sin 2$,

$\because 2\in(\dfrac{\pi}{2},\pi)$,

$\therefore\cos 2<0$，$\sin 2>0$,

$\therefore\mathrm{e}^{2\mathrm{i}}$表示的附属在复平面中位于第二象限，故选择B.

标注 【知识点】 复数 > 复数的概念及几何意义 > 复数的基本概念

10 （5分）已知复数$z=\dfrac{3-\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}$，则$z$的共轭复数$\bar{z}$等于（　　）.

A. $2+\mathrm{i}$　B. $2-\mathrm{i}$　C. $1-2\mathrm{i}$　D. $1+2\mathrm{i}$

答案 B

解析

$$z=\frac{3-\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}=\frac{(3-\mathrm{i})(1+\mathrm{i})}{(1-\mathrm{i})(1+\mathrm{i})}=\frac{4+2\mathrm{i}}{2}=2+\mathrm{i},$$

$\therefore \overline{z}=2-\mathrm{i}$.

故选B．

标注 【知识点】 复数 > 复数的概念及几何意义 > 共轭复数

11 （5分）给出关于复数$z=\frac{2}{1+\mathrm{i}}$的四个命题：$p_1:|z|=2$；$p_2:z^2=2\mathrm{i}$；$p_3:\overline{z}=1+\mathrm{i}$；$p_4:z$的虚部为-1．下列命题中为真命题的是（ ）．

A. $p_1\wedge p_2$ B. $p_1\vee p_2$ C. $(\neg P_3)\wedge p_4$ D. $(\neg p_3)\vee p_4$

答案 D

解析 $\because$复数$z=\frac{2}{1+\mathrm{i}}=1-\mathrm{i}$,

$\therefore |z|=\sqrt{2}$，故p_1为假命题，

$z^2=-2\mathrm{i}$，故p_2为假命题，

$\overline{z}=1+\mathrm{i}$，故$p_3$为真命题，

z的虚部为-1，故p_4为真命题，

故$p_1\wedge p_2$，$p_1\vee p_2$，$(\neg P_3)\wedge p_4$为假命题，

$(\neg p_3)\vee p_4$为真命题，

故选D．

标注 【知识点】 常用逻辑用语 > 命题 > 逻辑联结词

12 （5分）设$z=\cos\frac{2\pi}{3}+\mathrm{i}\sin\frac{2\pi}{3}$，则$z^3+\frac{z^2}{z^2+z+2}=$（ ）．

A. $-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$ B. $\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}\mathrm{i}$ C. $\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$ D. $-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}\mathrm{i}$

答案 C

解析 注意到$z^3=1$，且$z^2+z+1=0$，则

$$z^3+\frac{z^2}{z^2+z+2}=1+z^2=-z=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}.$$

标注 【知识点】复数与平面向量 > 模、辐角与单位根

13 （5分）复数z，若$|z|-z=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$，则$\frac{1}{z}=$（ ）.

A. $\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$ B. $\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$ C. $-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$ D. $-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$

答案 B

解析 设$z=a+b\mathrm{i}$，代入，解得$a=\frac{1}{2}$，$b=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

标注 【知识点】复数与平面向量 > 复数的概念与运算

14 （5分）设复数z满足$|z|<1$且$\left|\bar{z}+\frac{1}{z}\right|=\frac{5}{2}$则$|z|=$（ ）.

A. $\frac{4}{5}$ B. $\frac{3}{4}$ C. $\frac{2}{3}$ D. $\frac{1}{2}$

答案 D

解析 【分析】复数的模．想到$|z|^2=z\bar{z}$就可以很简单．

【解析】

$\left|\bar{z}+\frac{1}{z}\right|=\frac{5}{2}\Rightarrow\left|\frac{z\bar{z}+1}{z}\right|=\frac{5}{2}\Rightarrow|\bar{z}\cdot z+1|=\frac{5}{2}|z|\Rightarrow|z|^2+1=\frac{5}{2}|z|\Rightarrow|z|=2$ （舍去）或

$|z|=\frac{1}{2}$.

标注 【知识点】复数与平面向量 > 模、辐角与单位根

15 （5分）若复数z满足$|z+3+4\mathrm{i}|\leqslant 6$，则$|z|$的最小值和最大值分别为（ ）

A. 1和11 B. 0和11 C. 5和6 D. 5和11

答案 B

解析

$|z+3+4\mathrm{i}| \leqslant 6$表示的是以$(-3,-4)$为圆心，以$6$为半径的圆及其内部，原点又满足上式，故$|z|_{\min}=0$，而$|z|_{\max}=6+|3+4\mathrm{i}|=11$，故选B．

标注 【知识点】 复数 > 复数的运算 > 复数的乘法和除法