解密压轴大题：圆锥曲线

一、解答

1 （12分）已知椭圆C的中心在原点O，焦点在x轴上，离心率为$\frac{1}{2}$，右焦点到右顶点的距离为1．

（1）（5分）求椭圆C的标准方程．

（2）（7分）是否存在与椭圆C交于A、B两点的直线l：$y=kx+m(k\in\mathbf{R})$，使得以AB为直径的圆过原点？若存在，求出实数m的取值范围，若不存在，请说明理由．

答案 （1）$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$．

（2）存在，$m\in\left(-\infty,-\frac{2}{7}\sqrt{21}\right]\cup\left[\frac{2}{7}\sqrt{21},+\infty\right)$．

解析 （1）由题意：设椭圆的方程$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>c)$，

椭圆的离心率$e=\frac{c}{a}=\frac{1}{2}$，则$a=2c$，

右焦点到右顶点的距离为1，即$a-c=1$，

$\therefore a=2$，$c=1$，

$b^2=a^2-c^2=3$，

$\therefore$椭圆的标准方程为：$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$．

（2）存在直线l，使得以AB为直径的圆过原点．理由如下：

由$\begin{cases} y=kx+m \\ \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1 \end{cases}$，得$(3+4k^2)x^2+8kmx+4m^2-12=0$．

$\Delta=(8km)^2-4(3+4k^2)(4m^2-12)>0$，化简得$3+4k^2>m^2$．

设$A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，

则$x_1+x_2=\frac{8km}{3+4k^2}$，$x_1x_2=\frac{4k^2-12}{3+4k^2}$．

由，以AB为直径的圆过原点$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=0$，$x_1x_2+y_1y_2=0$，即

$x_1x_2+(kx_1+m)(kx_2+m)=0$，

得$(1+k^2)x_1x_2+km(x_1+x_2)+m^2=0$，即

$(1+k^2)\cdot\dfrac{4k^2-12}{3+4\mathrm{k}^2}-km\cdot\dfrac{8km}{3+4\mathrm{k}^2}+m^2=0$，

化简得，$7m^2=12+12k^2$，将$k^2=\dfrac{7}{12}m^2-1$代入$3+4k^2>m^2$中，得

$3+4\times\left(\dfrac{7}{12}m^2-1\right)>m^2$，解得：$m^2>\dfrac{3}{4}$．

又由$7m^2=12+12k^2\geqslant 12$，得$m^2\geqslant\dfrac{12}{7}$，即$m\geqslant\dfrac{2}{7}\sqrt{21}$或$m\leqslant-\dfrac{2}{7}\sqrt{21}$．

$\therefore$实数m的取值范围是：$\left(-\infty,-\dfrac{2}{7}\sqrt{21}\right]\cup\left[\dfrac{2}{7}\sqrt{21},+\infty\right)$．

标注 【题型】平面解析几何 > 直线与圆锥曲线问题 > 向量点乘问题

【知识点】平面解析几何 > 椭圆 > 直线和椭圆的位置关系

2 （12分）已知椭圆$C:2x^2+3y^2=6$的左焦点为F，过F的直线l与C交于A、B两点．

（1） （3分）求椭圆C的离心率．

（2） （4分）当直线l与x轴垂直时，求线段AB的长．

（3） （5分）设线段AB的中点为P，O为坐标原点，直线OP交椭圆C交于M、N两点，是否存在直线l使得$|NP|=3|MP|$？若存在，求出直线l的方程；若不存在，说明理由．

答案 （1） $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$．

（2） $\dfrac{4\sqrt{3}}{3}$．

（3） 存在直线$l:x=\pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}y-1$，使得$|NP|=3|PM|$，理由见解析．

解析 （1） 椭圆$C:2x^2+3y^2=6$，

即为$\dfrac{x^2}{3}+\dfrac{y^2}{2}=1$，可得$a=\sqrt{3}$，$b=\sqrt{2}$，$c=1$，

故椭圆的离心率$e=\dfrac{c}{a}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$．

（2） 当直线l与x轴垂直时，即为$x=-1$，代入椭圆方程可得$y^2=\dfrac{4}{3}$，$y=\pm\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$，

故线段AB的长为$\dfrac{4\sqrt{3}}{3}$．

（3） 由$F(-1,0)$，设直线$AB:x=my-1$，代入椭圆方程得$(3+2m^2)y^2-4my-4=0$

，

设$A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，则$y_1+y_2=\dfrac{4m}{3+2m^2}$，

即有中点P的坐标为$\left(\dfrac{-3}{3+2m^2},\dfrac{2m}{3+2m^2}\right)$，

直线$OP:y=-\dfrac{2m}{3}x$，代入椭圆方程可得：$x=\pm\dfrac{3}{\sqrt{3+2m^2}}$，

可设$x_N=\dfrac{3}{\sqrt{3+2m^2}}$，$x_M=-\dfrac{3}{\sqrt{3+2m^2}}$，

假设存在直线l使得$|NP|=3|DM|$，

即有$\overrightarrow{NP}=3\overrightarrow{PM}$，

则$\dfrac{-3}{3+2m^2}-\dfrac{3}{\sqrt{3+2m^2}}=3\left(-\dfrac{3}{\sqrt{3+2m^2}}-\dfrac{-3}{3+2m^2}\right)$，解得$m=\pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，

故存在直线$l:x=\pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}y-1$，使得$|NP|=3|PM|$.

标注 【题型】 平面解析几何 > 直线与圆锥曲线问题 > 利用向量解决共线比例问题

【知识点】 平面解析几何 > 椭圆 > 直线和椭圆的位置关系

3 （11分）已知椭圆$C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$过点$A(2,0)$，$B(0,1)$两点.

（1） （5分）求椭圆C的方程及离心率.

（2） （6分）设P为第三个象限内一点且在椭圆C上，直线PA与y轴交于点M，直线PB与x轴交于点N，求证：四边形$ABNM$的面积为定值.

答案 （1） 椭圆C的标准方程为$\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$，离心率$e=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

（2） 四边形$ABNM$的面积为定值2.

解析 （1） $\because$椭圆$C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$，过点$A(2,0)$，$B(0,1)$两点，

$\therefore a=2$，$b=1$，$c=\sqrt{3}$，

$\therefore$椭圆C的标准方程为$\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$，

离心率$e=\dfrac{c}{a}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

（2） 设P点坐标为$(x_0,y_0)(x_0<0,y_0<0)$，则直线PB的方程为$y-1=\dfrac{y_0-1}{x_0}\cdot x$，

N点坐标为$\left(\dfrac{x_0}{1-y_0},0\right)$，直线$PA$的方程为$y=\dfrac{y_0}{x_0-2}(x-2)$，

M点坐标为$\left(0,\dfrac{2y_0}{2-x_0}\right)$，则$S_{\triangle ABN}=\dfrac{1}{2}\left(2-\dfrac{x_0}{1-y_0}\right)$，

$S_{\triangle MNA}=\dfrac{1}{2}\left(2\cdot\dfrac{x_0}{1-y_0}\right)\cdot\dfrac{2y_0}{x_0-2}$，

所以$S_{\triangle ABNM}=S_{\triangle ABN}+S_{\triangle MNA}$

$=\frac{1}{2}\left(2-\frac{x_0}{1-y_0}\right)\left(1+\frac{2y_0}{x_0-2}\right)$

$=\frac{1}{2}\cdot\frac{(x_0+2y_0-2)^2}{(y_0-1)(x_0-2)}$

$=\frac{1}{2}\cdot\frac{x_0^2+4y_0^2+4-4x_0+4x_0y_0-8y_0}{x_0y_0-x_0-2y_0+2}$①，

又$\because\frac{x_0^2}{4}+y_0^2=1$，

$\therefore x_0^2+4y_0^2=4$，代入①得：

$S_{ABNM}=\frac{1}{2}\cdot\frac{4+4-4x_0+4x_0y_0-8y_0}{x_0y_0-x_0-2y_0+2}$

$=\frac{1}{2}\cdot\frac{4(2-x_0+x_0y_0-2y_{0)}}{x_0y_0-x_0-2y_0+2}$

$=2$.

故四边形$ABNM$的面积为定值2.

标注 【题型】平面解析几何 > 直线与圆锥曲线问题 > 面积问题

【知识点】平面解析几何 > 椭圆 > 直线和椭圆的位置关系

4 （12分）已知椭圆$C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\,(a>b>0)$的右焦点$F\,(1,0)$，长轴的左、右端点分别为$A_1,A_2$，且$\overrightarrow{FA_1}\cdot\overrightarrow{FA_2}=-1$.

（1）（5分）求椭圆C的方程；

（2）（7分）过焦点F斜率为$k\,(k\neq0)$的直线l交椭圆C于A,B两点，弦AB的垂直平分线与x轴相交于点D．试问椭圆C上是否存在点E使得四边形$ADBE$为菱形？若存在，试求点E到y轴的距离；若不存在，请说明理由．

答案 （1）椭圆C的方程为$\frac{x^2}{2}+y^2=1$；

（2）存在，此时点E到y的距离为$\frac{12-3\sqrt{2}}{7}$.

解析 （1）依题设$A_1(-a,0)$，$A_2(a,0)$，则$a>8?$，$\overrightarrow{FA_2}=(a-1,0)$.

由$\overrightarrow{FA_1}\cdot\overrightarrow{FA_2}=-1$，解得$a^2=2$，所以$b^2=1$.

所以椭圆C的方程为$\frac{x^2}{2}+y^2=1$.

（2）依题直线l的方程为$y=k(x-1)$.

由$\begin{cases} y=k(x-1) \\ x^2+2y^2=2 \end{cases}$,得$(2k^2+1)x^2-4k^2x+2k^2-2=0$.

设$A(x_1,y_1)$,$B(x_2,y_2)$,弦AB的中点为$M(x_0,y_0)$,

则$x_1+x_2=\dfrac{4k^2}{2k^2+1}$，$x_1x_2=\dfrac{2(k^2-1)}{2k^2+1}$，$x_0=\dfrac{2k^2}{2k^2+1}$，$y_0=\dfrac{-k}{2k^2+1}$，

所以$M(\dfrac{2k^2}{2k^2+1},\dfrac{-k}{2k^2+1})$.

直线MD的方程为$y+\dfrac{k}{2k^2+1}=-\dfrac{1}{k}(x-\dfrac{2k^2}{2k^2+1})$,

令$y=0$，得$x_D=\dfrac{k^2}{2k^2+1}$，则$D(\dfrac{k^2}{2k^2+1},0)$.

若四边形$ADBE$为菱形，则$x_E+x_D=2x_0$，$y_E+y_D=2y_0$.

所以$E(\dfrac{3k^2}{2k^2+1},\dfrac{-2k}{2k^2+1})$.

若点E在椭圆C上，则$(\dfrac{3k^2}{2k^2+1})^2+2(\dfrac{-2k}{2k^2+1})^2=2$.

整理得$k^4=2$，解得$k^2=\sqrt{2}$. 所以椭圆C上存在点E使得四边形$ADBE$为菱形.

此时点E到y的距离为$\dfrac{12-3\sqrt{2}}{7}$.

标注 【知识点】 平面解析几何 > 椭圆 > 直线和椭圆的位置关系

【题型】 平面解析几何 > 直线与圆锥曲线问题 > 中点弦问题