圆锥曲线应对策略（二）

一、解答

1 （12分）已知椭圆的中心在原点，焦点在x轴上，经过点$P(\sqrt{2},1)$且离心率$e=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$．过定点$C(-1,0)$的直线与椭圆相交于A，B两点．

（1）（4分）求椭圆的方程．

（2）（8分）在x轴上是否存在点M，使$\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}$为常数？若存在，求出点$M$的坐标；若不存在，请说明理由．

答案

（1）$\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{2}=1$．

（2）存在定点$M(-\dfrac{7}{4},0)$．

解析

（1）设椭圆方程为$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\ (a>b>0)$

由已知可得$\begin{cases}a^2=b^2+c^2\\ \frac{c}{a}=\frac{\sqrt{2}}{2}\\ \frac{2}{a^2}+\frac{1}{b^2}=1\end{cases}$，解得 $a^2=4,b^2=2$．所求椭圆的方程为$\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{2}=1$．

（2）设$A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，$M(m,0)$

当直线AB与x轴不垂直时，设直线AB的方程为$y=k(x+1)$．

$\begin{cases}y=k(x+1)\\ x^2+2y^2-4=0\end{cases}\Rightarrow(1+2k^2)x^2+4k^2x+2k^2-4=0$

$x_1+x_2=-\dfrac{4k^2}{1+2k^2}$，$x_1x_2=\dfrac{2k^2-4}{1+2k^2}$，

$y_1y_2=k^2(x_1+1)(x_2+1)=k^2(x_1x_2+x_1+x_2+1)=-\dfrac{3k^2}{1+2k^2}$

$\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=(x_1-m,y_1)(x_2-m,y_2)=x_1x_2-m(x_1+x_2)+m^2$
$+y_1y_2$
$=\dfrac{2k^2-4}{1+2k^2}+\dfrac{4mk^2}{1+2k^2}+m^2+\dfrac{-3k^2}{1+2k^2}=\dfrac{(2m^2+4m-1)k^2+m^2-4}{1+2k^2}$

$$=\frac{\frac{1}{2}(2m^2+4m-1)(2k^2+1)-\frac{1}{2}(2m^2+4m-1)+m^2-4}{1+2k^2}$$

$$=\frac{1}{2}(2m^2+4m-1)-\frac{2m+\frac{7}{2}}{1+2k^2}$$

$\because$·是与k无关的常数，$\therefore 2m+\frac{7}{2}=0\therefore m=-\frac{7}{4}$，即$M(-\frac{7}{4},0)$.

此时，$\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=-\frac{15}{16}$．当直线$AB$与$x$轴垂直时，则直线$AB$的方程为$x=-1$.

此时点AB的坐标分别为$(-1,\frac{\sqrt{6}}{2}),(-1,-\frac{\sqrt{6}}{2})$当$m=-\frac{7}{4}$时， 亦有

$\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=-\frac{15}{16}$

综上，在x轴上存在定点$M(-\frac{7}{4},0)$，使·为常数.

标注 【题型】平面解析几何 > 直线与圆锥曲线问题 > 定值问题（证明、探究）

【知识点】平面解析几何 > 椭圆 > 直线和椭圆的位置关系

2 （12分）已知直线l：$x=t$与椭圆C：$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{2}=1$相交于$A$，$B$两点，$M$是椭圆$C$上一点.

（1） （4分）当$t=1$时，求$\triangle MAB$面积的最大值.

（2） （8分）设直线MA和MB与x轴分别相交于点E，F，O为原点．证明：$|OE|\cdot|OF|$为定值.

答案 （1） $\frac{3\sqrt{6}}{2}$

（2） 证明见解析

解析 （1） 将$x=1$代入$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{2}=1$，

解得$y=\pm\frac{\sqrt{6}}{2}$，所以$|AB|=\sqrt{6}$.

当M为椭圆C的顶点$(-2,0)$时，M到直线$x=1$的距离取得最大值3，

所以$\triangle MAB$面积的最大值是$\frac{3\sqrt{6}}{2}$.

（2） 设A,B两点坐标分别为$A(t,n)$，$B(t,-n)$，从而$t^2+2n^2=4$.

设$M(x_0,y_0)$，则有${x_0}^2+2{y_0}^2=4$，$x_0\neq t$，$y_0\neq\pm n$.

直线MA的方程为$y-n=\frac{y_0-n}{x_0-t}(x-t)$，

令$y=0$，得$x=\frac{ty_0-nx_0}{y_0-n}$，从而$|OE|=\left|\frac{ty_0-nx_0}{y_0-n}\right|$.

直线MB的方程为$y+n=\frac{y_0+n}{x_0-t}(x-t)$，

令$y=0$，得$x=\dfrac{ty_0+nx_0}{y_0+n}$，从而$|OF|=\left|\dfrac{ty_0+nx_0}{y_0+n}\right|$.

所以$|OE|\cdot|OF|=\left|\dfrac{ty_0-nx_0}{y_0-n}\right|\cdot\left|\dfrac{ty_0+nx_0}{y_0+n}\right|=\left|\dfrac{t^2y_0^2-n^2x_0^2}{y_0^2-n^2}\right|$

$$=\left|\frac{\left(4-2n^2\right)y_0^2-n^2\left(4-2y_0^2\right)}{y_0^2-n^2}\right|$$

$$=\left|\frac{4{y_0}^2-4n^2}{{y_0}^2-n^2}\right|=4.$$

所以$|OE|\cdot|OF|$为定值.

标注 【知识点】 平面解析几何 > 椭圆 > 直线和椭圆的位置关系

【题型】 平面解析几何 > 直线与圆锥曲线问题 > 最值问题

【题型】 平面解析几何 > 直线与圆锥曲线问题 > 定值问题（证明、探究）

3 （12分）已知椭圆$C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的离心率为$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，点$(2,0)$在椭圆$C$上.

（1） （4分）求椭圆C的标准方程;

（2） （8分）过点$P(1,0)$的直线（不与坐标轴垂直）与椭圆交于A、B两点，设点B关于x轴的对称点为B'．直线AB'与x轴的交点Q是否为定点？请说明理由.

答案 （1） $\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$

（2） 直线AB'与x轴的交点Q是定点，坐标为$Q(4,0)$，理由见解析.

解析 （1） 因为点$(2,0)$在椭圆C上，所以$a=2$.

又因为$e=\dfrac{c}{a}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，所以$c=\sqrt{3}$，$b=\sqrt{a^2-c^2}=1$.

所以椭圆C的标准方程为：$\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$.

（2） 设$A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，$B'(x_2,-y_2)$，$Q(n,0)$.

设直线AB：$y=k(x-1)(k\neq0)$.

联立$y=k(x-1)$和$x^2+4y^2-4=0$，得：$(1+4k^2)x^2-8k^2x+4k^2-4=0$.

所以$x_1+x_2=\dfrac{8k^2}{1+4k^2}$，$x_1x_2=\dfrac{4k^2-4}{1+4k^2}$.

直线AB'的方程为$y-y_1=\dfrac{y_1+y_2}{x_1-x_2}(x-x_1)$,

令$y=0$，解得$n=-\dfrac{y_1(x_1-x_2)}{y_1+y_2}+x_1=\dfrac{x_1y_2+x_2y_1}{y_1+y_2}$

又$y_1=k(x_1-1),y_2=k(x_2-1)$,

$$所以n=\frac{2x_1x_2-(x_1+x_2)}{x_1+x_2-2}=\frac{\frac{8k^2-8}{1+4k^2}-\frac{8k^2}{1+4k^2}}{\frac{8k^2}{1+4k^2}-2}=4.$$

所以直线AB'与x轴的交点Q是定点，坐标为$Q(4,0)$.

标注 【知识点】 平面解析几何 > 椭圆 > 直线和椭圆的位置关系

【题型】 平面解析几何 > 直线与圆锥曲线问题 > 定点问题

4 （12分）设椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$（$a>b>0$）的左、右焦点为$F_1,F_2$，右顶点为$A$，上顶点为$B$. 已知$|AB|=\frac{\sqrt{3}}{2}|F_1F_2|$.

（1） （4分）求椭圆的离心率;

（2） （8分）设P为椭圆上异于其顶点的一点，以线段PB为直径的圆经过点F_1，经过原点的直线l与该圆相切．求直线的斜率.

答案 （1） 椭圆的离心率$e=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

（2） 直线l的斜率为$4+\sqrt{15}$或$4-\sqrt{15}$.

解析 （1） 设椭圆的右焦点F_2的坐标为$(c,0)$．由$|AB|=\frac{\sqrt{3}}{2}|F_1F_2|$，可得$a^2+b^2=3c^2$，又$b^2=a^2-c^2$，则$\frac{c^2}{a^2}=\frac{1}{2}$.

$\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{3}c$，所以$2a^2-c^2=3c^2$，解得$a=\sqrt{2}c$，$e=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

所以，椭圆的离心率$e=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

（2） 由（Ⅰ）知$a^2=2c^2$，$b^2=c^2$．故椭圆方程为$\frac{x^2}{2c^2}+\frac{y^2}{c^2}=1$.

设$P(x_0,y_0)$．由$F_1(-c,0)$，$B(0,c)$，有$\overrightarrow{F_1P}=(x_0+c,y_0)$，$\overrightarrow{F_1B}=(c,c)$.

由已知，有$\overrightarrow{F_1P}\cdot\overrightarrow{F_1B}=0$，即$(x_0+c)c+y_0c=0$．又$c\neq0$，故有

$x_0+y_0+c=0$． ①

又因为点P在椭圆上，故

$\frac{{x_0}^2}{2c^2}+\frac{{y_0}^2}{c^2}=1$． ②

由①和②可得$3{x_0}^2+4cx_0=0$．而点P不是椭圆的顶点，故$x_0=-\frac{4c}{3}$，代入①得$y_0=\frac{c}{3}$，即点P的坐标为$\left(-\frac{4c}{3},\frac{c}{3}\right)$.

设圆的圆心为$T\left(x_1,y_1\right)$，则$x_1=\dfrac{-\frac{4}{3}c+0}{2}=-\dfrac{2}{3}c$，$y_1=\dfrac{\frac{c}{3}+c}{2}=\dfrac{2}{3}c$，进而圆的半径$r=\sqrt{\left(x_1-0\right)^2+\left(y_1-c\right)^2}=\dfrac{\sqrt{5}}{3}c$.

设直线l的斜率为k，依题意，直线l的方程为$y=kx$.

由l与圆相切，可得$\dfrac{\left|kx_1-y_1\right|}{\sqrt{k^2+1}}=r$，即$\dfrac{\left|k\left(-\frac{2c}{3}\right)-\frac{2c}{3}\right|}{\sqrt{k^2+1}}=\dfrac{\sqrt{5}}{3}c$，

整理得$k^2-8k+1=0$，解得$k=4\pm\sqrt{15}$.

所以，直线l的斜率为$4+\sqrt{15}$或$4-\sqrt{15}$.

标注　【题型】平面解析几何 > 直线与圆锥曲线问题 > 向量点乘问题

【知识点】平面解析几何 > 椭圆 > 直线和椭圆的位置关系

5　（12分）已知抛物线C：$y^2=2px(p>0)$的焦点为F，且经过点$A(1,2)$，过点F的直线与抛物线C交于P，Q两点.

（1）（4分）求抛物线C的方程.

（2）（8分）O为坐标原点，直线OP，OQ与直线$x=-\dfrac{p}{2}$分别交于S，T两点，试判断$\overrightarrow{FS}\cdot\overrightarrow{FT}$是否为定值？若是，求出这个定值；若不是，请说明理由.

答案　（1）抛物线C的方程为$y^2=4x$.

（2）$\overrightarrow{FS}\cdot\overrightarrow{FT}$的值是定值，且定值为0.

解析　（1）把点$A(1,2)$代入抛物线C的方程$y^2=2px$，

得$4=2p$，解得$p=2$，

所以抛物线C的方程为$y^2=4x$.

（2）因为$p=2$，

所以直线$x=-\dfrac{p}{2}$为$x=-1$，

焦点F的坐标为$(1,0)$，

设直线PQ的方程为$x=ty+1$，$P(\dfrac{{y_1}^2}{4},y_1)$，$Q(\dfrac{{y_2}^2}{4},y_2)$，

则直线OP的方程为$y=\dfrac{4}{y_1}x$，直线OQ的方程为$y=\dfrac{4}{y_2}x$.

由$\begin{cases}y=\frac{4}{y_1}x\\x=-1\end{cases}$，得$S(-1,-\dfrac{4}{y_1})$，同理得$T(-1,-\dfrac{4}{y_2})$.

所以$\overrightarrow{FS}=(-2,-\dfrac{4}{y_1})$，$\overrightarrow{FT}=(-2,-\dfrac{4}{y_2})$，

则$\overrightarrow{FS}\cdot\overrightarrow{FT}=4+\dfrac{16}{y_1y_2}$.

由$\begin{cases}x=ty+1\\y^2=4x\end{cases}$，得$y^2-4ty-4=0$，所以$y_1y_2=-4$，

则$\overrightarrow{FS}\cdot\overrightarrow{FT}=4+\dfrac{16}{(-4)}=4-4=0$.

所以，$\overrightarrow{FS}\cdot\overrightarrow{FT}$的值是定值，且定值为0.

标注 【知识点】平面解析几何 > 抛物线 > 抛物线的定义、标准方程

6 （12分）已知椭圆$C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$经过点$M(1,\dfrac{3}{2})$，其离心率为$\dfrac{1}{2}$.

（1）（4分）求椭圆C的方程；

（2）（8分）设直线$l:y=kx+m(|k|\leqslant\dfrac{1}{2})$与椭圆$C$相交于$A$、$B$两点，以线段$OA$，$OB$为邻边作平行四边形$OAPB$，其中顶点$P$在椭圆$C$上，$O$为坐标原点．求$|OP|$的取值范围．

答案 （1）$\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$.

（2）$[\sqrt{3},\dfrac{\sqrt{13}}{2}]$.

解析 （1）由已知可得$e^2=\dfrac{a^2-b^2}{a^2}=\dfrac{1}{4}$，所以$3a^2=4b^2$①

又点$M(1,\dfrac{3}{2})$在椭圆C上，所以$\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{9}{4b^2}=1$②

由①②解之，得$a^2=4,b^2=3$.

故椭圆C的方程为$\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$.

（2）当$k=0$时，$P(0,2m)$在椭圆C上，解得$m=\pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，所以$|OP|=\sqrt{3}$.

当$k\neq0$时，则由$\begin{cases}y=kx+m,\\\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1.\end{cases}$

消y化简整理得：$(3+4k^2)x^2+8kmx+4m^2-12=0$,

$\Delta=64k^2m^2-4(3+4k^2)(4m^2-12)=48(3+4k^2-m^2)>0$③

设A,B,P点的坐标分别为$(x_1,y_1),(x_2,y_2),(x_0,y_0)$，则

$x_0=x_1+x_2=-\dfrac{8km}{3+4k^2},y_0=y_1+y_2=k(x_1+x_2)+2m=\dfrac{6m}{3+4k^2}$.

由于点P在椭圆C上，所以$\dfrac{x_0^2}{4}+\dfrac{y_0^2}{3}=1$.

从而$\dfrac{16k^2m^2}{(3+4k^2)^2}+\dfrac{12m^2}{(3+4k^2)^2}=1$，化简得$4m^2=3+4k^2$，经检验满足③式.

又$|OP|=\sqrt{x_0^2+y_0^2}=\sqrt{\dfrac{64k^2m^2}{(3+4k^2)^2}+\dfrac{36m^2}{(3+4k^2)^2}}$

$=\sqrt{\dfrac{4m^2(16k^2+9)}{(3+4k^2)^2}}=\sqrt{\dfrac{16k^2+9}{4k^2+3}}$

$=\sqrt{4-\dfrac{3}{4k^2+3}}$.

因为$0<|k|\leqslant\dfrac{1}{2}$，得$3<4k^2+3\leqslant 4$，有$\dfrac{3}{4}\leqslant\dfrac{3}{4k^2+3}<1$，

故$\sqrt{3}<|OP|\leqslant\dfrac{\sqrt{13}}{2}$.

综上，所求$|OP|$的取值范围是$[\sqrt{3},\dfrac{\sqrt{13}}{2}]$.

标注 【知识点】 平面解析几何 > 椭圆 > 椭圆的定义、标准方程