2019 年深圳市高三第二次调研考试

理科数学试题答案及评分参考

第Ⅰ卷

一．选择题

1.A	2.C	3.D	4.A	5.B	6.D
7.A	8.C	9.A	10.C	11.B	12. B

二．填空题：

13．2　　14．$\dfrac{x^2}{3}-y^2=1$　　15．72　　16．1009

11．解析：$f(x)=\sqrt{3}\sin\omega x+\cos\omega x=2\sin(\omega x+\dfrac{\pi}{6})$，$x\in R$，令 $t=\omega x+\dfrac{\pi}{6}$，$f(x)=2\sin t$．

若函数 $f(x)$ 恰有一个最大值点和一个最小值点在区间 $[-\dfrac{\pi}{4},\dfrac{\pi}{3}]$ 上，

也即函数 $y=2\sin t$ 恰有一个最大值点和一个最小值点在区间 $[-\dfrac{\pi}{4}\omega+\dfrac{\pi}{6},\dfrac{\pi}{3}\omega+\dfrac{\pi}{6}]$ 上，

$\therefore\begin{cases}-\dfrac{3\pi}{2}<-\dfrac{\pi}{4}\omega+\dfrac{\pi}{6}\le-\dfrac{\pi}{2},\\ \dfrac{\pi}{2}\le\dfrac{\pi}{3}\omega+\dfrac{\pi}{6}<\dfrac{3\pi}{2},\end{cases}$，解得 $\begin{cases}\dfrac{8}{3}\le\omega<\dfrac{20}{3},\\ 1\le\omega<4,\end{cases}$，即 $\dfrac{8}{3}\le\omega<4$，

$\therefore\omega$ 的取值范围为 $[\dfrac{8}{3},4)$，故应选 B．

12．解析：（法一）补成长，宽，高分别为 $\sqrt{3},\sqrt{2},1$ 的长方体(如下图)，

由于 $EF\perp\alpha$，故截面为平行四边形 $MNKL$，可得 $KL+KN=\sqrt{5}$，

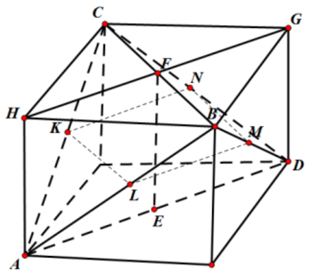
设异面直线 BC 与 AD 所成的角为 θ，则 $\sin\theta=\sin\angle HFB=\sin\angle LKN$，

算得 $\sin\theta=\dfrac{2\sqrt{6}}{5}$，

$\therefore S_{四边形MNKL}=NK\cdot KL\cdot\sin\angle NKL$

$\le\dfrac{2\sqrt{6}}{5}(\dfrac{NK+KL}{2})^2=\dfrac{\sqrt{6}}{2}$，

当且仅当 $NK=KL$ 时取等号，故应选 B．



（法二）$\overrightarrow{FE}\cdot\overrightarrow{AD}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{FA}+\overrightarrow{FD}\right)\cdot\overrightarrow{AD}=\frac{1}{4}\left(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{CD}\right)\cdot\overrightarrow{AD}$

$=\frac{1}{4}\left[\left(\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CD}\cdot\overrightarrow{AD}\right)+\left(\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BD}\cdot\overrightarrow{AD}\right)\right]=0$

$\therefore EF\perp AD$，同理可得 $EF\perp BC$，

设异面直线 BC 与 AD 所成的角为 θ，则 $\sin\theta=\sin\angle HFB=\sin\angle LKN$，

$\because \overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{AD}=\left(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC}\right)\cdot\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AD}=-3+2=-1$，

$\therefore \cos<\overrightarrow{BC},\overrightarrow{AD}>=\frac{\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{AD}}{|\overrightarrow{BC}|\cdot|\overrightarrow{AD}|}=-\frac{1}{5}$，

$\therefore \sin<\overrightarrow{BC},\overrightarrow{AD}>=\sin\theta=\frac{2\sqrt{6}}{5}$，即 $\sin\angle NKL=\frac{2\sqrt{6}}{5}$，

同法一可得 $S_{四边形MNKL}=NK\cdot KL\cdot\sin\angle NKL\leq\frac{\sqrt{6}}{2}$，

当且仅当 $NK=KL$ 时取等号，故应选 B.

16.解析：$\because S_n+S_{n-1}-2S_nS_{n-1}=2na_n$，

$\therefore S_n+S_{n-1}-2S_nS_{n-1}=2n(S_n-S_{n-1})$，

$\therefore 2S_nS_{n-1}=(2n+1)S_{n-1}-(2n-1)S_n$，

$\therefore \frac{2n+1}{S_n}-\frac{2n-1}{S_{n-1}}=2$，

令 $b_n=\frac{2n+1}{S_n}$，则 $b_n-b_{n-1}=2$（$n\geq 2$），

$\therefore$ 数列 $\{b_n\}$ 是以 $b_1=\frac{3}{S_1}=\frac{3}{a_1}=1$ 为首项，公差 $d=2$ 的等差数列，

$\therefore b_n=2n-1$，即 $\frac{2n+1}{S_n}=2n-1$，$\therefore S_n=\frac{2n+1}{2n-1}$，

$\therefore S_1S_2\cdots S_m=3\times\frac{5}{3}\times\cdots\times\frac{2m+1}{2m-1}=2m+1$，

由 $2m+1\geq 2019$，解得 $m\geq 1009$，即正整数 m 的最小值为 1009，故应填 1009.

三、解答题：解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤.

17.（本小题满分 12 分）

已知△ ABC 中，$AB=\sqrt{2}BC$，$AC=2\sqrt{5}$，点 D 在边 AC 上，且 $AD=2CD$，$\angle ABD=2\angle CBD$.

（1）求 $\angle ABC$ 的大小；

（2）求△ ABC 的面积.

解：（1）(法一)依题意设 $\angle ABD=2\angle CBD=2\theta$，

$\because AD=2CD$，$AC=2\sqrt{5}$，

$\therefore AD=\dfrac{4\sqrt{5}}{3}$，$CD=\dfrac{2\sqrt{5}}{3}$，……………………………………………2 分

在△ BAD 中，由正弦定理，可得 $\dfrac{AB}{\sin\angle ADB}=\dfrac{AD}{\sin\angle ABD}$，

$\therefore \sin\angle ADB=\dfrac{AB\sin\angle ABD}{AD}=\dfrac{3AB\sin 2\theta}{4\sqrt{5}}$，……………………………………4 分

同理，在△ BCD 中，由正弦定理，可得

$\sin\angle BDC=\dfrac{BC\sin\angle CBD}{CD}=\dfrac{3BC\sin\theta}{2\sqrt{5}}$，……………………………………6 分

$\because \angle BDC+\angle BDA=\pi$，$\therefore \sin\angle BDC=\sin\angle BDA$，

$\therefore \dfrac{3AB\sin 2\theta}{4\sqrt{5}}=\dfrac{3BC\sin\theta}{2\sqrt{5}}$，

$\because AB=\sqrt{2}BC$，$\therefore \sqrt{2}\sin\theta\cos\theta=\sin\theta$，

$\because 0<\theta<\pi$，$\therefore \sin\theta>0$，$\therefore \cos\theta=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，$\therefore \theta=\dfrac{\pi}{4}$，

$\therefore \angle ABC=3\theta=\dfrac{3\pi}{4}$. ………………………………………………………8 分

（2）在△ ABC 中，由余弦定理，得 $AC^2=AB^2+AC^2-2AB\cdot BC\cos 3\theta$，

$\therefore (2\sqrt{5})^2=(\sqrt{2}BC)^2+BC^2-2\sqrt{2}BC\cdot BC\cos\dfrac{3\pi}{4}$，

解得 $BC=2$，……………………………………………………………10 分

$\therefore S_{\Delta ABC}=\dfrac{1}{2}AB\cdot BC\cdot\sin 3\theta=\dfrac{1}{2}\sqrt{2}BC^2\sin\dfrac{3\pi}{4}=2$. ……………………………12 分

（法二）$\because AD=2CD$，$\therefore \dfrac{S_{\Delta BDC}}{S_{\Delta BDA}}=\dfrac{CD}{AD}=\dfrac{1}{2}$，……………………………………2 分

$\because S_{\Delta BDC}=\dfrac{1}{2}BC\cdot BD\cdot\sin\theta$，$S_{\Delta BDA}=\dfrac{1}{2}AB\cdot BD\cdot\sin 2\theta$，且 $AB=\sqrt{2}BC$，

$\therefore \cos\theta = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$，即 $\theta = \dfrac{\pi}{4}$，

$\therefore \angle ABC = \angle ABD + \angle CBD = 3\theta = \dfrac{3\pi}{4}$，　　……………………………………8 分

(以下同法一)

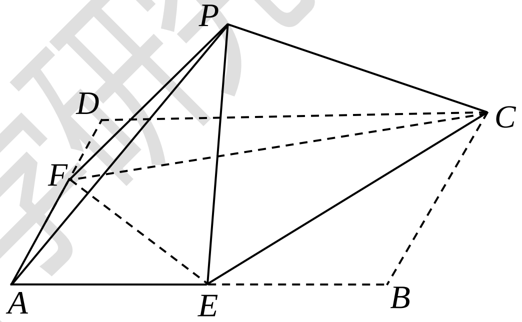
【说明】本题主要考察正弦定理，余弦定理，二倍角公式及三角形面积计算公式等知识，意在考察考生数形结合、转化与化归思想，考察了学生的逻辑推理，数学运算等核心素养.

18.（本小题满分 12 分）

在边长为4的正方形 $ABCD$ 中，点 E、F 分别为边 AB、AD 的中点，以 CE，CF 为折痕将△DFC 和△BCE 折起，使点 B、D 重合于点 P，连结 PA，得到如图所示的四棱锥 $P-AECF$．

（1）求证：$EF \perp PC$；

（2）求直线 PA 与平面 PEC 所成角的正弦值.



（第 18 题图）

解析：（1）(法一)证明：连结 EF，

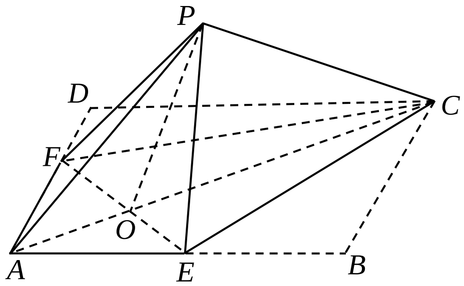
记 AC 与 EF 的交点为 O，

在正方形 $ABCD$ 中，$AB \perp BC$，$AD \perp CD$，

翻折后 $PC \perp PE$，$PC \perp PF$，…………………………3 分

又∵ $PE \cap PF = P$，$\therefore PC \perp$ 平面 PEF，……………4 分

∵ $EF \subset$ 平面 PEF，$\therefore EF \perp PC$；…………………………5 分



(法二)证明：连结 EF，记 AC 与 EF 的交点为 O，

在正方形 $ABCD$ 中，$AC \perp EF$，$BE = DF$，

O 为 EF 的中点，翻折后，$PE = PF$，……………2 分

∵ O 是 EF 的中点，$\therefore EF \perp PO$，

而 $AC \perp EF$，PO 与 AC 相交于 O 点，$\therefore EF \perp$ 平面 PAC，…………………………4 分

又∵ $PC \subset$ 平面 PAC，$\therefore EF \perp PC$；…………………………5 分

（2）(法一)由（1）可知△OPC 为直角三角形，$OP = \sqrt{2}$，$PC = 4$，$OC = 3\sqrt{2}$，

设 P 到 AC 的距离为 h，∵ $\sqrt{2}\cdot 4 = 3\sqrt{2}\cdot h$，$\therefore h = \dfrac{4}{3}$，……………………7 分

$$\therefore V_{P-ABC} = \frac{1}{3}\cdot S_{\Delta ABC}\cdot h = \frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times 2\times 4\times\frac{4}{3} = \frac{16}{9},$$

$S_{\Delta PCE} = \dfrac{1}{2}\cdot PC\cdot PE = 4$，设点 A 到平面 PCE 的距离为 h'，

$\therefore V_{A-PCE} = \dfrac{1}{3}\cdot S_{\Delta ACE}\cdot h' = \dfrac{4}{3}\cdot h'$，$\therefore \dfrac{4}{3}h' = \dfrac{16}{9}$，解得 $h' = \dfrac{4}{3}$，……………………9 分

在 $Rt\triangle POC$ 中，$\cos\angle POC=\dfrac{PO}{OC}=\dfrac{1}{3}$，$\therefore\cos\angle POA=-\dfrac{1}{3}$，

在$\triangle POA$中，$PA^2=OA^2+OP^2-2\cdot OP\cdot OA\cdot\cos\angle POA=\dfrac{48}{9}$，

$\therefore PA=\dfrac{4\sqrt{3}}{3}$，设 PA 与平面 PEC 所成角为 θ，……………………………10 分

$\therefore\sin\theta=\dfrac{h'}{PA}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，……………………………11 分

$\therefore$直线 PA 与平面 PEC 所成角的正弦值为$\dfrac{\sqrt{3}}{3}$．……………………………12 分

(法二)连结 AC，AC 与 EF 交于 O 点，以 OA，OE 所在的直线分别为 x，y 轴，过 O 作垂直于面 $ABCD$ 的直线为 z 轴，建立如图所示的空间直角坐标系，

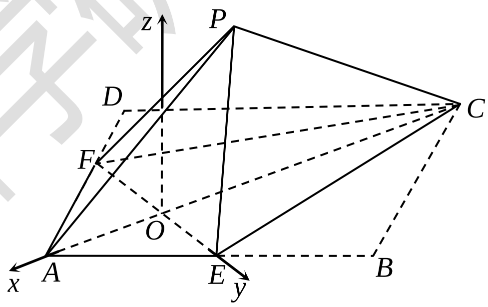
依题意有 $A(\sqrt{2},0,0)$，$C(-3\sqrt{2},0,0)$，$E(0,\sqrt{2},0)$，……………………………6 分

过 P 作 $PG\perp AC$，在 $Rt\Delta POC$ 中，

$OP=\sqrt{2}$，$PC=4$，$OC=3\sqrt{2}$，

$\therefore OP\cdot PC=OC\cdot PG$，

$\therefore PG=\dfrac{4}{3}$，$OG=\sqrt{OP^2-PG^2}=\dfrac{\sqrt{2}}{3}$，



$\therefore P(-\dfrac{\sqrt{2}}{3},0,\dfrac{4}{3})$，……………………8 分

$\therefore\overrightarrow{PA}=(\dfrac{4\sqrt{2}}{3},0,-\dfrac{4}{3})$，$\overrightarrow{PE}=(\dfrac{\sqrt{2}}{3},\sqrt{2},-\dfrac{4}{3})$，$\overrightarrow{CE}=(3\sqrt{2},\sqrt{2},0)$，

思路 1：$\because PF=PE=2$，$EF=2\sqrt{2}$，$\therefore PF\perp PE$，……………………9 分

显然 $PF\perp PC$，又 $PE\cap PC=P$，$\therefore PF\perp$平面 PEC，易知 $F(0,-\sqrt{2},0)$，

$\therefore$平面 PEC 的一个法向量 $\overrightarrow{PF}=(\dfrac{\sqrt{2}}{3},-\sqrt{2},-\dfrac{4}{3})$，……………………10 分

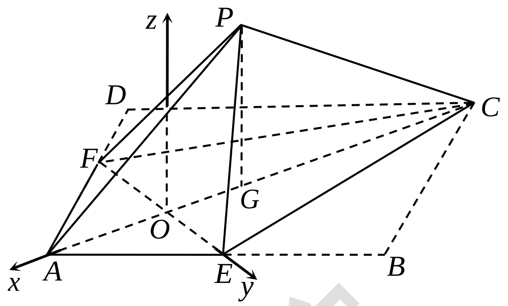
设 PA 与平面 PEC 所成角为 θ，

则 $\sin\theta=\dfrac{|\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PF}|}{|\overrightarrow{PA}|\cdot|\overrightarrow{PF}|}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，……………………11 分

$\therefore$直线 PA 与平面 PEC 所成角的正弦值为$\dfrac{\sqrt{3}}{3}$．……………………12 分

思路 2：设平面 PEC 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$，

$\therefore \begin{cases} \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{CE}=0 \\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{PE}=0 \end{cases}$，$\therefore \begin{cases} 3\sqrt{2}x+\sqrt{2}y=0 \\ \dfrac{\sqrt{2}}{3}x+\sqrt{2}y-\dfrac{4}{3}z=0 \end{cases}$，



取 $x=1$，则 $y=-3$，$z=-2\sqrt{2}$，

则 $\boldsymbol{n}=(1,-3,-2\sqrt{2})$，…………………………10 分

设 PA 与平面 PEC 所成角为 θ，

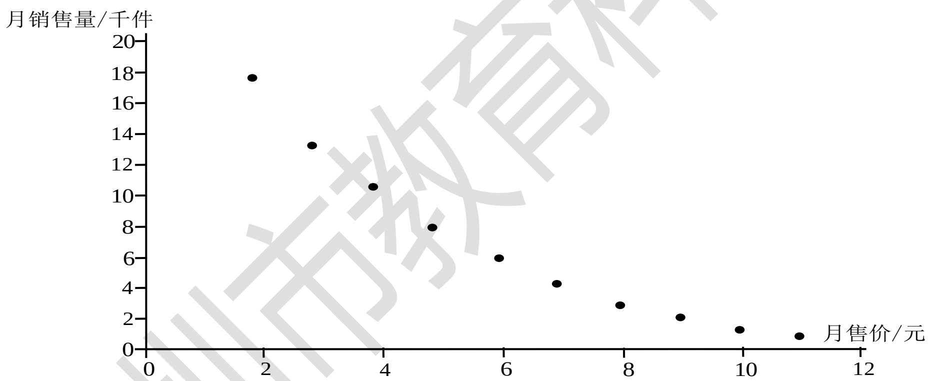
则 $\sin\theta=\dfrac{|\overrightarrow{PA}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\overrightarrow{PA}|\cdot|\boldsymbol{n}|}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，………………11 分

$\therefore$ 直线 PA 与平面 PEC 所成角的正弦值为 $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$．……………………12 分

【说明】本题以翻折问题为载体考察空间中点，线，面的位置关系，异面直线垂直的判定，直线与平面所成角等知识，意在考察考生的空间想象能力，逻辑推理能力以及运算求解能力．

19．（本小题满分 12 分）

某网店销售某种商品，为了解该商品的月销量 y（单位：千件）与月售价 x（单位：元/件）之间的关系，对近几年的月销售量 y_i 和月销售价 x_i $(i=1,2,3,\cdots,10)$ 数据进行了统计分析，得到了下面的散点图：



（1）根据散点图判断，$y=c+d\ln x$ 与 $y=bx+a$ 哪一个更适宜作为月销量 y 关于月销售价 x 的回归方程类型？（给出判断即可，不需说明理由），并根据判断结果及表中数据，建立 y 关于 x 的回归方程；

（2）利用（1）中的结果回答问题：已知该商品的月销售额为 z（单位：千元），当月销售量为何值时，商品的月销售额预报值最大？

解：（1）$y=c+d\ln x$ 更适宜销量 y 关于月销售价 x 的回归方程类型．……1 分

令 $u=\ln x$，先建立 y 关于 u 的线性回归方程，由于

$$\hat{d}=\frac{\sum\limits_{i=1}^{10}(y_i-\bar{y})(u_i-\bar{u})}{\sum\limits_{i=1}^{10}(u_i-\bar{u})^2}=\frac{-27.54}{2.70}=-10.20,$$

$\hat{c}=\overline{y}-\hat{d}\overline{u}=6.6+10.20\times 1.75=24.45$，　　　　　　　　…………………………4 分

所以 y 关于 u 的线性回归方程为 $\hat{y}=24.45-10.20u$，

因此 y 关于 x 的回归方程为 $\hat{y}=24.45-10.20\ln x$.　　　　　　　　…………………………6 分

（2）依题意得：$z=xy=x(24.45-10.20\ln x)$，　　　　　　　　…………………………7 分

$z'=xy=[x(24.45-10.20\ln x)]'=14.25-10.20\ln x$，　　　　　　　　…………………………8 分

令 $z'=0$，即 $14.25-10.20\ln x=0$，解得 $\ln x\approx 1.40$，

所以 $x\approx 4.06$，　　　　　　　　　　　　　　　　…………………………10 分

当时 $x\in(0,4.06)$，z 递增，当 $x\in(4.06,+\infty)$ 时，z 递减，

故当 $x=4.06$，即月销售量 $y=10.17$（千件）时，月销售额预报值最大.　　……12 分

【命题意图】本题考查线性回归方程的知识和应用，通过散点图判断变量之间的关系建立回归模型，通过利用线性回归方程求非线性回归方程，通过建立函数模型利用导数求最大销售额问题. 综合考查概率统计知识分析处理数据，解决实际问题的能力.

20.（本小题满分 12 分）

已知抛物线 $C:x^2=4y$，过点 $(2,3)$ 的直线 l 交 C 于 A、B 两点，抛物线 C 在点 A、B 处的切线交于点 P.

（1）当点 A 的横坐标为 4 时，求点 P 的坐标；

（2）设 Q 是抛物线 C 上的动点，当 $|PQ|$ 取最小值时，求点 Q 的坐标及直线 l 的方程.

解：（1）$\because$ 点 A 的横坐标为 4，$\therefore A(4,4)$，

易知此时直线 l 的方程为 $y=\frac{1}{2}x+2$，…………1 分

联立 $\begin{cases}x^2=4y,\\ y=\frac{1}{2}x+2,\end{cases}$，解得 $\begin{cases}x=-2,\\ y=1,\end{cases}$，或 $\begin{cases}x=4,\\ y=4,\end{cases}$，$\therefore B(-2,1)$，………………2 分

由 $y=\frac{x^2}{4}$ 得 $y'=\frac{x}{2}$，所以 $k_{PA}=2$，直线 PA 方程为 $y=2x-4$，…………3 分

同理可得直线 PB 方程为 $y=-x-1$，………………………4 分

联立 $\begin{cases}y=2x-4\\ y=-x-1\end{cases}$，可得 $\begin{cases}x=1\\ y=-2\end{cases}$，故点 P 的坐标为 $(1,-2)$.…………………5 分

（2）（法一）设 $A(x_1,\frac{x_1}{4})$，$B(x_2,\frac{x_2}{4})$，由 $y=\frac{x^2}{4}$，$y'=\frac{x}{2}$，所以 $k_{PA}=\frac{x_1}{2}$，

所以直线 PA 的方程为 $y-\frac{x_1^2}{4}=\frac{x_1}{2}(x-x_1)$，即 $y=\frac{x_1}{2}x-\frac{x_1^2}{4}$，…………6 分

同理 PB 的方程为 $y=\frac{x_2}{2}x-\frac{x_2^{\ 2}}{4}$，联立解得 $P(\frac{x_1+x_2}{2},\frac{x_1x_2}{4})$，……………7 分

依题意直线 l 的斜率存在，不妨设直线 l 的方程为 $y-3=k(x-2)$，

由 $\begin{cases}x^2=4y,\\ y-3=k(x-2),\end{cases}$ 得 $x^2-4kx+8k-12=0$，

易知 $\Delta>0$，因此 $x_1+x_2=4k$，$x_1x_2=8k-12$，

$\therefore P(2k,2k-3)$，…………………………8 分

$\therefore$ 点 P 在直线 $l_1:x-y-3=0$ 上，当 $|PQ|$ 取最小值时，即抛物线 $C:x^2=4y$ 上的动点 Q 到直线 l_1 的距离最小，……………………9 分

设 $Q(x_0,\frac{x_0^{\ 2}}{4})$，则 Q 到 l_1 的距离 $d=\frac{|x_0-\frac{x_0^{\ 2}}{4}-3|}{\sqrt{2}}=\frac{|(\frac{x_0}{2}-1)^2+2|}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}+\frac{(\frac{x_0}{2}-1)^2}{\sqrt{2}}$，…………10 分

$\therefore$ 当 $x_0=2$ 时，d 取最小值 $\sqrt{2}$，此时 $Q(2,1)$，…………………………11 分

易知过点 Q 且垂直于 l_1 的直线方程为 $y=-x+3$，

由 $\begin{cases}y=-x+3,\\ x-y-3=0,\end{cases}$ 解得 $P(3,0)$，$k=\frac{3}{2}$，$\therefore$ 直线 l 的方程为 $y=\frac{3}{2}x$，

综上，点 Q 的坐标为 $(2,1)$，直线 l 的方程为 $y=\frac{3}{2}x$．…………12 分

（法二）设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，$P(x_0,y_0)$，由 $y=\frac{x^2}{4}$，$y'=\frac{x}{2}$，

$\therefore k_{PA}=\frac{x_1}{2}$，直线 PA 的方程为 $y-y_1=\frac{x_1}{2}(x-x_1)$，即 $y=\frac{x_1}{2}x-y_1$，

同理 PB 的方程为 $y=\frac{x_2}{2}x-y_2$，…………………………7 分

因为点 P 在切线 PA，PB 上，$\therefore \begin{cases}y_0=\frac{x_1}{2}x_0-y_1,\\ y_0=\frac{x_2}{2}x_0-y_2,\end{cases}$，

$\therefore A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$ 在直线 $y_0=\frac{x_0}{2}x-y$ 上，

$\therefore$ 直线 l 的方程为 $y_0=\frac{x_0}{2}x-y$，…………………………8 分

又直线 l 的过点 $(2,3)$，$\therefore y_0=x_0-3$，

即点 P 在直线 $l_1:x-y-3=0$ 上．…………………………9 分

以下同法一.

（法三）设 $P(x_0,y_0)$，显然两条切线的斜率均存在，

可设过点 P 与 C 相切的直线方程为 $y-y_0=k(x-x_0)$，且切线 PA，PB 的斜率分别为 k_1，k_2，

把 $y-y_0=k(x-x_0)$ 与 $x^2=4y$ 联立，并化简得，

$x^2-4kx+4kx_0-4y_0=0$，

$\therefore \Delta=(4k)^2-4(4kx_0-4y_0)=0$，即 $k^2-x_0k+y_0=0$，

$\therefore k_1$，k_2 是方程 $k^2-x_0k+y_0=0$ 的两根，$k_1+k_2=x_0$，$k_1k_2=y_0$，$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$7 分

此时 $x^2-4kx+4kx_0-4y_0=0$ 的两根为 $x=2k_1$ 或 $x=2k_2$，即为切点 A，B 的横坐标，

$\therefore A(2k_1,k_1{}^2)$，$B(2k_2,k_2{}^2)$，$k_l=\dfrac{k_2{}^2-k_1{}^2}{2k_2-2k_1}=\dfrac{k_1+k_2}{2}$，

直线 l 的方程为 $y-k_1{}^2=\dfrac{k_1+k_2}{2}(x-2k_1)$，即 $y=\dfrac{k_1+k_2}{2}x-k_1k_2$，$\cdots\cdots\cdots\cdots$8 分

又直线 l 过点 $M(2,3)$，则 $k_1+k_2-k_1k_2=3$，即 $x_0-y_0=3$，

$\therefore$ 点 P 在直线 $l_1: x-y-3=0$ 上. $\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$9 分

以下同法一.

【说明】本题以直线与抛物线为载体，及其几何关系为背景，利用方程思想解决几何问题，主要考察抛物线的切点弦，直线与抛物线的位置关系等知识，考查学生的逻辑推理，数学运算等数学核心素养及思辨能力.

21.（本小题满分 12 分）

已知函数 $f(x)=\mathrm{e}^x-a\mathrm{e}^{-x}-(a+1)x$（$a\in\mathbf{R}$）.（其中常数 e=2.718 28…，是自然对数的底数）

（1）求函数 $f(x)$ 的极值点；

（2）若对于任意 $0<a<1$，关于 x 的不等式 $[f(x)]^2<\lambda(\mathrm{e}^{a-1}-a)$ 在区间 $(a-1,+\infty)$ 上存在实数解，求实数 λ 的取值范围.

解：（1）易知 $f'(x)=\mathrm{e}^x+a\mathrm{e}^{-x}-(a+1)=\dfrac{(\mathrm{e}^x-1)(\mathrm{e}^x-a)}{\mathrm{e}^x}$，$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$1 分

①当 $a\le 0$ 时，

x	$(-\infty,0)$	0	$(0,+\infty)$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	□	极小值	□

$\therefore$ 函数 $f(x)$ 的极小值点为 $x=0$，无极大值点；$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$2 分

②当 $0<a<1$ 时，

x	$(-\infty,\ln a)$	$\ln a$	$(\ln a,0)$	0	$(0,+\infty)$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	□	极大值	□	极小值	□

$\therefore$函数 $f(x)$ 的极大值点为 $x=\ln a$，极小值点为 $x=0$；··3 分

③当 $a=1$ 时， $f'(x)=\dfrac{(e^x-1)^2}{e^x}\geq 0$，

$\therefore$函数 $f(x)$ 单调递增，即 $f(x)$ 无极值点；···4 分

④当 $a>1$ 时，

x	$(-\infty,0)$	0	$(0,\ln a)$	$\ln a$	$(\ln a,+\infty)$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	□	极大值	□	极小值	□

$\therefore$函数 $f(x)$ 的极大值点为 $x=0$，极小值点为 $x=\ln a$；··5 分

综上所述，当 $a\leq 0$ 时，函数 $f(x)$ 的极小值点为 $x=0$，无极大值点；

当 $0<a<1$ 时，函数 $f(x)$ 的极大值点为 $x=\ln a$，极小值点为 $x=0$；

当 $a=1$ 时，函数 $f(x)$ 无极值点；

当 $a>1$ 时，函数 $f(x)$ 的极大值点为 $x=0$，极小值点为 $x=\ln a$.

（2）以下需多次引用到如下不等式：$e^x\geq 1+x$，当且仅当 $x=0$ 时取等号，证明略.

注意到当 $0<a<1$ 时，有 $\ln a<a-1<0$.

（法一）$\because$当 $0<a<1$ 时，$e^{a-1}>1+a-1=a$，$\therefore \ln a<a-1<0$，··················6 分

（法二）令 $g(a)=\ln a-a+1$，则 $g'(a)=\dfrac{1}{a}-1$，当 $0<a<1$ 时，$g'(a)>0$，

$\therefore g(a)<g(1)=0$，即 $a-1>\ln a$，

显然 $a-1<0$，$\therefore \ln a<a-1<0$，··6 分

$\therefore$由（1）可知当 $0<a<1$ 时， $f(x)$ 在区间 $(a-1,0)$ 上递减，在区间 $(0,+\infty)$ 上递增，

$\therefore f(x)$ 在区间 $(a-1,+\infty)$ 上的最小值为 $f(0)=1-a$，

$\because$关于 x 的不等式 $[f(x)]^2<\lambda(e^{a-1}-a)$ 在区间 $(a-1,+\infty)$ 上存在实数解，

$\therefore$只需当 $0<a<1$ 时，关于 a 的不等式 $(1-a)^2<\lambda(e^{a-1}-a)$ 恒成立，························8 分

由上易知当 $0<a<1$ 时，$e^{a-1}-a>0$，

$\therefore$ 只需当 $0<a<1$ 时，不等式 $\lambda>\dfrac{(1-a)^2}{e^{a-1}-a}$ 恒成立即可，……………………………………9 分

令函数 $F(x)=\dfrac{(1-x)^2}{e^{x-1}-x}$，$0\le x<1$，则 $F'(x)=\dfrac{(x-1)(3e^{x-1}-xe^{x-1}-x-1)}{(e^{x-1}-x)^2}$，

(法一) 令函数 $G(x)=3e^{x-1}-xe^{x-1}-x-1$，$0\le x<1$，则 $G'(x)=(2-x)e^{x-1}-1$，

当 $0<x<1$ 时，$\because$ $e^{1-x}>2-x$，$\therefore$ $(2-x)e^{x-1}<1$，$\therefore$ $G'(x)<0$，

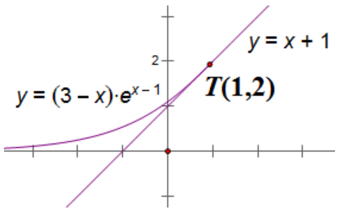
$\therefore$ $G(x)>G(1)=0$，即 $G(x)>0$，……………………………………………………………11 分

(法二) 令函数 $u(x)=(3-x)e^{x-1}$，$0\le x<1$，则 $u'(x)=(2-x)e^{x-1}>0$，

$\therefore$ $u'(1)=1$，又 $u(1)=2$，

$\therefore$ 函数 $u(x)=(3-x)e^{x-1}$ 在点 $T(1,2)$ 处的切线方程为 $y-2=x-1$，即 $y=x+1$，

如图所示，易知 $(3-x)e^{x-1}\ge x+1$，



当且仅当 $x=1$ 时取等号，

$\therefore$ 当 $0<x<1$ 时，$G(x)>0$，………………11 分

$\therefore$ 当 $0<x<1$ 时，$F'(x)<0$，

$\therefore$ $F(x)<F(0)=e$，即 $F(x)<e$，

$\therefore$ 当 $0<a<1$ 时，不等式 $\lambda>\dfrac{(1-a)^2}{e^a-ea}$ 恒成立，只需 $\lambda\ge e$，

综上，实数 λ 的取值范围为 $[e,+\infty)$. ……………………………………………………………12 分

【命题意图】 本题以基本初等函数、不等式问题为载体，考查学生利用导数分析、解决问题的能力，分类讨论思想及逻辑推理、数学运算等数学核心素养，具有一定综合性.

22.（本小题满分 10 分）选修 4—4：坐标系与参数方程

在平面直角坐标系 xOy 中，曲线 C_1 的参数方程为 $\begin{cases}x=2\cos\alpha,\\ y=\sin\alpha,\end{cases}$（$\alpha$ 为参数），圆 C_2 的方程为 $(x-2)^2+y^2=4$，以原点 O 为极点，x 轴正半轴为极轴建立极坐标系，射线 l 的极坐标方程为 $\theta=\theta_0$ $(\rho\ge 0)$.

（1）求曲线 C_1 和圆 C_2 的极坐标方程；

（2）当 $0<\theta_0<\dfrac{\pi}{2}$ 时，射线 l 与曲线 C_1 和圆 C_2 分别交于异于点 O 的 M 、N 两点，若 $|ON|=2|OM|$，求△MC_2N 的面积.

解：（1）由 $\begin{cases} x=2\cos\alpha, \\ y=\sin\alpha \end{cases}$，得 C_1 的普通方程为 $\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$，……………………………………1 分

把 $x=\rho\cos\theta$，$y=\rho\sin\theta$ 代入，得 $\dfrac{(\rho\cos\theta)^2}{4}+(\rho\sin\theta)^2=1$，

即 $\rho^2=\dfrac{4}{\cos^2\theta+4\sin^2\theta}=\dfrac{4}{1+3\sin^2\theta}$，

所以 C_1 的极坐标方程为 $\rho^2=\dfrac{4}{1+3\sin^2\theta}$；…………………………………………………………3 分

由 $(x-2)^2+y^2=4$，把 $x=\rho\cos\theta$，$y=\rho\sin\theta$ 代入，得 $\rho=4\cos\theta$，

所以 C_2 的极坐标方程为 $\rho=4\cos\theta$；…………………………………………………………5 分

（2）把 $\theta=\theta_0$ 代入 $\rho^2=\dfrac{4}{1+3\sin^2\theta}$，得 ${\rho_M}^2=\dfrac{4}{1+3\sin^2\theta_0}$，

把 $\theta=\theta_0$ 代入 $\rho=4\cos\theta$，得 $\rho_N=4\cos\theta_0$，……………………………6 分

由 $|ON|=2|OM|$，得 $\rho_N=2\rho_M$，即 ${\rho_N}^2=4{\rho_M}^2$，

即 $(4\cos\theta_0)^2=\dfrac{16}{1+3\sin^2\theta_0}$，解得，……………………………7 分

$\sin^2\theta_0=\dfrac{2}{3}$，$\cos^2\theta_0=\dfrac{1}{3}$，又 $0<\theta_0<\dfrac{\pi}{2}$，

所以 $\rho_M=\sqrt{\dfrac{4}{1+3\sin^2\theta_0}}=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$，$\rho_N=4\cos\theta_0=\dfrac{4\sqrt{3}}{3}$，……………………8 分

所以△MC_2N 的面积 $S_{\Delta MC_2N}=S_{\Delta OC_2N}-S_{\Delta OC_2M}$

$=\dfrac{1}{2}|OC_2|(\rho_N-\rho_M)\cdot\sin\theta_0=\dfrac{1}{2}\times2\times\dfrac{2\sqrt{3}}{3}\times\dfrac{\sqrt{6}}{3}=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$. ……………………10 分

【说明】本题主要考查了椭圆，圆的极坐标方程与直角坐标方程以及参数方程的互化、极坐标的几何意义与应用等知识点，重点考查数形结合思想，体现了数学运算、逻辑推理等核心素养. 考察考生的化归与转化能力.

23.（本小题满分 10 分）选修 4－5：不等式选讲

已知函数 $f(x)=|x-m|+|x+\dfrac{1}{m}|(m>1)$.

（1）当 $m=2$ 时，求不等式 $f(x)>3$ 的解集；

（2）证明：$f(x)+\dfrac{1}{m(m-1)}\geq 3$.

解：（1）当 $m=2$ 时，$f(x)=|x-2|+|x+\dfrac{1}{2}|$，　　　　　　　　　　　　　　　　………………………1 分

①当 $x\leq -\dfrac{1}{2}$ 时，原不等式等价于 $(2-x)-(x+\dfrac{1}{2})>3$，解得 $x<-\dfrac{3}{4}$，　　　　……………2 分

②当 $-\dfrac{1}{2}<x<2$ 时，原不等式等价于 $\dfrac{5}{2}>3$，不等式无解，……………3 分

③当 $x\geq 2$ 时，原不等式等价于 $(x-2)+\left(x+\dfrac{1}{2}\right)>3$，解得 $x>\dfrac{9}{4}$，　　　　………………4 分

综上，不等式 $f(x)>3$ 的解集为 $(-\infty,-\dfrac{3}{4})\cup(\dfrac{9}{4},+\infty)$；　　　　　　　　………………5 分

（2）由题 $f(x)=|x-m|+|x+\dfrac{1}{m}|\geq|m+\dfrac{1}{m}|$，　　　　　　　　　　………………………6 分

$\because m>0$，$\therefore |m+\dfrac{1}{m}|=m+\dfrac{1}{m}$，

$\therefore f(x)\geq m+\dfrac{1}{m}$，　当且仅当 $x\in\left[-\dfrac{1}{m},m\right]$ 时等号成立.　　　　　　　　………………7 分

$\therefore f(x)+\dfrac{1}{m(m-1)}\geq m+\dfrac{1}{m}+\dfrac{1}{m(m-1)}=m+\dfrac{1}{m-1}=(m-1)+\dfrac{1}{m-1}+1$，

$\because m>1$，$\therefore m-1>0$，$\therefore (m-1)+\dfrac{1}{m-1}+1\geq 2\sqrt{(m-1)\cdot(\dfrac{1}{m-1})}+1=3$，………………9 分

$\therefore f(x)+\dfrac{1}{m(m-1)}\geq 3$，当 $m=2$，且 $x\in[-\dfrac{1}{2},2]$ 时等号成立.………………………10 分

【说明】本题主要考查绝对值三角不等式以及不等式的解法，分段函数，基本不等式等知识点，重点考查分类讨论，数形结合的思想，体现了数学运算、逻辑推理等核心素养.