深圳外国语学校 2015-2016 学年度高一第二学期学段（一）考试

数学试卷

（说明：本试卷考试时间为 120 分钟，满分为 120 分）

第 I 卷

一、选择题：本大题共 10 小题，每小题 3 分．在每小题给出的四个选择中，只有一项是符合题目要求的．

1． $\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)=$（　　）．

A． $\frac{\sqrt{3}}{2}$　　B． $\frac{1}{2}$　　C． $-\frac{\sqrt{3}}{2}$　　D． $-\frac{1}{2}$

2．若 $2016°$ 角的顶点在坐标原点，始边在 x 轴非负半轴上，则该角的终边落在（　　）．

A．第一象限　　B．第二象限　　C．第三象限　　D．第四象限

3．在四边形 $ABCD$ 中，$\overrightarrow{AB}=2\overrightarrow{DC}$，设 $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{AD}=\boldsymbol{b}$，则 $\overrightarrow{AC}$ 等于（　　）．

A． $2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$　　B. $\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}$　　C. $\frac{1}{2}\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$　　D. $\boldsymbol{a}+\frac{1}{2}\boldsymbol{b}$

4．已知角 α 的终边经过点 $P(m,-3)$ 且 $\cos\alpha=-\frac{4}{5}$，且实数 m 的值是（　　）．

A． $-\frac{11}{4}$　　B． $\frac{11}{4}$　　C． -4　　D． 4

5． $\frac{\sin 47°-\sin 17°\cos 30°}{\cos 17°}$ 的值是（　　）．

A． $\frac{1}{2}$　　B． $\frac{\sqrt{3}}{2}$　　C． $\frac{\sqrt{2}}{2}$　　D． $-\frac{1}{2}$

6．已知向量 $\boldsymbol{a}=(1,2)$，$\boldsymbol{b}=(-2,-4)$，$|\boldsymbol{c}|=\sqrt{5}$，若 $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=\frac{5}{2}$，则 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{c}$ 的夹角为（　　）．

A． $30°$　　B． $60°$　　C． $120°$　　D． $150°$

7．已知平面上不共线的四点 O，A，B，C，若 $\overrightarrow{OA}-3\overrightarrow{OB}+2\overrightarrow{OC}=\vec{0}$，则 $\frac{|\overrightarrow{AB}|}{|\overrightarrow{BC}|}=$（　　）．

A． $\frac{1}{3}$　　B． $\frac{1}{2}$　　C． 1　　D． 2

8．要得到函数 $y=\cos x$ 的图象，只需将函数 $y=\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)$ 的图象上所有的点（　　）．

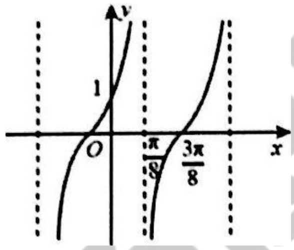
A．横坐标缩短到原来的 $\frac{1}{2}$ 倍（纵坐标不变），再向左平行移动 $\frac{\pi}{8}$ 个单位长度

B．横坐标缩短到原来的 $\frac{1}{2}$ 倍（纵坐标不变），再向右平行移动 $\frac{\pi}{4}$ 个单位长度

C．横坐标伸长到原来的 2 倍（纵坐标不变），再向右平行移动 $\frac{\pi}{8}$ 个单位长度

D．横坐标伸长到原来的 2 倍（纵坐标不变），再向左平行移动 $\frac{\pi}{4}$ 个单位长度

9．已知函数 $f\left(x\right)=A\tan\left(\omega x+\theta\right)\left(\omega>0,\left|\theta\right|<\dfrac{\pi}{2}\right)$ 的部分图象如图，则 $f\left(\dfrac{\pi}{12}\right)=$（　　）



A．$\dfrac{\sqrt{3}}{3}$　　B．$2-\sqrt{3}$　　C．$2+\sqrt{3}$　　D．$\sqrt{3}$

10．已知函数 $f\left(x\right)=\sin x-\dfrac{1}{2x^2}$ 在区间 $\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right]$ 上的零点个数为 n，则 n 的值为（　　）．

A．0　　B．1　　C．2　　D．3

第 II 卷

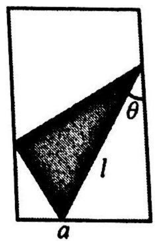
二、填空题：本大题共 4 小题，每小题 4 分．

11．已知扇形的半径为 2cm，面积为 4cm^2，则该扇形的圆心角为________ rad．

12．已知 $\boldsymbol{a}=\left(\cos\theta,\sin\theta\right)$，$\boldsymbol{b}=\left(1,-2\right)$ 共线，则 $\dfrac{\sin\left(\dfrac{\pi}{2}+\theta\right)+\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-\theta\right)}{\sin\left(\pi-\theta\right)+\cos\left(\pi+\theta\right)}=$________．

13．在 $\triangle ABC$ 中，$\dfrac{\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB}}{\left|\overrightarrow{AB}\right|}=1$，$\dfrac{\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{BA}}{\left|\overrightarrow{BA}\right|}=2$，则边 AB 的长度为________．

14．如图，将一边长为 a 的矩形纸片的右下角折起，使得该角的顶点落在矩形的左边上若将折痕长 l 表示成 θ 的函数 $l=f\left(\theta\right)\left(0<\theta<\dfrac{\pi}{2}\right)$，则 $f\left(\theta\right)=$________．



三、解答题：本大题共 5 小题，共 54 分，解答应写出必要的文字说明、证明过程或演算步骤．

15．（本小题满分 10 分）

已知平面向量 $\boldsymbol{a}=\left(1,0\right)$，$\boldsymbol{b}=\left(2,1\right)$，$\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}-\dfrac{2\left(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}\right)\boldsymbol{b}}{\left|\boldsymbol{b}\right|^2}$．

（1）求向量 $\boldsymbol{c}$ 的坐标；

（2）设向量 $\boldsymbol{c}$ 与向量 $\boldsymbol{b}$ 的夹角为 θ，求 $\tan\theta$ 的值.

16．（本小题满分 10 分）

已知函数 $f(x)=\dfrac{1-\sqrt{2}\sin\left(2x-\dfrac{\pi}{4}\right)}{\cos x}$.

（1）求 $f(x)$ 的定义域；

（2）设 α 为第四象限的角，且 $\tan\alpha=-\dfrac{4}{3}$，求 $f(\alpha)$ 的值.

17．（本小题满分 10 分）

已知函数 $f(x)=\dfrac{1}{2}\sin(\omega x)+\sqrt{3}\cos^2\dfrac{\omega x}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，$\omega>0$.

（1）求证：对任意 $\omega>0$，函数 $f(x)$ 的图象过定点；

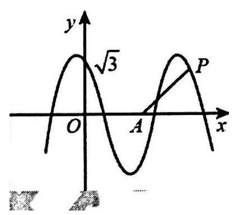
（2）若函数 $f(x)$ 的最小正周期为 4π，求 $f(x)$ 的单调递增区间.

18．（本小题满分 12 分）

如图，函数 $y=2\cos(2x+\theta)$（$x\in\mathbf{R}$，$0\le\theta\le\dfrac{\pi}{2}$）的图象与 y 轴相交于点 $\left(0,\sqrt{3}\right)$.

（1）求 θ 的值；

（2）已知点 $A\left(\dfrac{\pi}{2},0\right)$，点 P 是该函数图象上一点，点 $Q(x_0,y_0)$ 是 PA 的中点，当 $y_0=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，$x_0\in\left[\dfrac{\pi}{2},\pi\right]$ 时，求 x_0 的值.

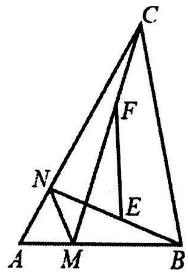


19．（本小题满分 12 分）

如图，M 是 $\triangle ABC$ 的边 AB 的第一个三等分点，N 是边 AC 的第一个四等分点，设 $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{AC}=\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{BE}=\lambda\overrightarrow{BN}$，$\overrightarrow{CF}=\mu\overrightarrow{CM}$，$\lambda,\mu\in\mathbf{R}$.

（1）设 λ，μ，$\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 表示 $\overrightarrow{MN}$ 及 $\overrightarrow{FE}$；

（2）求 λ，μ 的值，使得四边形 $MEFN$ 为平行四边形.



第Ⅲ卷

附加题（本卷共计 20 分）

20．（本小题满分 10 分）

在平面直角坐标系 xOy 中，已知点 $A(r_1\cos\theta, r_1\sin\theta)$，$B\left(r_2\cos\left(\theta+\dfrac{\pi}{2}\right), r_2\sin\left(\theta+\dfrac{\pi}{2}\right)\right)$ 均在曲线 $3x^2+4y^2=12$，其中 $r_1>0$，$r_2>0$，$\theta\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right)$.

（1）证明：$\overrightarrow{OA}\perp\overrightarrow{OB}$；

（2）当 r_1、r_2，θ 变化时，求 $\left|\overrightarrow{AB}\right|$ 的最小值与最大值.

21．（本小题满分 10 分）

已知 $\alpha\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$，$\beta\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$，求证：

（1）若 $\sin^2\alpha+\sin^2\beta<\sin(\alpha+\beta)$，则 $\alpha+\beta<\dfrac{\pi}{2}$；

（2）若 $\sin^2\alpha+\sin^2\beta=\sin(\alpha+\beta)$，则 $\alpha+\beta=\dfrac{\pi}{2}$.

深圳外国语学校 2015-2016 学年度高一第二学期学段（一）试卷【解析】

1．B

【解析】$\cos\left(-\dfrac{\pi}{3}\right)=\cos\left(\dfrac{\pi}{3}\right)=\cos(60^\circ)=\dfrac{1}{2}$

故答案为 B．

2．C

【解析】$2016^\circ=216^\circ+5\cdot 360^\circ$ 终边与 216° 相同，在第三象限．

3．C

【解析】$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DC}=\vec{b}+\dfrac{1}{2}\vec{a}$

4．C

【解析】$\because \cos\alpha=-\dfrac{4}{5}<0$

$\therefore \alpha$ 为第 II 象限或第 III 象限的角

又由角 α 的终边经过点 $P(m,-3)$，

故 α 为第 III 象限的角，即 $m<0$，

则 $\cos\alpha=-\dfrac{4}{5}=\dfrac{m}{\sqrt{m^2+(-3)^2}}$

计算得出 $m=-4$，或 $m=4$（舍去）

所以 C 选项是正确的

5．A

【解析】因为 $\sin 47^\circ=\sin(30^\circ+17^\circ)=\sin 30^\circ\cos 17^\circ+\cos 30^\circ\sin 17^\circ$，

所以原式$=\dfrac{\sin 30^\circ\cos 17^\circ}{\cos 17^\circ}=\dfrac{1}{2}$．

6．C

【解析】$\vec{a}+\vec{b}=(-1,-2)=-\vec{a}$，设 $\vec{a}$ 与 $\vec{c}$ 的夹角为 θ，则

$(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{c}=-\vec{a}\cdot\vec{c}=-|\vec{a}||\vec{c}|\cos\theta=\dfrac{5}{2}$ 可得 $\cos\theta=\dfrac{-\frac{5}{2}}{|\vec{a}||\vec{c}|}=\dfrac{-\frac{5}{2}}{\sqrt{1^2+2^2}\times\sqrt{5}}=-\dfrac{1}{2}\Rightarrow\theta=120^\circ$．

故本题正确答案为 C．

7．D

【解析】$\overrightarrow{OA}-3\overrightarrow{OB}+2\overrightarrow{OC}=\vec{0}$，

$\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}=2\left(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OC}\right)$

$\therefore \overrightarrow{BA}=2\overrightarrow{CB}$， $\therefore \dfrac{|\overrightarrow{AB}|}{|\overrightarrow{BC}|}=2$

所以 D 选项是正确的.

8．D

【解析】根据三角形函数图象性质，首先需将横坐标伸长到原来的 2 倍，得到 $y=\sqrt{2}\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)$.

再向左平移 $\dfrac{\pi}{4}$ 个单位可得 $y=\sqrt{2}\sin\left(x+\dfrac{\pi}{2}\right)=\sqrt{2}\cos x$.

故本题正确答案为 D.

9．C

【解析】：由图知 $T=\left(\dfrac{3\pi}{8}-\dfrac{\pi}{8}\right)\cdot 2=\dfrac{\pi}{2}\Rightarrow \omega=\dfrac{\pi}{\frac{\pi}{2}}=2$

$$2\cdot\frac{\pi}{8}+\theta=\frac{\pi}{2}k\pi\left(k\in\mathbf{Z}\right)\Rightarrow\theta=\frac{\pi}{4}$$

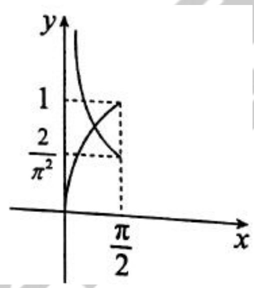
$$f\left(0\right)=A\tan\frac{\pi}{4}=A=1\Rightarrow f\left(x\right)=\tan\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)$$

$$f\left(\frac{\pi}{12}\right)=\tan\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\tan\frac{\pi}{6}+\tan\frac{\pi}{4}}{1-\tan\frac{\pi}{6}\tan\frac{\pi}{4}}=\frac{\frac{\sqrt{3}}{3}+1}{1-\frac{\sqrt{3}}{3}}=2+\sqrt{3}$$

10．B

【解析】 $f\left(x\right)$ 的零点，即 $y=\sin x$ 与 $y=\dfrac{1}{2x^2}$ 的交点横坐标.

在 $\left(n,\dfrac{\pi}{2}\right)$ 上图象如图，所以有一个零点.



二、填空题

11． 2

【解析】$\because$扇形的半径 $r=2\text{cm}$， 面积 $S=4\text{cm}^2$，

设扇形的圆心角为 α，则 $S=\dfrac{1}{2}\alpha r^2$， 解得： $\alpha=2\text{rad}$.

12．$\frac{1}{3}$

【解析】$\vec{a}$，$\vec{b}$共线，所以$\cos\theta=-\frac{1}{2}\sin\theta$．

$$\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)+\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)}{\sin(\pi-\theta)+\cos(\pi-\theta)}=\frac{\cos\theta+\sin\theta}{\sin\theta-\cos\theta}=\frac{-\frac{1}{2}\sin\theta+\sin\theta}{\sin\theta-\left(-\frac{1}{2}\sin\theta\right)}=\frac{1}{3}.$$

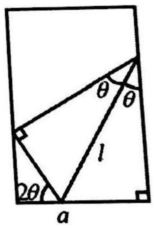
13．3

【解析】$\because \frac{\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB}}{\left|\overrightarrow{AB}\right|}=1$，$\frac{\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{BA}}{\left|\overrightarrow{BA}\right|}=2$，

$\therefore \frac{\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{BA}}{\left|\overrightarrow{BA}\right|}=\frac{\left(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}\right)\cdot\overrightarrow{BA}}{\left|\overrightarrow{BA}\right|}=\frac{\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BA}}{\left|\overrightarrow{BA}\right|}+\left|\overrightarrow{AB}\right|=-1+\left|\overrightarrow{AB}\right|=2$，

$\therefore \left|\overrightarrow{AB}\right|=3$．

14．$\frac{a}{\sin\theta+\sin\theta\sin2\theta}$



【解析】由对称关系可知角的大小，如图所示．

利用角度和长度的关系有等式：$l\sin\theta+l\sin\theta\sin2\theta=a$

$l=\frac{a}{\sin\theta+\sin\theta\sin2\theta}$

三、解答题

15．解：（1）$\vec{a}\cdot\vec{b}=1\times2+0\times1=2$，$\left|\vec{b}\right|^2=2^2+1^2=5$

$$\vec{c}=\vec{a}-\frac{4}{5}\vec{b}=(1,0)-\frac{4}{5}\times(2,1)=\left(-\frac{3}{5},-\frac{4}{5}\right)$$

（2）$\cos\theta=\frac{\vec{b}\cdot\vec{c}}{\left|\vec{b}\right|\cdot\left|\vec{c}\right|}=\frac{2\cdot\left(-\frac{3}{5}\right)+1\cdot\left(-\frac{4}{5}\right)}{\sqrt{5}\sqrt{\left(-\frac{3}{5}\right)^2+\left(-\frac{4}{5}\right)^2}}=-\frac{2\sqrt{5}}{5}$

$\sin\theta=\sqrt{1-\cos^2\theta}=\frac{\sqrt{5}}{5}$

$\tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=-\frac{1}{2}$．

16．解：（1）由$\cos x\neq0$得$x\neq k\pi+\frac{\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$，

故$f(x)$的定义域为$\left\{x\,|\,x\neq k\pi+\frac{\pi}{2},k\in\mathbf{Z}\right\}$．

（2）因为 $\tan\alpha=-\frac{4}{3}$， α 为第四象限角，

所以 $\sin\alpha=-\frac{4}{5}$， $\cos\alpha=\frac{3}{5}$．

故 $f(\alpha)=\dfrac{1-\sqrt{2}\sin\left(2\alpha-\frac{\pi}{4}\right)}{\cos\alpha}=\dfrac{1-\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\sin 2\alpha-\frac{\sqrt{2}}{2}\cos 2\alpha\right)}{\cos\alpha}$

$=\dfrac{1-\sin 2\alpha+\cos 2\alpha}{\cos\alpha}=\dfrac{2\cos^2\alpha-2\sin\alpha\cos\alpha}{\cos\alpha}=2(\cos\alpha-\sin\alpha)=\dfrac{14}{5}$

17．解：化简 $f(x)=\frac{1}{2}\sin\omega x+\frac{\sqrt{3}}{2}(\cos\omega x+1)-\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{1}{2}\sin\omega x+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\omega x=\sin\left(\omega x+\frac{\pi}{3}\right)$

（1） $f(0)=\sin\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}$， $f(x)$ 过点 $\left(0,\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

（2） $\frac{2\pi}{\omega}=4\pi\Rightarrow\omega=\frac{1}{2}\Rightarrow f(x)=\sin\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{3}\right)$

$f(x)$ 单调递增时， $-\frac{\pi}{2}+2k\pi<\frac{x}{2}+\frac{\pi}{3}<\frac{\pi}{2}+2k\pi$， $k\in\mathbf{Z}$．

$\Rightarrow-\frac{5\pi}{3}+4k\pi<x<\frac{\pi}{3}+4k\pi$， $k\in\mathbf{Z}$．

∴ $f(x)$ 的单调增区间为 $\left(-\frac{5\pi}{3}+4k\pi,\frac{\pi}{3}+4k\pi\right)$， $k\in\mathbf{Z}$．

18．解：（1） $x=0$， $y=2\cos(2\times 0+\theta)=2\cos\theta=\sqrt{3}\Rightarrow\cos=\frac{\sqrt{3}}{2}\Rightarrow\theta=\frac{\pi}{6}$

（2）设 P 点坐标为 (x_1,y_1)

$\frac{0+y_1}{2}=y_0=\frac{\sqrt{3}}{2}\Rightarrow y_1=\sqrt{3}\Rightarrow y_1=2\cos\left(2x_1+\frac{\pi}{6}\right)=\sqrt{3}\Rightarrow\cos\left(2x_1+\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\dfrac{\frac{\pi}{2}+x_1}{2}=x_0\in\left[\frac{\pi}{2},\pi\right]\Rightarrow x_1\in\left[\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right]\Rightarrow 2x_1+\frac{\pi}{6}\in\left[\frac{7}{6}\pi,\frac{19}{6}\pi\right]$

∴ $2x_1+\frac{\pi}{6}=\frac{11}{6}\pi$ 或 $\frac{13}{6}\pi\Rightarrow x_0=\dfrac{\frac{\pi}{2}+x_1}{2}=\frac{2}{3}\pi$ 或 $\frac{3}{4}\pi$．

19．解：（1） $\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AN}=-\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{4}\overrightarrow{AC}=-\frac{1}{3}\vec{a}+\frac{1}{4}\vec{b}$

$\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{EB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CF}=-\lambda\overrightarrow{BN}+\vec{b}-\vec{a}+\mu\overrightarrow{CM}$

$=-\lambda\left(-\vec{a}+\frac{1}{4}\vec{b}\right)+\vec{b}-\vec{a}+\mu\left(-\vec{b}+\frac{1}{3}\vec{a}\right)$

$$=\left(\lambda-1+\frac{\mu}{3}\right)\vec{a}+\left(-\frac{\lambda}{4}+1-\mu\right)\vec{b}.$$

（2）四边形 $MEFN$ 为平行四边形 $\Rightarrow \overrightarrow{MN}=\overrightarrow{EF}$.

$$\begin{cases}\lambda-1+\dfrac{\mu}{3}=-\dfrac{1}{3}\\ -\dfrac{\lambda}{4}+1-\mu=\dfrac{1}{4}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\lambda=\dfrac{5}{11}\\ \mu=\dfrac{7}{11}\end{cases}$$

20．解：（1）$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=r_1r_2\left[\cos\theta\cos\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)+\sin\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)\right]=r_1r_2\cos\frac{\pi}{2}=0$

所以 $\overrightarrow{OA}\perp\overrightarrow{OB}$

（2）$\left|\overrightarrow{AB}\right|=\overrightarrow{AB}^2=\left(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}\right)^2=\left|\overrightarrow{OB}\right|^2+\left|\overrightarrow{OA}\right|^2-2\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OA}=r_1^2+r_1^2$

将点 A，B 代入曲线，$3x^2+4y^2=12$ 得

$$\begin{cases}r_1^2\left(3+\sin^2\theta\right)=12\\ r_2^2\left(3+\sin^2\left(\theta+\dfrac{\pi}{2}\right)\right)=12\end{cases}\Rightarrow r_1^2+r_2^2=\frac{12}{3+\sin^2\theta}+\frac{12}{3+\cos^2\theta}=\frac{84}{12+\sin^2\theta\cos^2\theta}$$

$$\left|\overrightarrow{AB}\right|^2=r_1^2+r_2^2=\frac{84}{12+\sin^2\theta\cos^2\theta}=\frac{84}{12+\dfrac{\sin^2\theta}{4}}=\frac{336}{48+\sin^2 2\theta}$$

$$\left|\overrightarrow{AB}\right|^2=\sqrt{\frac{336}{48+\sin^2 2\theta}}\Rightarrow\left|AB\right|_{\max}=\sqrt{\frac{336}{48}}=\sqrt{7}，\quad\left|AB\right|_{\min}=\sqrt{\frac{336}{49}}=\frac{4\sqrt{21}}{7}$$

21．解：

（1）$\sin^2\alpha+\sin^2\beta<\sin(\alpha+\beta)$

$$\Leftrightarrow\frac{1-\cos2\alpha}{2}+\frac{1-\cos2\beta}{2}<\sin(\alpha+\beta)$$

$$\Leftrightarrow\frac{1-\cos2\alpha+\cos2\beta}{2}<\sin(\alpha+\beta)$$

$$\Leftrightarrow 1-\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)<\sin(\alpha+\beta)$$

$$\Leftrightarrow\sin(\alpha+\beta)+\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)>1$$

$$\Rightarrow\sin(\alpha+\beta)+\cos(\alpha+\beta)\geq\sin(\alpha+\beta)+\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)>1$$

$$\Rightarrow\sqrt{2}\sin\left(\alpha+\beta+\frac{\pi}{4}\right)>1$$

$$\Rightarrow\sin\left(\alpha+\beta+\frac{\pi}{4}\right)>\frac{\pi}{2}$$

$$\frac{\pi}{4}<\alpha+\beta+\frac{\pi}{4}<\frac{3\pi}{4}$$

$0<\alpha+\beta<\frac{\pi}{2}$，得证.

（2）将 α 、 β 代换为 $\frac{\pi}{2}-\alpha$ ， $\frac{\pi}{2}-\beta$ 得

$$\sin^2\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)+\sin^2\left(\frac{\pi}{2}-\beta\right)<\sin\left[\pi-(\alpha-\beta)\right]$$

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta=\sin(\alpha+\beta)$$

与原式相加得 $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha+\sin^2\beta+\cos\beta=2=2\sin(\alpha+\beta)$

$\sin(\alpha+\beta)=1\Rightarrow\alpha+\beta=\frac{\pi}{2}$.